Potencia, eje radical y centro radical: tangencias por potencia

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en **farmeandopau.com** ›

Última revisión: 22 de noviembre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

La **potencia** de un punto ($PA \cdot PB = PT^2$) no depende de la secante: desde un punto con **igual potencia** respecto a varias circunferencias, las tangentes miden lo mismo. De ahí salen el **eje radical** (recta perpendicular a la línea de centros), el **centro radical** de tres circunferencias y el método para los problemas de **Apolonio**: PPR, PPC, RRP, CCP y las tangencias con un punto dado. Se pregunta en **16 de las 68 convocatorias** de 2025 y 2026, en 11 comunidades (0,25 puntos por examen), casi siempre como PPC, PPR o con un punto de tangencia dado.

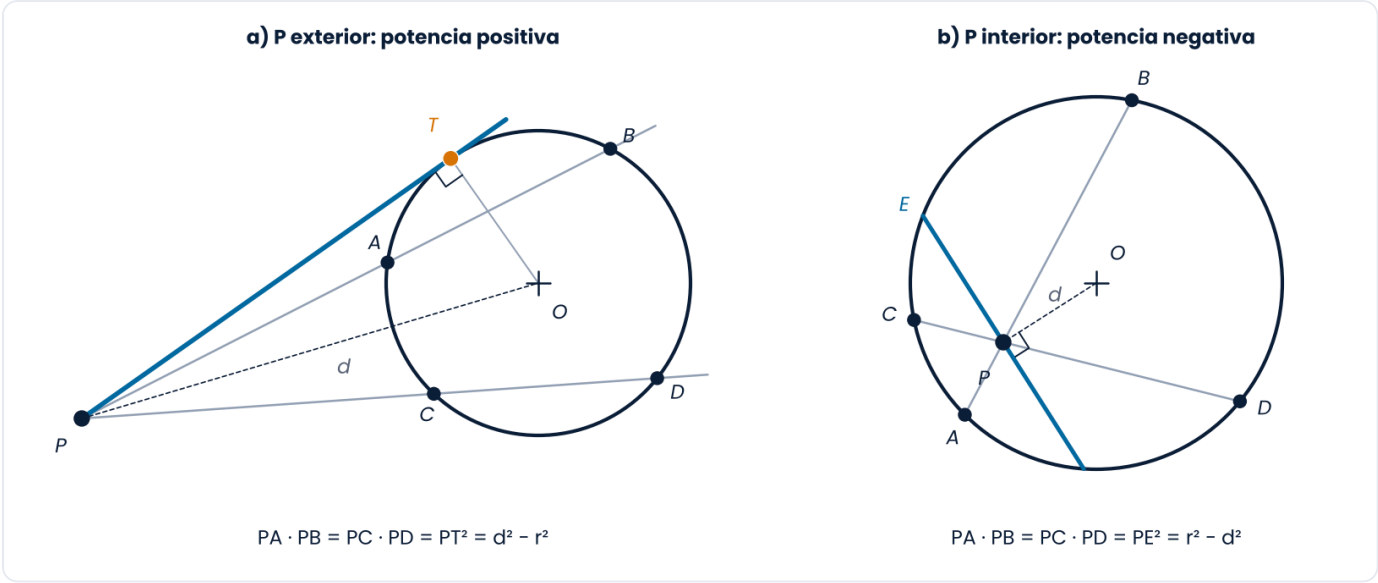
1 Potencia de un punto respecto a una circunferencia

La **potencia** es la herramienta que convierte las tangencias difíciles en problemas de regla y compás. Es un número que mide «cuánto está fuera» de una circunferencia un punto, y tiene una propiedad sorprendente: **no depende de la recta que traces por el punto**. El RD 243/2022 la pone como saber básico de Dibujo Técnico II («Potencia de un punto respecto a una circunferencia. Eje radical y centro radical. Aplicaciones en tangencias») y su criterio de evaluación 2.2 dice: «Resolver tangencias aplicando los conceptos de potencia».

- **Definición.** Traza por un punto *P* cualquier recta que corte a la circunferencia (*O*, *r*) en *A* y *B*. La **potencia** de *P* es el producto $PA \cdot PB$. Si trazas otra recta por *P* que la corte en *C* y *D*, sale el mismo número: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
- **Por qué es constante.** Los triángulos *PAD* y *PCB* son semejantes: comparten el ángulo en *P*, y los ángulos en *D* y en *B* abarcan el mismo arco *AC*, así que son iguales (ángulos inscritos). De la semejanza sale $PA/PC = PD/PB$, es decir, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
- **Con la tangente.** Si *P* es exterior, la tangente *PT* es el caso límite de una secante en la que *A* y *B* se juntan en *T*: $PA \cdot PB = PT^2$. Así que **la potencia es el cuadrado de la tangente**. Y por Pitágoras en el triángulo *OTP* (recto en *T*): $PT^2 = d^2 - r^2$, con $d = OP$.
- **El signo.** Si *P* está **fuera**, la potencia es **positiva** ($d > r$). Si está **sobre** la circunferencia, es **cero**. Si está **dentro**, es **negativa** ($d < r$): *A* y *B* quedan a lados opuestos de *P*, y su valor absoluto es $r^2 - d^2$, el cuadrado de la semicuerda perpendicular a *OP* (*PE* en la figura).
- **Lo que se usa en el examen.** Casi nunca se calcula un número: se usa la igualdad. Si sabes que un punto tiene la misma potencia respecto a dos circunferencias, sabes que **las tangentes trazadas desde él a las dos miden lo mismo**. De ahí salen el eje radical, el centro radical y todas las tangencias de este tema.
- **Media proporcional.** $PT = \sqrt{PA \cdot PB}$: el segmento tangente es la **media proporcional** de *PA* y *PB*. Es la misma media proporcional que construías en el Tema 2 con los teoremas del cateto y de la altura (aquí *PA* y *PB* salen del mismo punto, como en el del cateto), y es la que usarás para llevar sobre una recta la distancia $\sqrt{CA \cdot CB}$ en el problema PPR.

La frase que lo resume

Desde un punto con **igual potencia** respecto a varias circunferencias, las **tangentes miden lo mismo**. Con un compás centrado en ese punto llevas la tangente de una circunferencia a otra: es el truco de todo el tema.



Potencia de un punto. a) Desde un punto exterior, todas las secantes dan el mismo producto, y la tangente al cuadrado también. b) Desde un punto interior, el producto de los dos segmentos de cualquier cuerda es constante; la potencia es negativa. *d* es la distancia del punto al centro.

2 Eje radical de dos circunferencias

El **eje radical** de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos que tienen **la misma potencia** respecto a las dos. Siempre es una **recta perpendicular a la línea de centros** (si las circunferencias no son concéntricas). Desde cualquier punto suyo exterior a ellas, las cuatro tangentes trazadas a las dos circunferencias miden lo mismo. Andalucía lo pide como apartado aparte («Determinar el eje radical de C1 y C2», 0,5 puntos en 2026) y Galicia puntúa los «eixes radicais» con 1,5 de 2,25 puntos (2025 ordinaria).

- **Por qué es una recta perpendicular.** Si X está a distancia d_1 de O_1 y d_2 de O_2, la condición es $d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$, o sea, $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$ = constante. Los puntos cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos es constante forman una recta perpendicular a O_1O_2. Corta a la línea de centros a una distancia $x = \dfrac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}$ de O_1, con $d = O_1O_2$.
- **Secantes:** el eje es la recta de la **cuerda común**, porque los dos puntos de corte tienen potencia cero respecto a las dos. Basta unirlos.
- **Tangentes** (por fuera o por dentro): el eje es la **tangente común** en el punto de tangencia T, perpendicular a la línea de centros.
- **Exteriores o una dentro de otra (sin puntos comunes):** traza una **circunferencia auxiliar** cualquiera que corte a las dos. Su cuerda común con la primera y su cuerda común con la segunda se cortan en un punto M que tiene la misma potencia respecto a las tres: M es del eje. La **perpendicular por M a la línea de centros** es el eje radical.
- **Si quieres más precisión**, usa dos circunferencias auxiliares: obtienes dos puntos M y M' del eje y no dependes de trazar bien una perpendicular. Si las cuerdas salen casi paralelas, cambia la auxiliar: el punto M se va muy lejos.
- **Casos raros.** Dos circunferencias **concéntricas** no tienen eje radical (las potencias nunca se igualan). Si las dos tienen el **mismo radio**, el eje es la **mediatriz** de O_1O_2. Si una está dentro de otra, el eje queda **fuera de las dos**, al lado de la pequeña.

Paso 1: Mira la posición relativa: si se cortan, une los puntos de corte; si son tangentes, traza la tangente común en T.

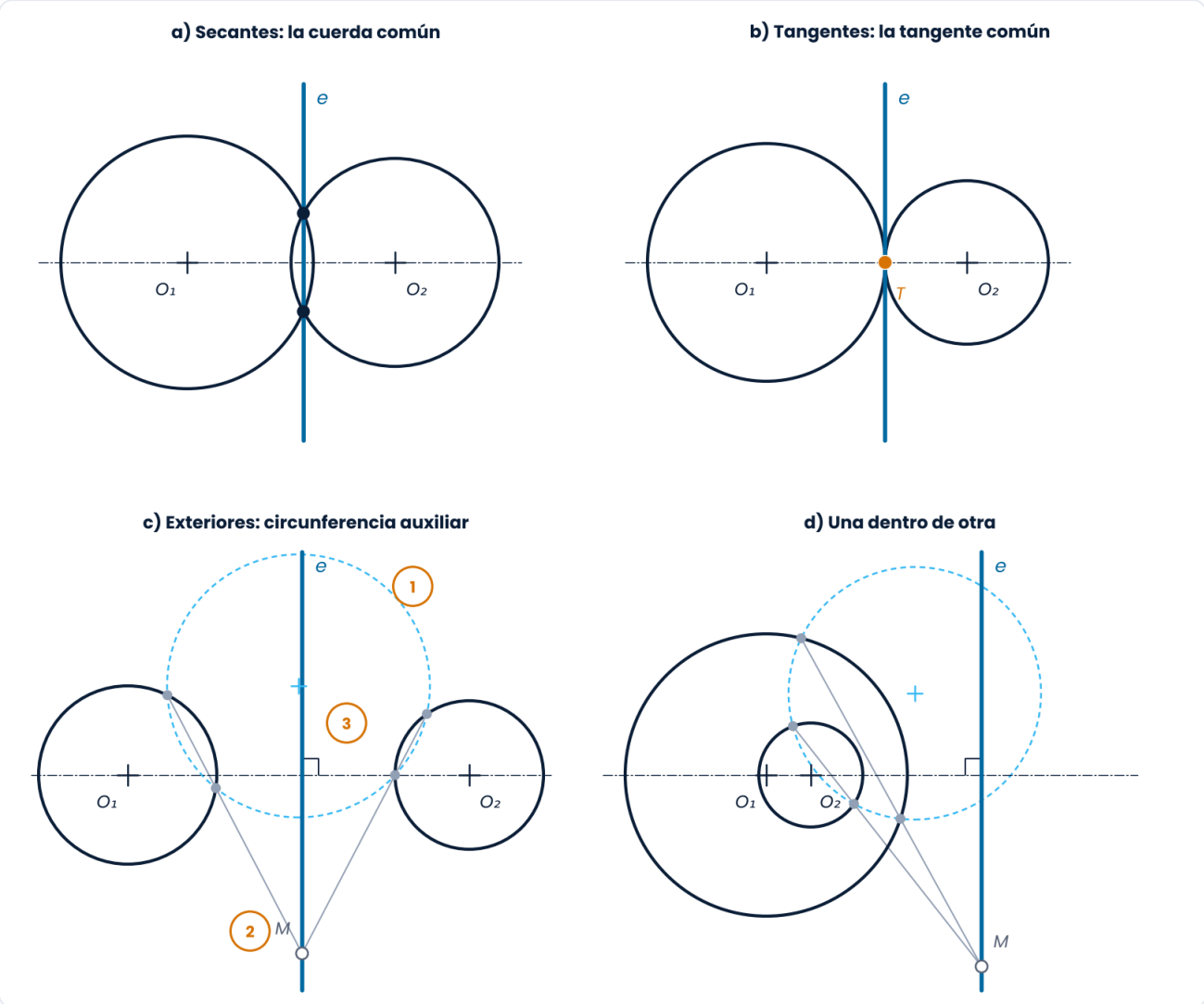
Paso 2: Si no tienen puntos comunes, dibuja una circunferencia auxiliar (en fino) que corte claramente a las dos.

Paso 3: Prolonga las dos cuerdas comunes hasta que se corten en M.

Paso 4: Traza por M la perpendicular a O_1O_2: es el eje radical. Rotúlalo (e) y no borres la auxiliar.

No está en el punto medio

El eje radical de dos circunferencias exteriores **no** pasa por el punto medio de los centros ni por el punto medio del hueco entre ellas, salvo que los radios sean iguales. Está más cerca del **centro** de la pequeña; en el hueco entre las dos, en cambio, queda algo más cerca del **borde** de la grande. Constrúyelo siempre con la auxiliar.



Los cuatro casos del eje radical *e*. a) Secantes: la recta de la cuerda común. b) Tangentes: la tangente común en T. c) Exteriores: ① circunferencia auxiliar que corte a las dos; ② sus cuerdas comunes se cortan en M; ③ perpendicular por M a la línea de centros. d) Una dentro de otra: el mismo método; el eje queda fuera de las dos.

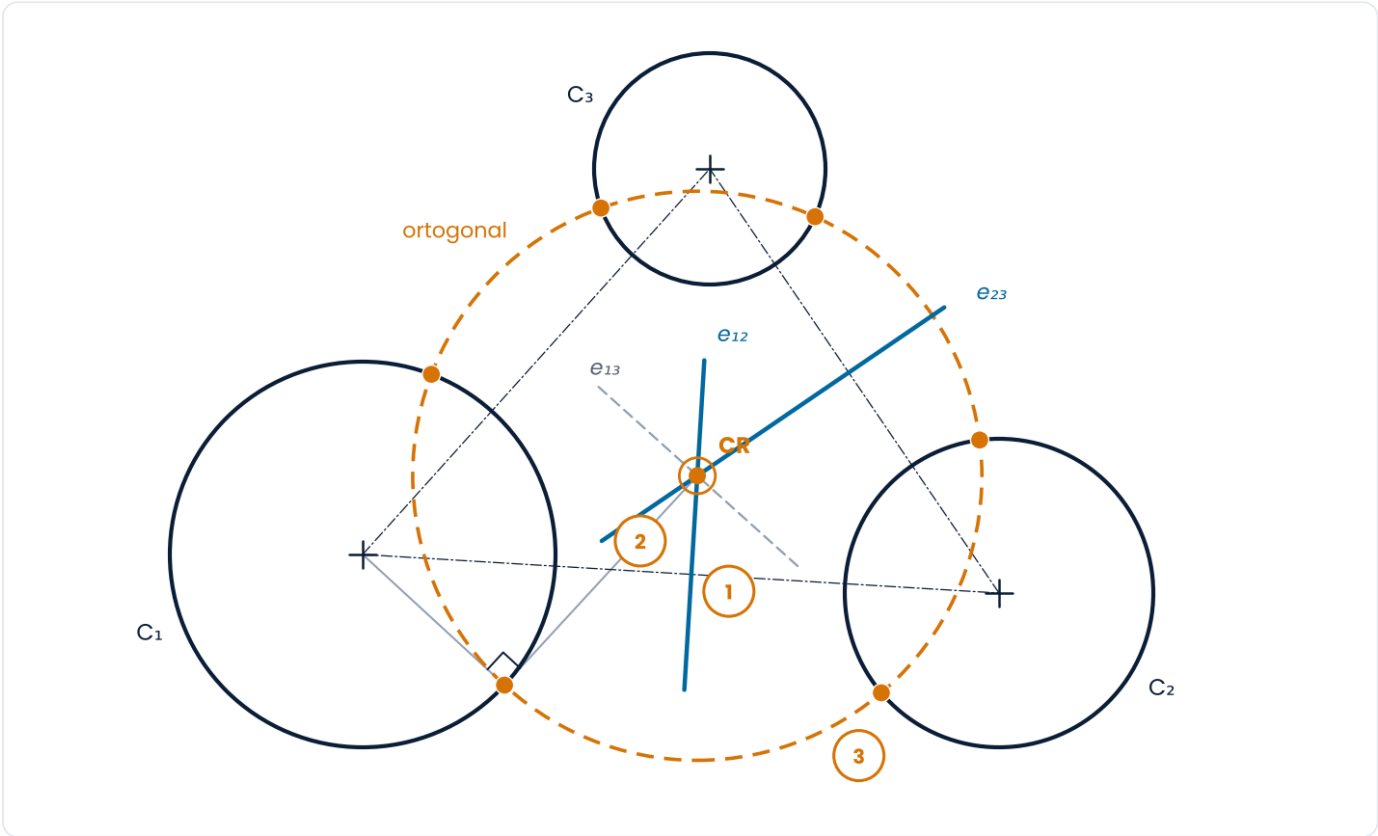
3 Centro radical de tres circunferencias y circunferencia ortogonal

Con tres circunferencias hay tres ejes radicales (de la 1 con la 2, de la 2 con la 3 y de la 1 con la 3). Si los centros no están alineados, los tres ejes **se cortan en un solo punto**: el **centro radical** (CR). Es el único punto con la misma potencia respecto a las tres. Galicia lo pidió como ejercicio entero en 2025 («Trace el centro radical de las tres circunferencias»), y es la pieza clave de todas las tangencias por potencia.

- **Por qué concurren.** El punto donde se cortan el eje 1-2 y el eje 2-3 tiene la misma potencia respecto a 1 y 2, y respecto a 2 y 3; por tanto, también respecto a 1 y 3: está en el tercer eje. Basta trazar **dos ejes**; el tercero sirve de comprobación.
- **Centros alineados.** Los tres ejes son perpendiculares a la misma recta, así que son **paralelos**: el centro radical es **impropio** (está en el infinito). En las tangencias, esto pasa cuando los datos son simétricos y el método cambia (lo ves en PPR y PPC).
- **Circunferencia ortogonal.** Si el centro radical es exterior a las tres, las tangentes desde él a las tres miden lo mismo, $\rho = \sqrt{\text{potencia}}$. La circunferencia de centro CR y radio ρ corta a las tres **en ángulo recto** (en cada punto de corte, los dos radios son perpendiculares) y pasa por los seis puntos de tangencia.
- **Aplicación directa.** Cantabria preguntó en 2024 la circunferencia tal que las tangentes desde P_1, P_2 y P_3 midan 20, 30 y 40 mm. Su centro X cumple $XP_i^2 - \rho^2 = t_i^2$: tiene la misma potencia respecto a las circunferencias (P_1, 20), (P_2, 30) y (P_3, 40). X es su centro radical, y el radio buscado, el de la ortogonal.
- **Una circunferencia y un haz.** Si una de las «tres circunferencias» es cualquier circunferencia que pase por dos puntos A y B, todas ellas tienen el mismo eje radical: la recta AB. Por eso el centro radical de una circunferencia dada y de **todas** las que pasan por A y B es un punto fijo de la recta AB. Es la idea de las secciones siguientes.

Comprueba con el tercer eje

Si el tercer eje no pasa por tu centro radical (con un margen de medio milímetro), hay un error en alguna auxiliar. En Galicia 2025 los ejes valían 1,5 de 2,25 puntos: merece la pena comprobarlos.



Centro radical y circunferencia ortogonal. ① Eje radical de C_1 y C_2. ② Eje de C_2 y C_3: su corte es CR. El eje de C_1 y C_3 (discontinuo) pasa por el mismo punto. ③ La circunferencia de centro CR y radio igual a la tangente corta a las tres en ángulo recto; los puntos ámbar son los de tangencia. Cada eje se construye con una auxiliar, como en la figura anterior.

4 Los problemas de Apolonio: el método del centro radical

Un **problema de Apolonio** pide las circunferencias que cumplen **tres condiciones** de tangencia o de paso, sin dar el radio. Cada condición es un **P** (pasar por un punto), una **R** (ser tangente a una recta) o una **C** (ser tangente a una circunferencia). Hay diez combinaciones. Las que caen en la PAU se resuelven por **potencia**;

las más difíciles, por **inversión** (Tema 5) o reduciéndolas a las fáciles. Castilla-La Mancha fija en sus Directrices 2026/2027 los seis casos que pregunta, y todos están en este tema.

- **Primero, el lugar de los centros.** Si la solución pasa por A y B, su centro está en la **mediatriz de AB**. Si es tangente a una recta en T, en la **perpendicular por *T***. Si es tangente a una circunferencia en T, en la **recta *OT***. Te falta un segundo dato: el punto de tangencia que sale del centro radical.
- **Dos soluciones casi siempre.** Desde CR hay dos tangentes (o dos puntos a la misma distancia sobre una recta), y cada una da una solución. Si el enunciado no elige («todas las circunferencias», Cantabria y C. Valenciana), dibuja las dos. Si elige («el recorte mayor», Extremadura 2026; «de radio máximo», Extremadura 2025; «que tenga el mayor radio posible», C. Valenciana 2025, con el punto de tangencia T dado), justifica cuál.
- **Marca todo.** Los criterios puntúan por separado el centro radical (0,5 en Cantabria 2025 y en Asturias 2026), los centros y los puntos de tangencia (0,75 en Asturias; en Cantabria, 0,25 cada punto de tangencia y -0,25 si no señalas el centro). Rotula CR, O_1, O_2, T_1, T_2.

1. Un haz de circunferencias

Las soluciones pertenecen a una familia que ya conoces: las que pasan por A y B (eje radical común: la recta AB) o las tangentes a una recta en T (eje común: la propia recta).

2. El centro radical

Corta ese eje común con el eje radical de la circunferencia dada y una auxiliar del haz. El punto CR tiene la misma potencia respecto a la dada y respecto a **todas** las del haz, también las soluciones.

3. Los puntos de tangencia

Desde CR, la tangente a la solución mide lo mismo que a la dada: $\sqrt{\text{potencia}}$. Con el compás en CR obtienes los puntos de tangencia; los centros salen con una perpendicular o una recta de centros.

Caso	Cómo se resuelve	Soluciones (máx.)
PPP	Circunferencia por tres puntos: corte de mediatrices (Tema 2)	1
PPR	Centro radical en la recta AB y media proporcional (sección siguiente)	2
PPC	Circunferencia auxiliar por A y B y centro radical en la recta AB	2
PRR (= RRP)	Simétrico de P respecto a la bisectriz: se convierte en PPR	2
PRC	Inversión de centro P (Tema 5) o reducción a PPR por potencia	4
PCC (= CCP)	Centro de homotecia y punto antihomólogo: se convierte en PPC	4
RRR	Bisectrices: circunferencias inscrita y exinscritas (Tema 2)	4
RRC	Dilatación: el radio de la circunferencia pasa a las rectas y queda RRP	8
RCC	Dilatación: queda PRC	8
CCC	Dilatación: queda PCC	8

Si además te dan un **punto de tangencia** (Andalucía 2026, Cantabria 2026, Castilla-La Mancha 2025), el problema es mucho más corto: lo ves en la sección «Tangencias con un punto de tangencia dado». Con radio dado no hace falta potencia: es el Tema 3.

5 Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta (PPR)

Es el caso más típico: Cantabria (el aspersor de 2025), Extremadura (la carretera de 2025), Murcia (dentro del croquis de 2026), Andalucía (reserva de 2026) y Navarra (2024). Te dan dos puntos A y B, al mismo lado de una recta r, y piden las circunferencias que pasan por ellos y tocan a r.

- **La idea.** Todas las circunferencias que pasan por A y B tienen como eje radical común la recta AB. Prolóngala hasta cortar a r en CR. Para cualquier circunferencia por A y B, la potencia de CR es $CA \cdot CB$. Si además es tangente a r en T, esa potencia es CT^2. Por tanto, $CT = \sqrt{CA \cdot CB}$.
- **Cómo construyes $\sqrt{CA \cdot CB}$.** Dibuja una circunferencia auxiliar cualquiera que pase por A y B; la más cómoda es la de **diámetro AB**. Traza la tangente desde CR a esa auxiliar con el arco capaz de 90°

(circunferencia de diámetro *CR*-centro). La tangente *Ct* mide exactamente $\sqrt{CA \cdot CB}$, porque la potencia de *CR* respecto a la auxiliar es $CA \cdot CB$.

- **Los puntos de tangencia.** Con centro en *CR* y radio *Ct*, corta a *r* a los dos lados: T_1 y T_2. Hay **dos soluciones**.
- **Los centros.** Cada centro está en la **mediatriz de AB** (pasa por *A* y *B*) y en la **perpendicular a *r*** por su punto de tangencia. El radio es la distancia del centro a *T*, y debe coincidir con la distancia a *A*: es tu comprobación.
- **Casos especiales.** Si *AB* es **paralela** a *r*, no hay centro radical (está en el infinito): la única solución es tangente en el punto donde la mediatriz de *AB* corta a *r*. Si uno de los puntos está **sobre** *r*, ese punto es el de tangencia y hay una sola solución. Si *A* y *B* están a **lados distintos** de *r*, no hay solución.

Paso 1: Une *A* y *B* y prolonga hasta cortar a *r*: centro radical *CR*.

↓

Paso 2: Dibuja la circunferencia de diámetro *AB* (o cualquier otra que pase por *A* y *B*).

↓

Paso 3: Traza la tangente desde *CR* a esa circunferencia: longitud *Ct*.

↓

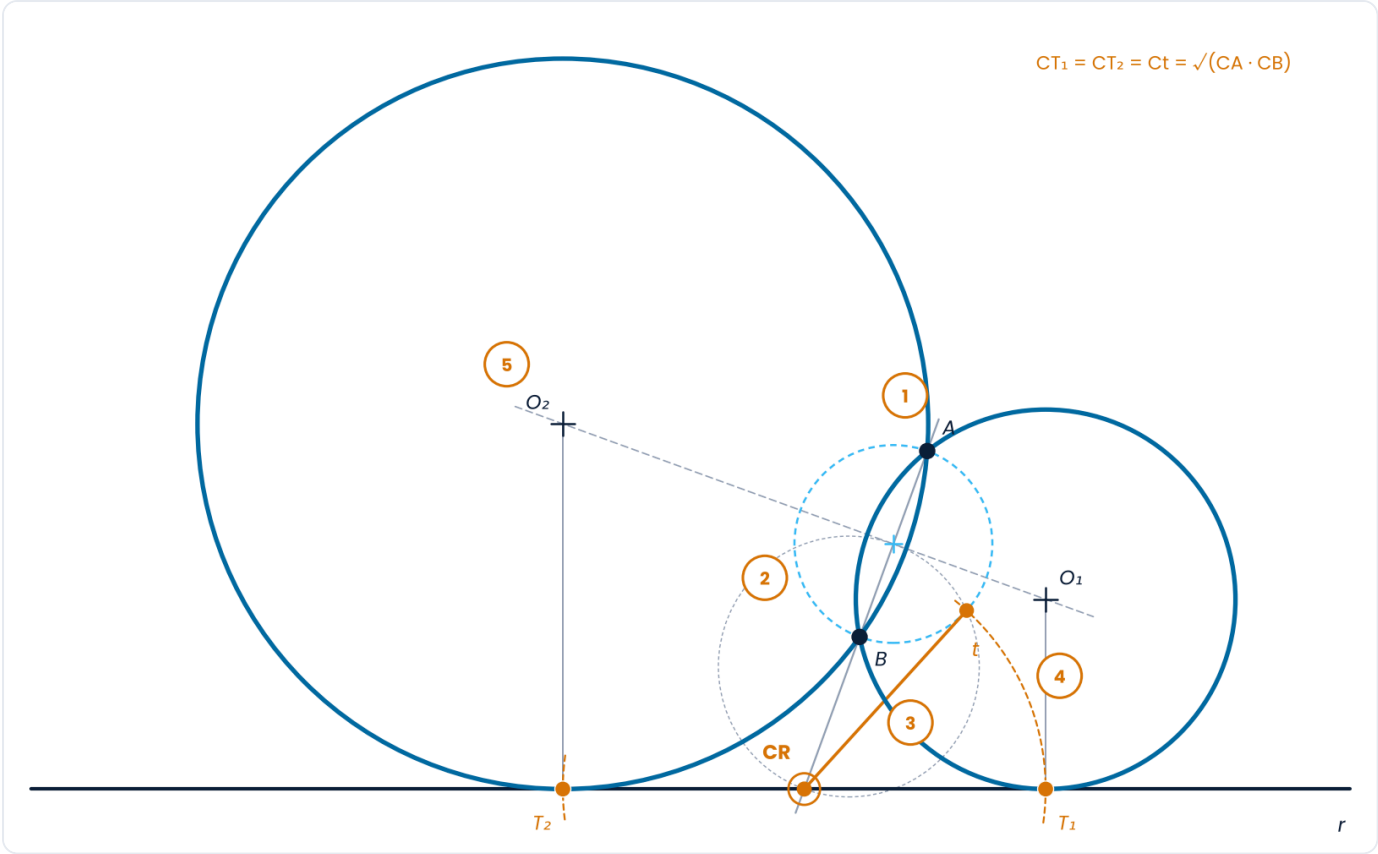
Paso 4: Lleva *Ct* sobre *r* con el compás, a los dos lados de *CR*: T_1 y T_2.

↓

Paso 5: Perpendiculares a *r* por T_1 y T_2 y mediatriz de *AB*: centros. Dibuja las dos circunferencias y marca centros y puntos de tangencia.

Nada de calculadora

Podrías calcular $\sqrt{CA \cdot CB}$ midiendo con la regla, pero Cantabria avisa: «No se admitirán soluciones obtenidas por tanteo». Castilla-La Mancha puntúa con 0 «las resoluciones exclusivamente matemáticas sin trazado geométrico». Y Murcia: «No tendrá validez ninguna la obtención de construcciones por cálculo numérico. Deberá seguirse obligatoriamente el camino gráfico». La media proporcional se **construye**.



PPR por potencia. ① La recta *AB* corta a *r* en *CR*. ② Circunferencia auxiliar de diámetro *AB*. ③ Tangente *Ct* desde *CR* a la auxiliar (arco capaz de 90°). ④ Arco de centro *CR* y radio *Ct*: puntos de tangencia T_1 y T_2. ⑤ Mediatriz de *AB* y perpendiculares a *r* por T_1 y T_2: centros O_1 y O_2.

6 Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia (PPC)

Es el caso concreto que más ha caído en 2025 y 2026 (las tangencias con punto dado suman más, pero son tres casos distintos): Murcia (2026 extraordinaria), Asturias (2026 extraordinaria), Extremadura (la chapa de 2026) y la C. Valenciana (2025). Te dan una circunferencia *C* de centro *O* y dos puntos *A* y *B*, los dos fuera o los dos dentro de ella.

- **La idea.** Las soluciones pasan por *A* y *B*: su eje radical común es la recta *AB*. Necesitas un punto de esa recta con la misma potencia respecto a *C* y respecto a las circunferencias que pasan por *A* y *B*. Lo da una **circunferencia auxiliar** que pase por *A* y *B* y **corte a *C***: su cuerda común con *C* es el eje radical de las dos, y corta a la recta *AB* en el **centro radical** *CR*.
- **Los puntos de tangencia.** Desde *CR*, la tangente a *C* y la tangente a cualquier solución miden lo mismo. Y en el punto de tangencia *T*, la solución y *C* comparten tangente: esa tangente es su eje radical, que pasa por *CR*. Por tanto, **las tangentes desde *CR* a *C* tocan a *C* en los puntos de tangencia T_1 y T_2**. Las trazas con el arco capaz de 90° sobre *CR*–*O*.
- **Los centros.** Cada centro está en la **mediatriz de AB** y en la **recta *OT*** (centros y punto de tangencia alineados). Una solución deja a *C* fuera (tangencia exterior); la otra la envuelve (tangencia interior).
- **Comprobación.** $CT_1 = CT_2 = \sqrt{CA \cdot CB}$. Si tus dos tangentes no miden lo mismo, la auxiliar o el corte de cuerdas están mal.
- **Casos especiales.** Si el centro *O* está en la **mediatriz de AB**, la cuerda común sale paralela a *AB* y *CR* se va al infinito: los puntos de tangencia son los dos cortes de la mediatriz con *C*. Si *A* y *B* están **dentro** de *C* (Asturias 2026), el método es el mismo y las dos soluciones quedan dentro. Si uno está dentro y otro fuera, no hay solución.

Paso 1: Circunferencia auxiliar con centro en la mediatriz de AB que pase por A y B y corte bien a C.

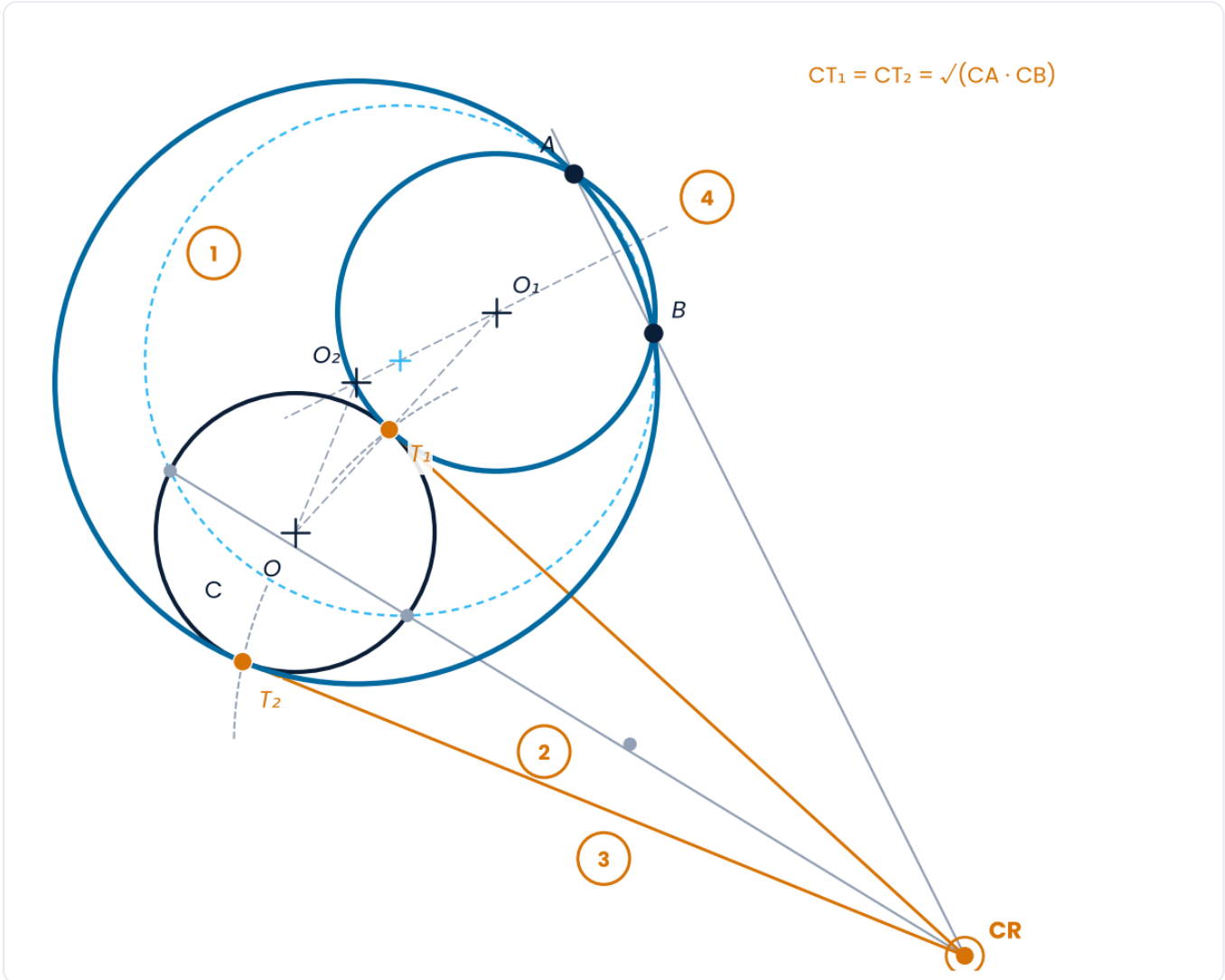
Paso 2: Une los dos puntos de corte con C y prolonga hasta cortar a la recta AB: CR.

Paso 3: Tangentes desde CR a C: T_1 y T_2.

Paso 4: Une O con T_1 y T_2; donde cortan a la mediatriz de AB están los centros. Dibuja y marca.

¿Cuál es «la mayor»?

Casi siempre, la solución que **envuelve** a C es la de mayor radio cuando A y B están fuera. Compruébalo comparando los dos radios: si C es grande y está muy cerca de la recta AB, puede salir al revés. En la chapa de Extremadura 2026 («el recorte mayor») y en Murcia 2026 (dos soluciones, 4 puntos cada una) tienes que saber distinguirlas.



PPC por potencia. ① Circunferencia auxiliar que pasa por A y B y corta a C. ② Su cuerda común con C y la recta AB se cortan en CR. ③ Tangentes desde CR a C (arco capaz de 90°): puntos de tangencia T_1 y T_2. ④ Mediatriz de AB y rectas OT_1 y OT_2: centros O_1 y O_2.

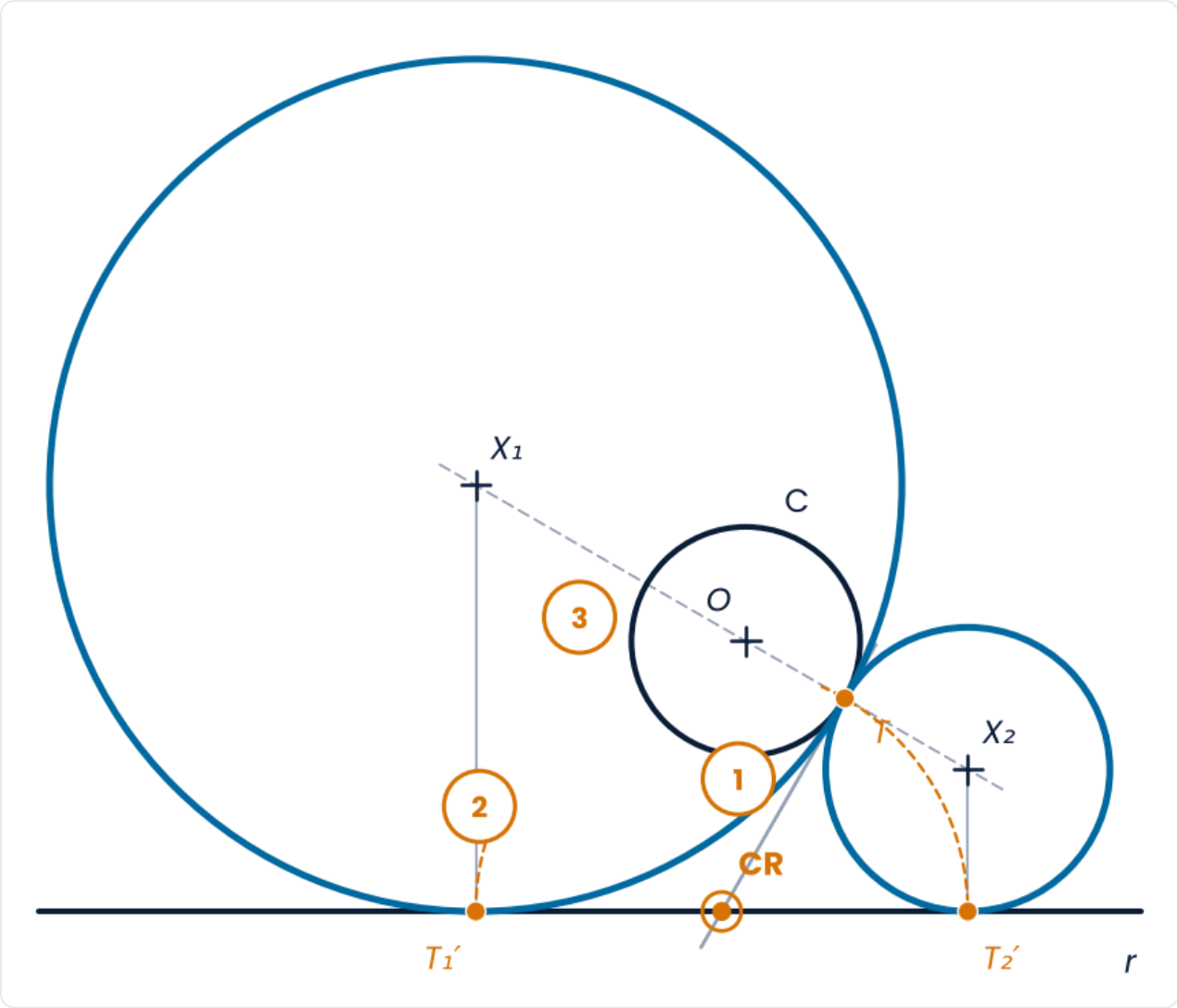
7 Tangencias con un punto de tangencia dado, por potencia

Tres de los seis casos de Castilla-La Mancha dan un punto de tangencia: en la circunferencia, en la recta o en una de dos circunferencias. El Tema 3 los resuelve con mediatrices; aquí ves el método por **eje radical**, que es el que piden Andalucía («Determinar el eje radical de C1 y C2» y después las tangentes en T, 2026) y Cantabria (la letra de 2026, con «haz de centros», «cada eje radical» y «centro radical» puntuados).

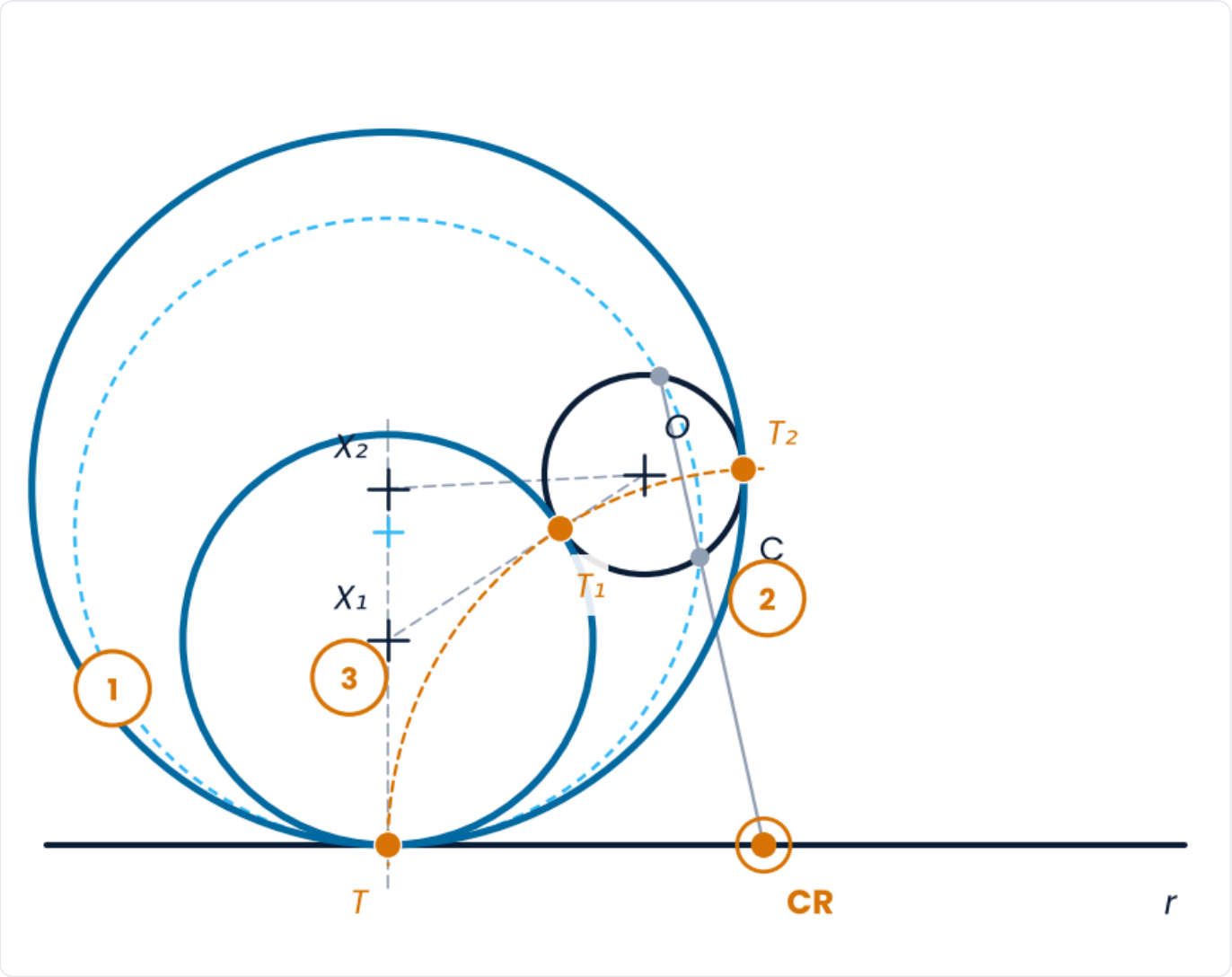
- **Tangentes a una recta *r* y a una circunferencia *C* en su punto *T*.** La tangente a C en T es el eje radical de C y de la solución; corta a r en CR. Desde CR, la tangente a la solución mide CT; sobre r, el punto de tangencia T' cumple $CT' = CT$. Llévalo a los dos lados: dos soluciones. Centros: recta OT y perpendicular a r por T'.
- **Tangentes a *r* en su punto *T* y a una circunferencia *C*.** Las soluciones son de la familia de circunferencias tangentes a r en T (su eje común es la propia r). Traza **una auxiliar de esa familia** (centro en la perpendicular por T) que corte a C: su cuerda común con C corta a r en CR. El arco de centro CR y radio CT corta a C en los puntos de tangencia T_1 y T_2. Centros: perpendicular por T y rectas OT_1 y OT_2.
- **Tangentes a C_1 y a C_2 en un punto *T* de C_2.** La tangente a C_2 en T es el eje radical de C_2 y de cualquier solución. El eje radical de C_1 y C_2 lo construyes como en la sección del eje radical. Su corte es CR, y el arco de centro CR y radio CT corta a C_1 en T_1 y T_2. Centros: recta O_2T y rectas O_1T_1 y O_1T_2. Es el ejercicio resuelto de Andalucía 2026.
- **Por qué el arco sirve.** El arco de centro CR y radio CT es la circunferencia **ortogonal** a todas las implicadas: corta a cada circunferencia (las dadas y las soluciones) justo en los puntos donde la tocan las tangentes trazadas desde CR, y esos son los puntos de tangencia que buscas.
- **Comprobación rápida.** Centro de la solución, punto de tangencia y centro de la dada, **alineados**. Y el punto de tangencia en la recta, en la **perpendicular** desde el centro.

El atajo de la tangente en *T*

Siempre que te den el punto de tangencia **en una circunferencia**, la tangente en ese punto ya es un eje radical. No necesitas auxiliar para ella: solo para el otro eje, si las circunferencias no se cortan.



Punto *T* en la circunferencia *C*. ① Tangente en *T* hasta *r*: *CR*. ② $CT_1' = CT_2' = CT$ sobre *r*. ③ Recta *OT* y perpendiculares a *r*: centros X_1 y X_2.

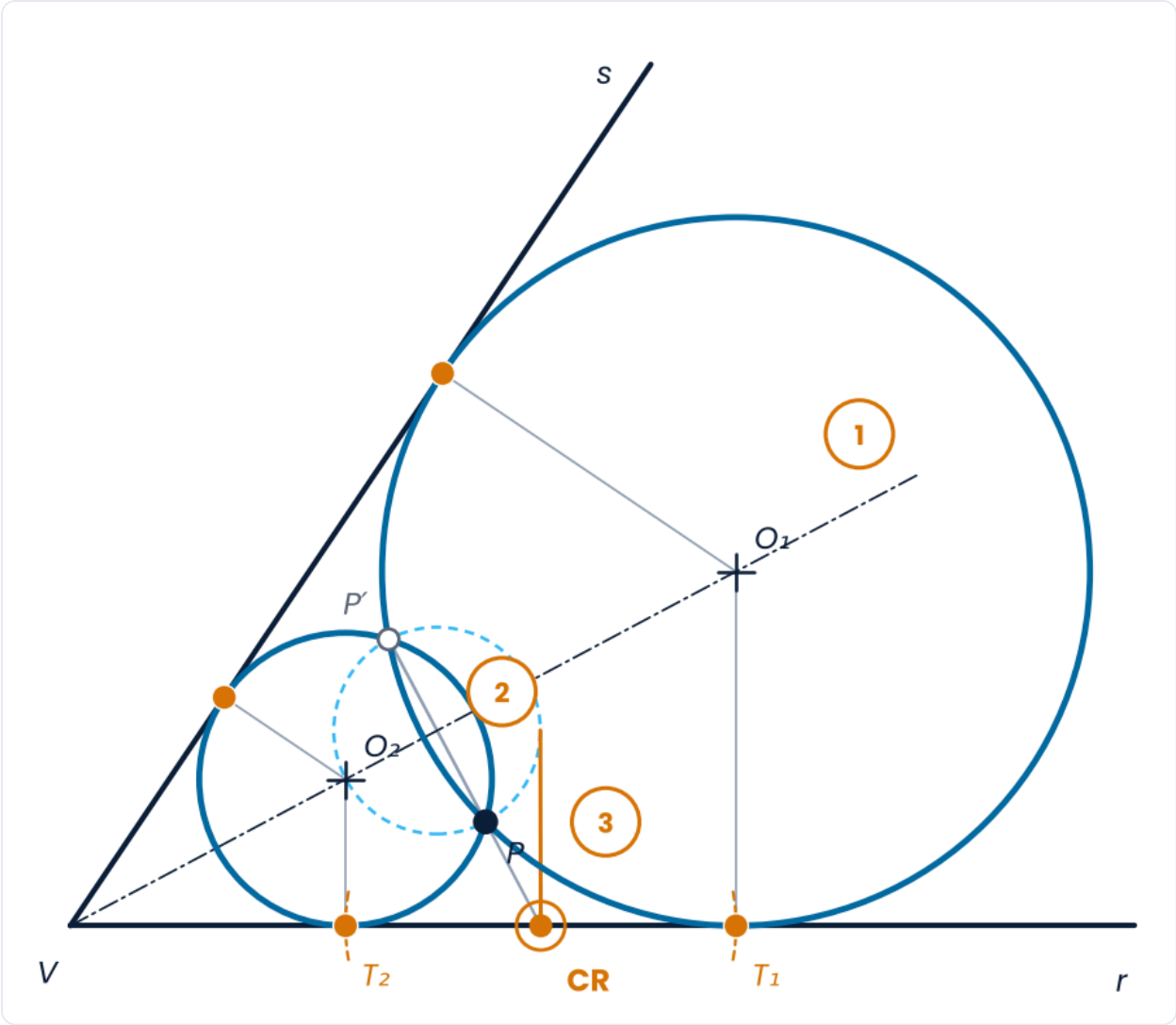


Punto *T* en la recta *r*. ① Auxiliar tangente a *r* en *T* que corte a *C*. ② Su cuerda común con *C* corta a *r* en *CR*. ③ Arco de centro *CR* y radio *CT*: T_1 y T_2 en *C*. Centros X_1 y X_2 en la perpendicular por *T* y en las rectas OT_1 y OT_2.

8 Circunferencias tangentes a dos rectas que pasan por un punto (RRP)

Es el cuarto caso de Castilla-La Mancha («tangentes a dos rectas r y s que se cortan y que pasen por punto P»), el de la reserva 2 de Andalucía 2026, la acequia de La Rioja 2025 y Navarra y Cataluña en 2024. Se convierte en un PPR con una simetría.

- **La idea.** Cualquier circunferencia tangente a *r* y a *s* tiene el centro en una **bisectriz** del ángulo que forman, y es **simétrica** respecto a esa bisectriz. Si pasa por *P*, pasa también por *P′*, el simétrico de *P* respecto a la bisectriz. Ya tienes dos puntos y una recta: un **PPR**.
- **Qué bisectriz.** La del ángulo en el que está *P* (el otro ángulo no tiene soluciones por *P*). Traza por *P* la perpendicular a esa bisectriz y lleva la misma distancia al otro lado: *P′*. Lo mismo si el enunciado dice que el centro está en una recta (La Rioja 2024: «tangente a la recta t, que pasa por el punto P y que tiene su centro en r»): el simétrico de *P* respecto a esa recta también es de la solución, y queda un PPR.
- **El resto es PPR.** La recta *PP′* corta a *r* en *CR*; $CT = \sqrt{CP \cdot CP'}$ con la circunferencia de diámetro *PP′*; llevas *CT* sobre *r* a los dos lados (T_1, T_2) y levantas perpendiculares hasta la **bisectriz**, que hace de mediatriz de *PP′*: ahí están los centros.
- **Los puntos de tangencia con *s*.** Por simetría, o con la perpendicular desde cada centro a *s*. Comprobación: las tangentes desde el vértice *V* son iguales, $VT_1 = VT_1'$.
- **Rectas paralelas.** Si *r* y *s* son paralelas, el radio es la mitad de su distancia y el centro está en la paralela media: lo cortas con la circunferencia de centro *P* y ese radio. Es un caso de radio conocido (Tema 3).



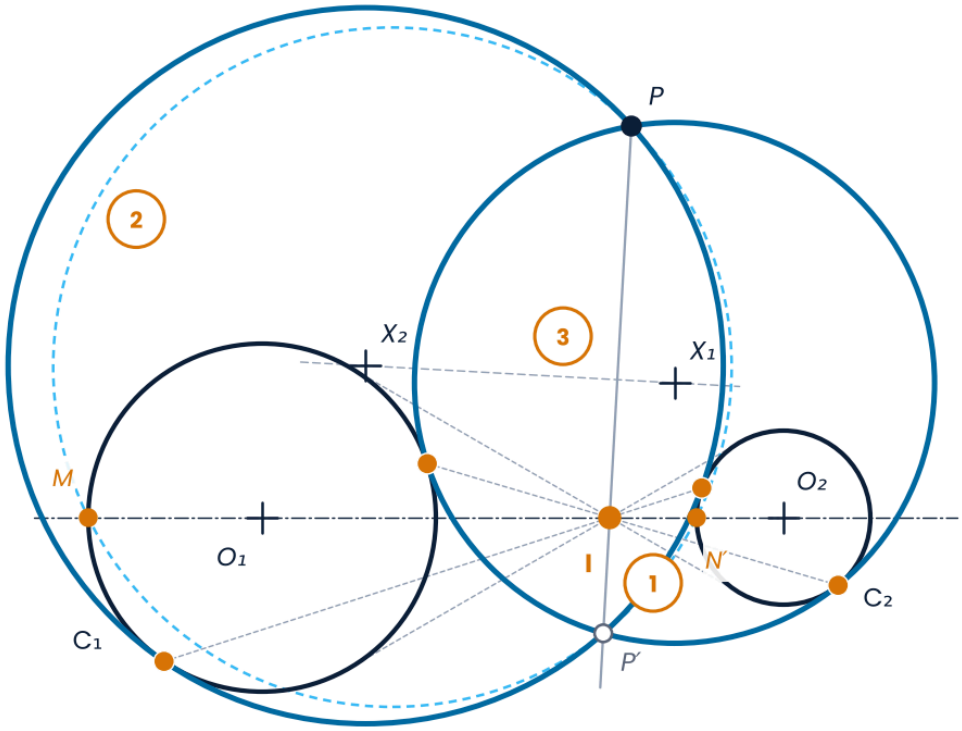
RRP reducido a PPR. ① Bisectriz del ángulo de *r* y *s* que contiene a *P*. ② Simétrico *P′* de *P*. ③ *PP′* corta a *r* en *CR*; con la tangente a la circunferencia de diámetro *PP′* llevas $\sqrt{CP \cdot CP'}$ sobre *r*: T_1 y T_2. Las perpendiculares por ellos cortan a la bisectriz en O_1 y O_2.

9 Circunferencias tangentes a dos circunferencias que pasan por un punto (CCP)

Cuando el punto está **sobre** una de las dos circunferencias, es el caso de la sección «Tangencias con un punto de tangencia dado, por potencia»: así han caído la reserva 4 de Andalucía 2026 y la letra de Cantabria 2026. Si el punto no está en ninguna, el problema se convierte en un **PPC** con un **centro de homotecia**. No ha caído en 2025-2026, pero es uno de los diez casos de Apolonio y entra en el saber de tangencias por potencia.

- **Centros de homotecia.** Dos circunferencias (O_1, r_1) y (O_2, r_2) son homotéticas desde dos puntos de la línea de centros: el **exterior** *H* (fuera del segmento O_1O_2) y el **interior** *I* (entre los centros). Cumplen $HO_1/HO_2 = IO_1/IO_2 = r_1/r_2$. El exterior es el corte de las tangentes comunes exteriores; el interior, el de las interiores (Tema 3).
- **La propiedad clave.** Si una circunferencia es tangente a las dos, sus dos puntos de tangencia están alineados con un centro de homotecia: con *H* si las dos tangencias son del mismo tipo, y con *I* si son de tipo distinto. Además, esos dos puntos son **antihomólogos**, y el producto de sus distancias al centro de homotecia es constante: la **potencia de homotecia**.
- **Cómo se calcula esa constante.** En la línea de centros, toma un punto *M* de la primera y el punto *N′* de la segunda que **no** le corresponde en la homotecia (su antihomólogo). Con el centro interior, $k = IM \cdot IN'$. Con el exterior *H*, el antihomólogo de *M* es **el otro extremo** del diámetro de C_2 (llámalo *N″*): $k = HM \cdot HN''$. Si usas el mismo *N′* con *H*, sale un *P′* falso.

- **El punto *P′*.** El centro de homotecia tiene potencia *k* respecto a cualquier solución. Por eso, la recta que lo une con *P* corta a cada solución en otro punto fijo *P′*, con $IP \cdot IP' = k$. Se obtiene sin cálculo: la circunferencia que pasa por *P*, *M* y *N′* corta a la recta *PI* en *P′*. Con el interior, *P′* queda al otro lado de *I*.
- **Ya es un PPC.** Las soluciones pasan por *P* y *P′* y son tangentes a C_1: resuélvelo como en la sección PPC. Con el centro *I* salen dos soluciones (tangentes por fuera a una y por dentro a la otra). Con el centro *H*, otras dos (las dos tangencias del mismo tipo). Hasta **cuatro** en total. Por inversión es más corto (Tema 5).



CCP reducido a PPC con el centro de homotecia interior *I*. ① *I* divide O_1O_2 en la razón de los radios. ② La circunferencia que pasa por *P* y por los antihomólogos *M* y *N′* corta a la recta *PI* en *P′*. ③ PPC con *P*, *P′* y C_1: dos soluciones (X_1 y X_2), con sus puntos de tangencia alineados con *I*.

10 Qué te piden en tu comunidad

La potencia y las tangencias por eje y centro radical se preguntan en **16 de las 68 convocatorias** ordinarias y extraordinarias de 2025 y 2026, en **11 comunidades**: 0,25 puntos de media por examen. El caso concreto que más cae es el **PPC** (4 convocatorias); agrupadas, las tangencias con **punto de tangencia dado** resueltas por potencia suman 5 (contando las dos piezas del País Vasco). Después vienen el **PPR** (3), los enlaces con centro radical de Canarias (2), el **centro radical** puro (Galicia) y el **RRP** (La Rioja). Está en el RD 243/2022 para todas: que no haya caído en tu comunidad no significa que no vaya a caer.

Comunidad	Cómo te lo piden	Puntos	Estado
Andalucía (y Ceuta y Melilla)	Ejercicio 1 (1A o 1B), que según las Directrices 2026-27 es de «tangencias con eje/centro radical», cónicas u homología/afinidad. En 2026 ordinaria: eje radical de C_1 y C_2 y circunferencias tangentes en *T* de C_2. Las reservas de 2026 pidieron PPR, RRP y tangentes a C_1 y C_2 por un punto de C_1.	2,5	Entra
Aragón	Ejercicio 1A o 1B (geometría plana). Las tangencias caen en todas las convocatorias, pero resueltas con métodos básicos (figuras acotadas, bisectrices). La potencia no ha caído en 2025-2026.	2,75	Entra
Asturias	Ejercicio 1, opción B (se hacen 4 de los 5 ejercicios). En 2026 extraordinaria: circunferencias tangentes a la que pasa por *M*, *N* y *R* que pasan por *A* y *B* (PPC con los puntos dentro), con solución gráfica oficial por centro radical.	2,5	Entra

Comunidad	Cómo te lo piden	Puntos	Estado
Baleares	Pregunta 1, obligatoria, de nivel de Dibujo Técnico I en 2025-2026: la potencia no ha caído. El Decret 43/2025 la incluye: «Estudio del concepto de potencia e inversión y sus aplicaciones» (traducido del catalán).	3	Entra
Canarias	Ejercicio 1 (1a o 1b desde 2026): un croquis de enlaces a 1:1. En 2025 (ordinaria y extraordinaria), la solución gráfica oficial resuelve uno de los enlaces por centro radical; el mismo croquis incluye la recta tangente a una elipse.	2	Entra
Cantabria	Pregunta 1, obligatoria: potencia o cónicas, tangencias «aplicando las propiedades de los ejes y centros radicales». PPR del aspersor (2025 extraordinaria) y la letra de una tipografía tangente a C_1 y C_2 por M de C_2 (2026 ordinaria). En 2024, circunferencia con tangentes dadas desde tres puntos.	2,5	Entra
Castilla-La Mancha	Pregunta 1 (1a o 1b). Tangentes a R y a C con T en la recta (2025 extraordinaria, 3 puntos; los criterios admiten inversión). En 2026 extraordinaria (1b), tangentes a dos circunferencias por un punto T de una, el tercer caso de su lista (los criterios lo resuelven por reducción, sin potencia, como en el Tema 3; por potencia, es la sección «Tangencias con un punto de tangencia dado»). En 2024, eje radical de dos circunferencias, una dentro de otra.	2,5 (3 en 2025)	En parte: solo seis casos de tangencias por potencia (Directrices 2026/2027, «Aclaraciones»)
Castilla y León	Ejercicio 1 (A1 o A2). Los saberes incluyen «Potencia de un punto respecto a una circunferencia. Eje y centro radicales. Aplicaciones en tangencias», pero en 2025-2026 las tangencias han sido piezas con enlaces básicos: la potencia no ha caído.	2,5	Entra
Cataluña	Dibujo 1 (opción A o B). Su lista incluye «Tangencias, potencia, eje radical y centro radical». No ha caído en 2025-2026; en 2024 extraordinaria, la circunferencia más pequeña tangente a dos rectas por un punto (RRP).	3	Entra
C. Valenciana	Pregunta 1 (A o B). En 2025 extraordinaria: todas las circunferencias que pasan por A y B y son tangentes a la de mayor diámetro (PPC). La lista 2027 cita «tangencias básicas y mediante potencia e inversión».	2,5 (1,5 en 2025)	Entra
Extremadura	Bloque 1, a elegir. Arco de radio máximo por A y B tangente a la carretera R (PPR, 2025 extraordinaria) y arco por A y B tangente a C que da el recorte mayor de una chapa (PPC, 2026 extraordinaria).	2 (2,5 en 2027)	Entra
Galicia	Pregunta 2 (2.1 o 2.2). Centro radical de tres circunferencias (2025 ordinaria, con «eixes radicais» a 1,5 puntos, y modelo 2025 con solución gráfica). Las orientaciones 2027 incluyen potencia y tangencias.	2,25	Entra
La Rioja	Apartado A. Acequia de 2025 ordinaria: arco tangente a r_1 y r_2 que pasa por P_1 (RRP) y segundo arco tangente al primero. En 2026, el apartado A fue de cónicas.	2,5	Entra
Madrid	Pregunta 1 (1.1 o 1.2), casi siempre de inversión (Tema 5). La potencia no ha caído como ejercicio en 2025-2026: aparece como herramienta (intersección recta-parábola por centro radical en el modelo 2027) y en 2024 (eje radical, con fundamentos).	2,5	Entra
Murcia	Bloque I (uno de dos). PPR dentro del croquis de 2026 ordinaria, que el acta de 17-9-2026 llama «único ejercicio de tangencias de procedimiento indirecto», y PPC en 2026 extraordinaria (dos soluciones, 4 puntos cada una sobre 10). Hay solución gráfica oficial.	10 (30 % de la nota)	Entra

Comunidad	Cómo te lo piden	Puntos	Estado
Navarra	Ejercicio 1 (tangencias o cónica). Los criterios dicen «La determinación del punto de tangencia donde se aplica el concepto de potencia. 1 punto», pero en 2025-2026 han caído enlaces con punto *T* dado. En 2024, PPR y RRP.	2 (3 en 2025)	Entra
País Vasco	Bloque A: el contorno de una pieza real. En 2025 (ordinaria y extraordinaria), un arco de radio desconocido tangente en *T*, hallado por potencia, dentro de la pieza.	3	Entra

«Puntos» son los del ejercicio en que cae. Que algo no haya caído en 2025-2026 no significa que no vaya a caer: la PAU nueva solo lleva dos convocatorias.

11 Ejercicio resuelto: eje radical y circunferencias tangentes en un punto dado (Andalucía 2026)

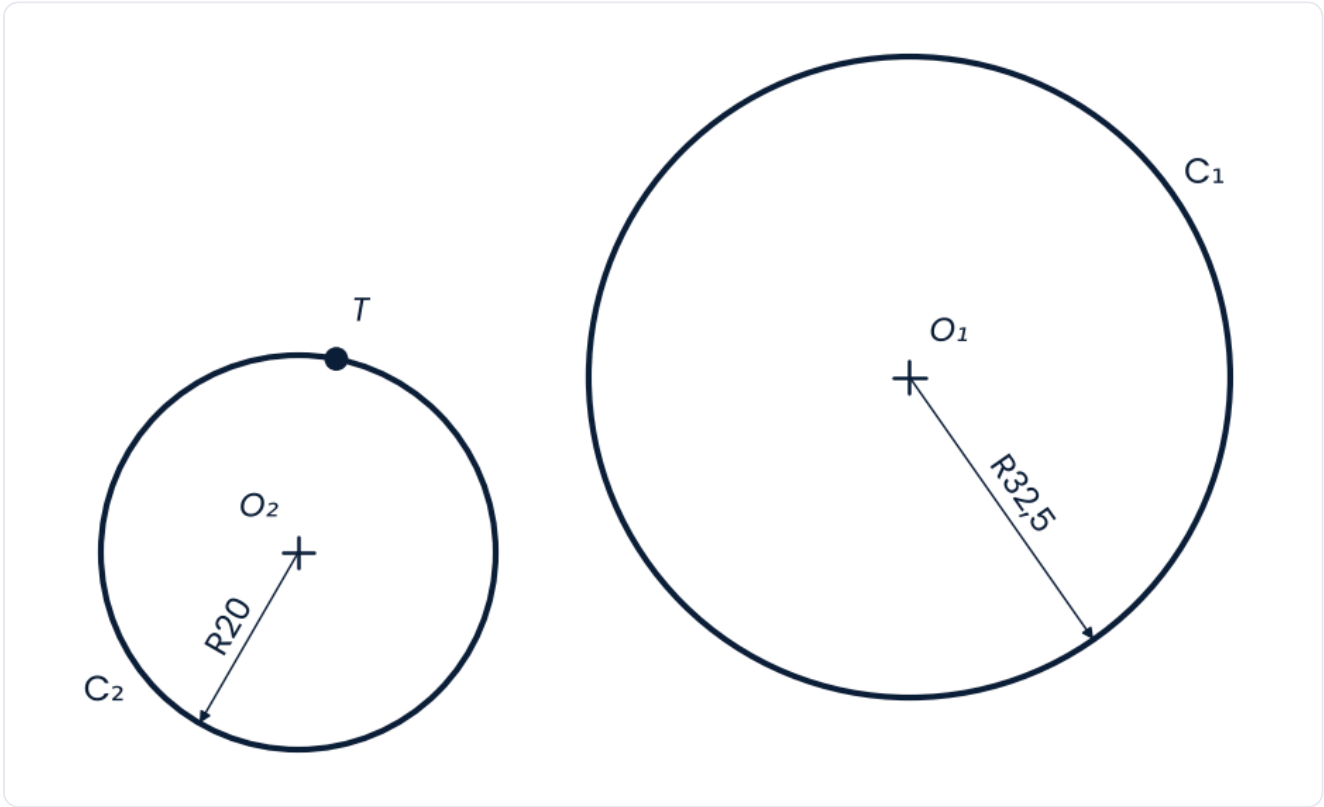
PAU ANDALUCÍA, CEUTA Y MELILLA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 1A, TRAZADOS GEOMÉTRICOS (A ELEGIR ENTRE 1A Y 1B; 2,5 PUNTOS)

Dadas las circunferencias C1 y C2 de centros O1 y O2, respectivamente, así como el punto T perteneciente a C2, se pide: 1. Determinar el eje radical de C1 y C2. 2. Trazar las circunferencias tangentes a C1 y a C2 en T, determinando geométricamente sus centros y puntos de tangencia.

Datos (redibujados del examen; medidos sobre el PDF oficial, lámina A4 a escala 1:1): **C2** de centro O_2 y radio **20 mm**. **C1** de centro O_1 y radio **32,5 mm**; O_1 está 61,9 mm a la derecha y 17,8 mm por encima de O_2 ($O_1O_2 = 64{,}4$ mm): las circunferencias son **exteriores**. **T** está en C2, 3,9 mm a la derecha y 19,6 mm por encima de O_2 (casi en lo alto de C2).

1) Determinar el eje radical de C1 y C2. (0,50 puntos)

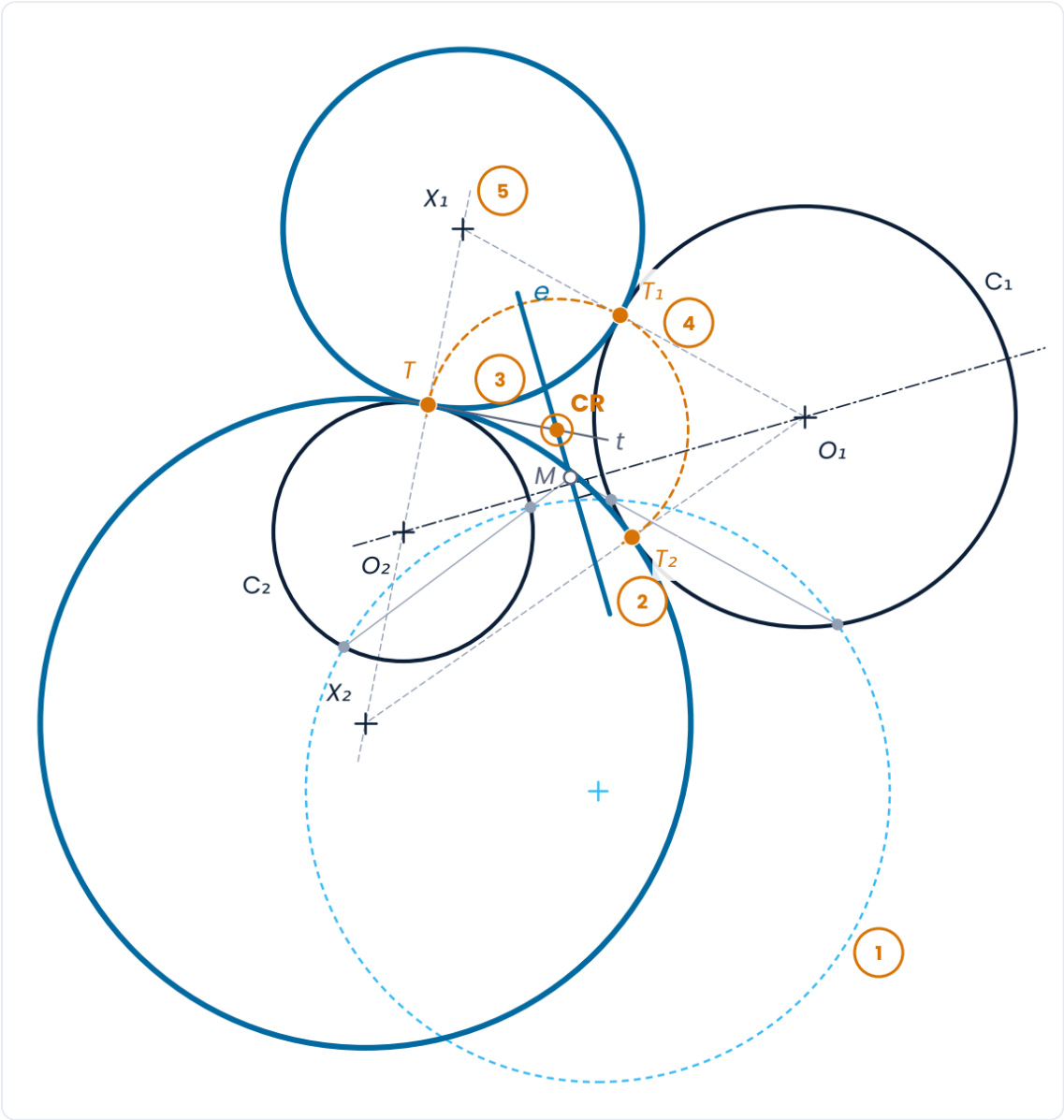
2) Trazar las circunferencias tangentes a C1 y a C2 en T, determinando geométricamente sus centros y puntos de tangencia. (2,00 puntos)



Datos del ejercicio, redibujados a escala con las medidas tomadas en el PDF oficial.

Apartado 1)

1. **Idea.** C1 y C2 no se cortan: el eje radical no se puede trazar uniendo puntos comunes. Usamos una **circunferencia auxiliar** que corte a las dos.
2. **Paso 1 ①:** traza una circunferencia auxiliar (en la figura, de radio 45 mm, con el centro por debajo de la línea de centros) que corte a C1 y a C2 en dos puntos cada una.
3. **Paso 2 ②:** une los dos cortes con C2 y los dos cortes con C1 y prolonga esas cuerdas: se cortan en *M*. Por *M* traza la **perpendicular a O_1O_2**: es el eje radical *e*. Comprobación: corta a la línea de centros a 27,1 mm de O_2, como da $x = (d^2 + r_2^2 - r_1^2)/(2d) = (64{,}4^2 + 20^2 - 32{,}5^2)/(2 \cdot 64{,}4) \approx 27{,}1$ mm. Está más cerca del centro de C2, la pequeña (27,1 mm frente a 37,3 mm de O_1), pero en el hueco queda a 7,1 mm del borde de C2 y a 4,8 mm del de C1.



Solución. Los pasos ①–⑤ son los del texto. En azul, el eje radical *e* y las dos soluciones (centros X_1 y X_2); en ámbar, el centro radical *CR*, el arco de radio *CR T* y los puntos de tangencia.

SOLUCIÓN Eje radical perpendicular a O_1O_2 a **27,1 mm de O_2** (37,3 mm de O_1).

Apartado 2)

1. **Idea.** Toda solución es tangente a C2 en *T*, así que la **tangente a C2 en *T*** es su eje radical con C2. Corta al eje *e* en el **centro radical** *CR* de C1, C2 y la solución: desde *CR*, las tangentes a las tres miden lo mismo.

2. **Paso 3 ③:** traza la tangente t a C2 en T (perpendicular a $O_2\vec{T}$) hasta cortar a e: CR. Sale $CR\,T$ = 20,2 mm.
3. **Paso 4 ④:** con centro en CR y radio $CR\,T$, traza un arco que corte a C1: los puntos de tangencia $\mathbf{T_1}$ y $\mathbf{T_2}$. Son los puntos donde las tangentes desde CR tocan a C1.
4. **Paso 5 ⑤:** el centro de cada solución está en la recta $O_2\,T$ (tangencia en $\vec{T}$) y en la recta O_1T_1 (o O_1T_2). Sus cortes son $\mathbf{X_1}$ y $\mathbf{X_2}$. Dibuja las dos circunferencias con radios $X_1\,T$ y $X_2\,T$.
5. **Comprobación.** X_1 está a 47,7 mm de O_2 (= 20 + 27,7) y a 60,2 mm de O_1 (= 32,5 + 27,7): toca a las dos por fuera. X_2 está a 30,1 mm de O_2 (= 50,1 − 20: envuelve a C2) y a 82,6 mm de O_1 (= 32,5 + 50,1: toca a C1 por fuera).

SOLUCIÓN Dos soluciones: **radio 27,7 mm** (centro X_1 en la prolongación de $O_2\,T$, tangente exterior a C1 y C2) y **radio 50,1 mm** (centro X_2 al otro lado de O_2, envuelve a C2 y es tangente exterior a C1). Andalucía no publica solución gráfica: comprueba que X, T_1 y O_1 están alineados.

Lo que puntúa. Reparto impreso en el enunciado: **apartado 1, 0,50 puntos**; **apartado 2, 2,00 puntos**. Los criterios específicos de Andalucía 2026 añaden que se valora la «Resolución correcta del ejercicio por métodos idóneos y correcta aplicación de las normas. Hasta 2,00 puntos», el «Trazado correcto de puntos, ejes y demás elementos necesarios. Hasta 0,25 puntos» y la «Presentación y trazado (si se tiene al menos el 70% de la solución). Hasta 0,25 puntos». Y las instrucciones del examen (apartado g) piden «dejar, siempre, constancia gráfica de las construcciones auxiliares».

Error típico que te quita puntos. Trazar el eje radical por el punto medio entre las circunferencias, «a ojo», o como mediatriz de O_1O_2: solo vale si los radios son iguales. Y dar una sola solución: con el arco de centro CR salen **dos** puntos de tangencia en C1 y, por tanto, dos circunferencias.

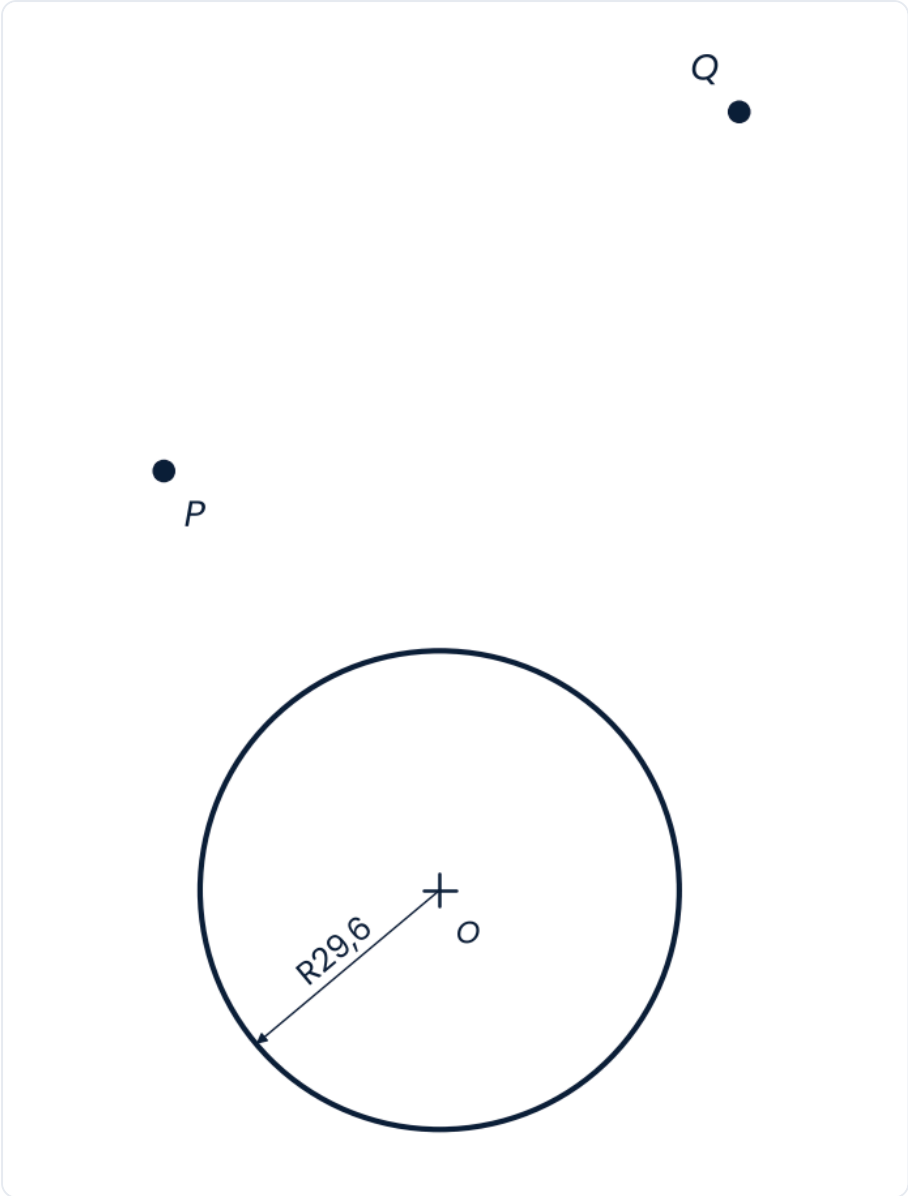
12 Ejercicio resuelto: circunferencias por dos puntos tangentes a otra (Murcia 2026)

PAU REGIÓN DE MURCIA 2026 · CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA (JULIO) · BLOQUE I, EJERCICIO 1 (A ELEGIR ENTRE LOS EJERCICIOS 1 Y 2; SE PUNTÚA SOBRE 10 Y EL BLOQUE PESA EL 30 %)

Determinar las circunferencias tangentes a la circunferencia dada con centro en "O" y que pasen por los puntos exteriores "P" y "Q". Se deben resaltar los puntos de tangencias entre las circunferencias solución y la circunferencia dada mediante un pequeño trazo.

Datos (redibujados del examen; medidos sobre el PDF oficial, lámina A4 a escala 1:1, con origen en O y el eje y hacia arriba): circunferencia de centro O y radio **29,6 mm**. **P** en (−34,1; 51,8) y **Q** en (37,0; 96,2): los dos por encima de la circunferencia, Q más alto y a la derecha ($PQ = 83{,}8$ mm).

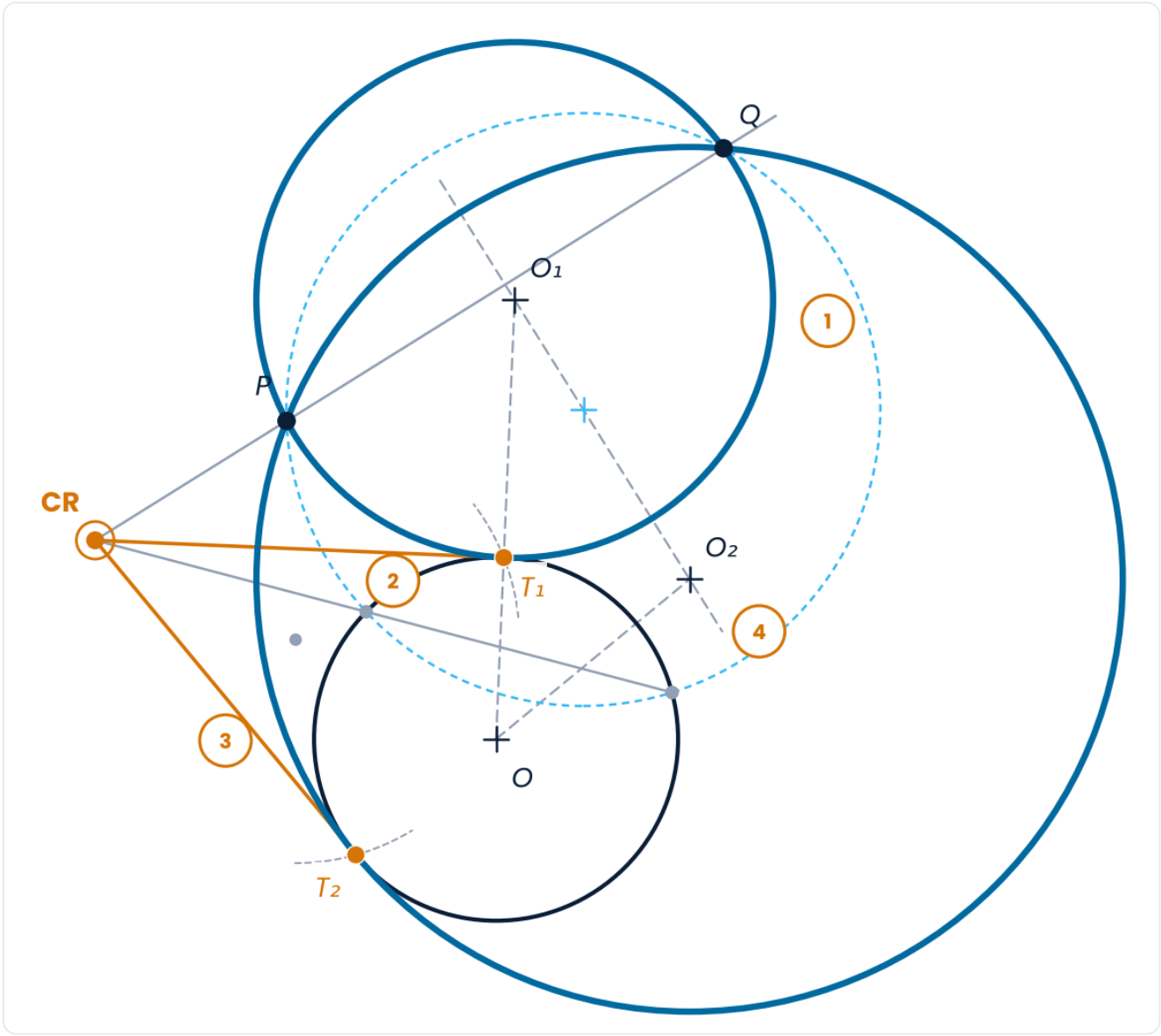
a) Determinar las circunferencias tangentes a la circunferencia de centro O que pasan por P y Q, resaltando los puntos de tangencia. (10 puntos)



Datos del ejercicio, redibujados a escala con las medidas tomadas en el PDF oficial.

Apartado a)

1. **Idea.** Es un **PPC**. Las soluciones pasan por P y Q: su centro está en la **mediatriz de PQ** y su eje radical común es la recta PQ. Buscamos el **centro radical** de la circunferencia dada y de las que pasan por P y Q.
2. **Paso 1 ①:** traza la mediatriz de PQ y una circunferencia auxiliar con centro en ella que pase por P y Q y **corte** a la circunferencia dada (en la figura, con el centro 24 mm por debajo del punto medio de PQ).
3. **Paso 2 ②:** une los dos puntos de corte de la auxiliar con la circunferencia dada y prolonga hasta cortar a la recta PQ: es el centro radical CR, en (-65,2; 32,4).
4. **Paso 3 ③:** traza las tangentes desde CR a la circunferencia dada con el arco capaz de 90° (circunferencia de diámetro CR–O): los puntos de tangencia son $\mathbf{T_1}$ y $\mathbf{T_2}$. Las dos tangentes miden 66,5 mm, que es $\sqrt{CP \cdot CQ}$.
5. **Paso 4 ④:** une O con T_1 y con T_2 y prolonga hasta la mediatriz de PQ: centros $\mathbf{O_1}$ y $\mathbf{O_2}$. Dibuja las dos circunferencias y marca T_1 y T_2 con un pequeño trazo, como pide el enunciado.



Solución. Los pasos ①-④ son los del texto. La circunferencia auxiliar es la discontinua azul claro; las dos soluciones, en azul.

SOLUCIÓN Dos soluciones: **radio 42,0 mm**, centro O_1 (3,0; 71,5), tangente **exterior** en T_1 (1,3; 29,6); y **radio 70,4 mm**, centro O_2 (31,5; 26,0), que **envuelve** a la circunferencia dada y la toca en T_2 (−22,8; −18,9). **Coincide con la solución gráfica oficial** (radios 42,0 y 70,4 mm y los mismos centros, medidos en el PDF de los criterios).

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Murcia (sobre 10): «Cada una de las circunferencias tangentes se valorará con 4 puntos» (**8**) y «Designaciones y señalización puntos tangencias» (**2**). En la «Correspondencia con el programa oficial», el ejercicio se asigna al saber «Potencia de un punto respecto a una circunferencia. Eje radical y centro radical. Aplicaciones en tangencias».

Error típico que te quita puntos. Llevar sobre la circunferencia dada el arco de centro *CR* y radio *CP* (o *CQ*): la distancia buena es la **tangente**, $\sqrt{CP \cdot CQ}$, no *CP*. Otro error típico es elegir una auxiliar que no corta a la circunferencia dada, o que la corta casi tangente: el punto *CR* sale impreciso.

13 Ejercicio resuelto: el aspersor, circunferencias por dos puntos tangentes a una recta (Cantabria 2025)

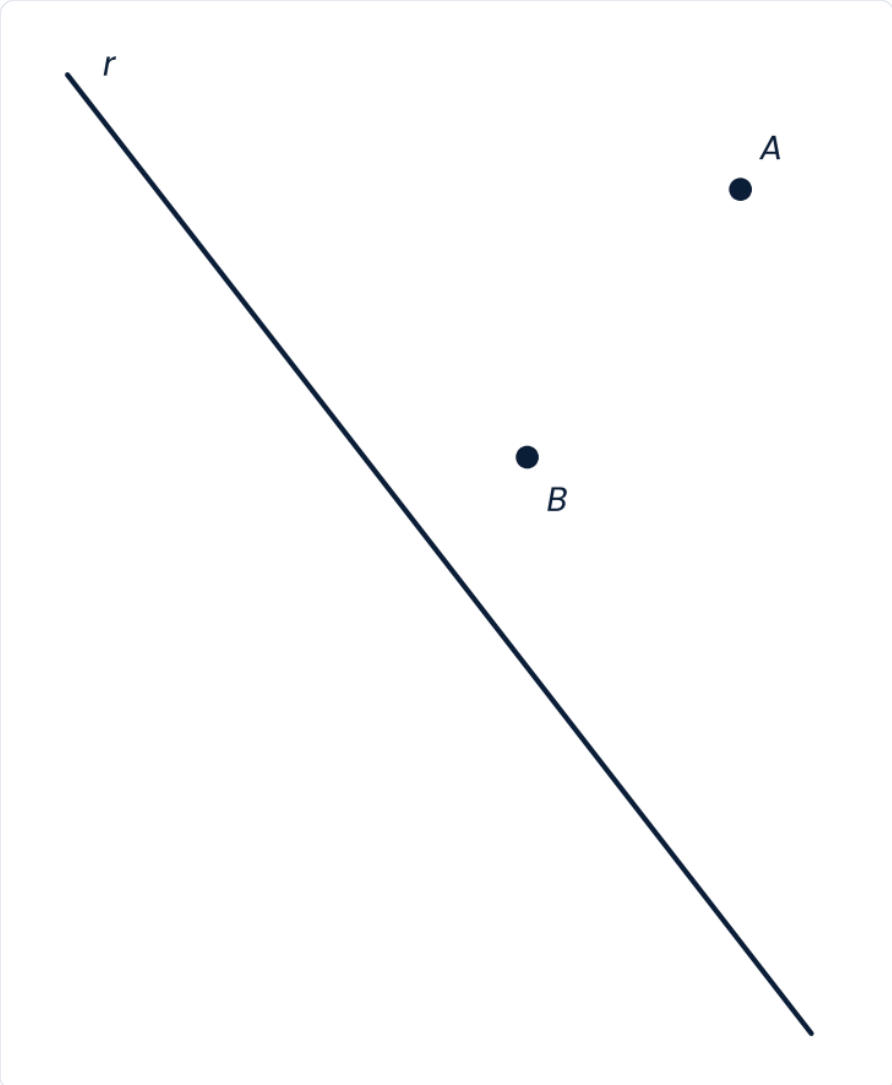
PAU CANTABRIA 2025 · CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA (JULIO) · APARTADO 1, FUNDAMENTOS GEOMÉTRICOS, PREGUNTA 1 (OBLIGATORIA; 2,5 PUNTOS)

Se necesita estudiar la ubicación de un aspersor de riego de tal modo que alcance la posición de dos árboles (A y B) pero que no sobrepase la ubicación de un muro de piedra (r). Por lo tanto, dados los puntos A y B, y la recta r. SE PIDE: 1. Dibujar todas las circunferencias, señalando claramente sus centros, que, pasando por los puntos A y B, sean tangentes a la recta r (2p). 2. Resaltar todos los puntos de tangencia (0.5p).

Datos (redibujados del examen; medidos sobre el PDF oficial, lámina A4 a escala 1:1): la recta **r** baja hacia la derecha formando **52,2°** con la horizontal. **A** y **B** están al mismo lado de *r*: *B* a **14,6 mm** de *r* y *A* a **52,3 mm**, más arriba y a la derecha ($AB = 38{,}8$ mm). La recta *AB* corta a *r* 15,0 mm más allá de *B*.

1) Dibujar todas las circunferencias que pasan por A y B y son tangentes a r, señalando sus centros. (2 puntos)

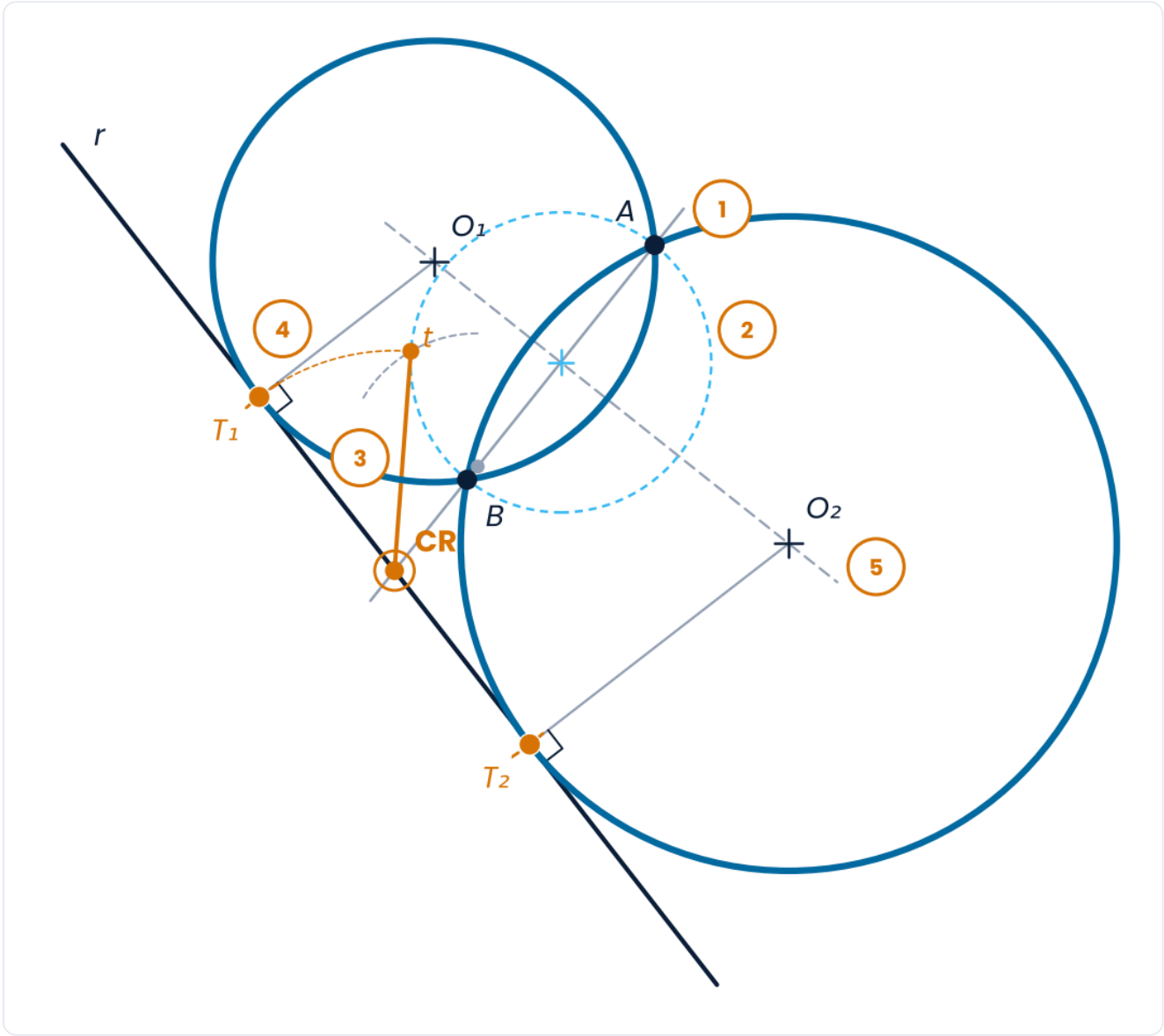
2) Resaltar todos los puntos de tangencia. (0,5 puntos)



Datos del ejercicio, redibujados a escala con las medidas tomadas en el PDF oficial.

Apartado 1)

1. **Idea.** Es un **PPR**: el aspersor riega un círculo que llega a los dos árboles y toca el muro sin pasarlo. Todas las circunferencias por A y B tienen como eje radical la recta AB; donde corta al muro está el **centro radical**, y desde él la tangente mide $\sqrt{CA \cdot CB}$.
2. **Paso 1 ①:** une A y B y prolonga hasta cortar a r: centro radical CR. CB = 15,0 mm y CA = 53,8 mm.
3. **Paso 2 ②:** dibuja la circunferencia auxiliar de **diámetro AB** (centro en el punto medio de AB, radio 19,4 mm).
4. **Paso 3 ③:** traza la tangente desde CR a esa auxiliar con el arco capaz de 90°: toca en t, y $Ct = \sqrt{53{,}8 \cdot 15{,}0} = 28{,}4$ mm.
5. **Paso 4 ④:** con centro en CR y radio Ct, corta a r a los dos lados: **T_1** y **T_2**.
6. **Paso 5 ⑤:** por T_1 y T_2, perpendiculares a r, donde cortan a la **mediatriz de AB** están los centros **O_1** y **O_2**. Dibuja las dos circunferencias con radios O_1T_1 y O_2T_2.



Solución. Los pasos ①-⑤ son los del texto. En azul, las dos circunferencias de riego posibles; en ámbar, CR, la tangente Ct y los puntos de tangencia con el muro.

SOLUCIÓN Dos circunferencias: **radio 28,5 mm** (centro O_1, tangente en T_1) y **radio 42,3 mm** (centro O_2, tangente en T_2). T_1 y T_2 están a 28,4 mm de CR, uno a cada lado. Cantabria no publica solución gráfica: comprueba que $O_1A = O_1B = O_1T_1$.

Apartado 2)

1. **Paso 6:** los puntos de tangencia son T_1 y T_2, sobre el muro. Resáltalos (un punto marcado y su nombre) y deja visible la perpendicular desde cada centro: es la prueba de que son de tangencia.

SOLUCIÓN T_1 y T_2 sobre r, a 28,4 mm de CR a cada lado.

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Cantabria (2,5 puntos): apartado 1 (2 p): «Localizar el centro radical (+0,5)», «Construcción arco C1 (1 p.)», «Construcción arco C2 (1 p.)», con penalizaciones si «La curva no llega a conectar del todo por leve imprecisión en las construcciones auxiliares (-0.25 p.)» y por «No señalar el centro (-0.25 p.)»; apartado 2 (0,5 p): «Puntos de tangencia correctos, si las construcciones de los arcos son correctas. (0.25 p cada uno)». Las indicaciones generales avisan: «No se borrarán las construcciones auxiliares» y «No se admitirán soluciones obtenidas por tanteo».

Error típico que te quita puntos. Dibujar solo la circunferencia pequeña. El enunciado pide «todas las circunferencias» y cada una vale 1 punto: con el arco de centro CR salen dos puntos de tangencia, uno a cada lado. También es un error medir CA y CB con la regla y calcular la raíz: Cantabria no admite el tanteo.

COMPARATIVA FINAL

Qué método usar y cuándo

Datos	Dónde está el centro radical	Recta de los centros	Soluciones
Dos puntos y una recta (PPR)	Corte de la recta AB con r	Mediatriz de AB (y perpendicular a r por T)	2 (1 si $AB \parallel r$)
Dos puntos y una circunferencia (PPC)	Corte de AB con la cuerda común de C y una auxiliar por A y B	Mediatriz de AB (y recta OT)	2
Dos rectas y un punto (RRP)	Se reduce a PPR con P', simétrico de P respecto a la bisectriz	Bisectriz	2
Dos circunferencias, T en una (CCT)	Corte de la tangente en T con el eje radical de las dos	Recta O_2T	2
Recta y circunferencia, T en la circunferencia	Corte de la tangente en T con la recta	Recta OT	2
Recta y circunferencia, T en la recta	Corte de la recta con la cuerda común de C y una auxiliar tangente en T	Perpendicular a la recta por T	2
Dos circunferencias y un punto (CCP)	Se reduce a PPC con P' (centro y potencia de homotecia)	Mediatriz de PP'	Hasta 4
Tres circunferencias (centro radical, ortogonal)	Corte de dos ejes radicales	—	1 punto

Regla general: busca la **familia** de circunferencias a la que pertenecen las soluciones (las que pasan por dos puntos o las tangentes en un punto), corta su eje común con un eje radical de la circunferencia dada y, desde ese centro radical, lleva la tangente con el compás.

Errores que te quitan puntos

Lo que más se confunde en este tema, y cómo decirlo bien.

- ✗ Llevar con el compás $PA \cdot PB$ como si fuera una longitud, o la distancia PA en lugar de la tangente.
- ✓ Lo que se lleva es la **tangente** $\sqrt{PA \cdot PB}$, construida como tangente a una circunferencia auxiliar que pase por A y B.

Apartado 1: Potencia de un punto respecto a una circunferencia

- ✗ Elegir una circunferencia auxiliar que no corta a una de las dadas, o que la corta casi tangente.
- ✓ La auxiliar tiene que cortar **claramente** a las dos. Si las cuerdas salen casi paralelas, cambia de auxiliar o usa una segunda.

Apartado 2: Eje radical de dos circunferencias

- ✗ Trazar los tres ejes «a ojo» y quedarse con el triangulito que forman.
- ✓ Los tres ejes se cortan en **un punto**. Construye dos con auxiliares y usa el tercero como comprobación.

Apartado 3: Centro radical de tres circunferencias y circunferencia ortogonal

- ✗ Dar una sola solución cuando el enunciado pide «todas las circunferencias».
- ✓ Desde *CR* hay **dos** tangentes (o dos puntos a la misma distancia): casi siempre hay dos soluciones, y cada una puntúa.

Apartado 4: Los problemas de Apolonio: el método del centro radical

- ✗ En el PPR, llevar *Ct* sobre *r* solo hacia un lado de *CR*.
- ✓ Lleva *Ct* a **los dos lados**: T_1 y T_2. Cada uno da un centro en la mediatriz de *AB*.

Apartado 5: Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta (PPR)

- ✗ En el PPC, unir el centro *O* con *CR* y tomar los cortes de esa recta con *C* como puntos de tangencia.
- ✓ Los puntos de tangencia son los de las **tangentes desde *CR*** a *C*: arco capaz de 90° sobre *CR*-*O*.

Apartado 6: Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia (PPC)

- ✗ Con *T* en la recta, buscar el centro radical cortando *r* con la tangente a *C* trazada desde *T*.
- ✓ Con *T* en la recta hace falta una **auxiliar tangente a *r* en *T*** que corte a *C*: su cuerda común con *C* corta a *r* en *CR*.

Apartado 7: Tangencias con un punto de tangencia dado, por potencia

- ✗ En el CCP, usar el centro de homotecia con puntos homólogos (*M* con su imagen) para hallar *P'*.
- ✓ La potencia de homotecia se calcula con puntos **antihomólogos**: *M* de una y el punto de la otra que **no** le corresponde.

Apartado 9: Circunferencias tangentes a dos circunferencias que pasan por un punto (CCP)

Conceptos clave

Potencia de un punto

Producto $PA \cdot PB$ de las distancias de un punto *P* a los dos cortes de cualquier recta que pase por él con una circunferencia. Vale $d^2 - r^2$, y si *P* es exterior, el cuadrado de la tangente.

Potencia negativa

La de un punto interior a la circunferencia ($d < r$): los dos cortes quedan a lados opuestos del punto. Es nula si el punto está sobre la circunferencia.

Longitud de la tangente

Distancia *PT* de un punto exterior al punto de tangencia. Es $\sqrt{\text{potencia}}$ y la misma para las dos tangentes desde *P*.

Media proporcional

Segmento $x = \sqrt{a \cdot b}$. Se construye como tangente desde un punto a una circunferencia que pase por los extremos de *a* y *b*, o con el teorema de la altura.

Eje radical

Lugar geométrico de los puntos con igual potencia respecto a dos circunferencias no concéntricas. Es una recta perpendicular a la línea de centros.

Cuerda común

Segmento que une los dos puntos de corte de dos circunferencias secantes. Su recta es el eje radical de las dos.

Circunferencia auxiliar

Circunferencia elegida libremente que corta a las dadas para obtener puntos del eje radical o el centro radical. Se dibuja en fino y no se borra.

Centro radical

Punto de igual potencia respecto a tres circunferencias: el corte de sus tres ejes radicales. Si los centros están alineados, es impropio (los ejes son paralelos).

Circunferencia ortogonal

La de centro en el centro radical y radio igual a la tangente común. Corta a las tres circunferencias en ángulo recto, justo en los puntos de tangencia desde *CR*.

Haz de circunferencias

Familia de circunferencias con el mismo eje radical dos a dos: las que pasan por dos puntos *A* y *B* (eje *AB*) o las tangentes a una recta en un punto *T* (eje, la recta).

Problema de Apolonio

Hallar las circunferencias que cumplen tres condiciones de paso (P) o tangencia a rectas (R) y circunferencias (C). Hay diez casos, de PPP a CCC.

Punto de tangencia dado

Dato que fija la recta de los centros (perpendicular por *T* o recta *OT*) y da un eje radical inmediato: la tangente en *T*.

Centro de homotecia

Punto de la línea de centros desde el que dos circunferencias son homotéticas: el exterior *H* y el interior *I*, con razón r_1/r_2 de sus distancias a los centros.

Puntos antihomólogos

Dos puntos de dos circunferencias, alineados con un centro de homotecia, que no se corresponden en la homotecia. Los puntos de tangencia de una circunferencia tangente a las dos lo son.

Potencia de homotecia

Producto constante de las distancias de un centro de homotecia a dos puntos antihomólogos. Reduce el caso CCP a PPC.

Dilatación

Sumar o restar el radio de una circunferencia dada a las demás condiciones para convertirla en un punto: así RRC, RCC y CCC se reducen a casos con punto.

MODO PAU

Nueve claves que valen puntos

Potencia

$PA \cdot PB = PT^2 = d^2 - r^2$, con cualquier secante. Desde un punto con **igual potencia**, las tangentes miden lo mismo.

Eje radical

Perpendicular a la línea de centros. Secantes: la cuerda común. Tangentes: la tangente común. Sin puntos comunes: **auxiliar** que corte a las dos.

Centro radical

Corte de **dos ejes**; el tercero, para comprobar. Con centros alineados, es **impropio** (los ejes son paralelos).

PPR

AB corta a *r* en *CR*; $CT = \sqrt{CA \cdot CB}$ con la tangente a la circunferencia de diámetro *AB*; **dos** puntos de tangencia.

PPC

Auxiliar por A y B que corte a *C*: cuerda común y recta *AB* dan *CR*; tangentes desde *CR* a *C* = **puntos de tangencia**.

Punto dado

La **tangente en *T*** ya es un eje radical. Corta con el otro eje: *CR*. Arco de radio *CR* *T* sobre la otra línea.

Centros

Mediatriz de *AB*, perpendicular por *T* o recta *OT*: **centro, punto de tangencia y centro, alineados**.

Marcar

Rotula *CR*, centros y puntos de tangencia: Cantabria, Asturias y Murcia los puntúan aparte. **No borres** las auxiliares.

Sin cálculo

Nada de medir y calcular raíces: «No se admitirán soluciones obtenidas por tanteo» (Cantabria). La media proporcional se **construye**.

Cómo te lo pueden preguntar

- **Circunferencias por dos puntos tangentes a una circunferencia (PPC)**, a veces con los puntos dentro o en contexto (una chapa): Murcia 2026 extraordinaria, Asturias 2026 extraordinaria, Extremadura 2026 extraordinaria y C. Valenciana 2025 extraordinaria. En total, la potencia cae en **16 de las 68 convocatorias** de 2025 y 2026, en 11 comunidades.
- **Tangencias con un punto de tangencia dado** resueltas por eje y centro radical: Andalucía 2026 ordinaria (tangentes a C_1 y C_2 en *T*), Cantabria 2026 ordinaria (la letra), Castilla-La Mancha 2025 extraordinaria (*T* en la recta) y los arcos «por potencia» de las piezas del País Vasco 2025.
- **Circunferencias por dos puntos tangentes a una recta (PPR)**: Cantabria 2025 (aspersor), Extremadura 2025 (carretera) y Murcia 2026 ordinaria (dentro de un croquis 1:1).
- **Eje radical y centro radical** como ejercicio propio: Galicia 2025 (centro radical de tres circunferencias); el eje radical como apartado en Andalucía 2026.

- **Dos rectas y un punto (RRP)**: la acequia de La Rioja 2025; antes, Navarra y Cataluña en 2024; y en una reserva de Andalucía 2026 (las reservas no cuentan en las 68 convocatorias).
- **Enlaces de un croquis** en los que la solución oficial obtiene un arco por centro radical: Canarias 2025 (ordinaria y extraordinaria).

No lo confundas

- **Potencia con tangente:** la potencia es PT^2 (un área, en mm²); la tangente es PT (una longitud). Con el compás llevas la tangente, no la potencia.
- **Eje radical con mediatriz:** el eje radical de dos circunferencias solo coincide con la mediatriz de los centros si los radios son iguales. Con radios distintos queda más cerca del **centro** de la pequeña (y, en el hueco entre las dos, algo más cerca del borde de la grande).
- **Centro radical con centro de homotecia:** el centro radical tiene igual potencia respecto a las circunferencias (corte de ejes radicales); el de homotecia está en la línea de centros y las transforma una en otra.
- **PPC con CCP:** en PPC te dan dos puntos y una circunferencia (auxiliar por los puntos); en CCP, un punto y dos circunferencias (primero hay que fabricar el segundo punto P' con la homotecia).
- **Punto de tangencia con punto de paso:** si la solución es tangente en T, su centro está en la normal por T y la tangente en T es un eje radical; si solo pasa por P, su centro está en una mediatriz.

Ponte a prueba

PAU Asturias 2026 (extraordinaria), Ejercicio 1, opción B (se hacen 4 de los 5 ejercicios; 2,5 puntos). Sea O la circunferencia que pasa por los puntos M, N y R, traza las circunferencias tangentes a O y que pasen por los puntos A y B. Indica claramente los centros y los puntos de tangencia. [Datos redibujados, medidos en el PDF oficial (A3, 1:1), con origen en N y el eje y hacia arriba: M (14,2; 36,5), R (62,0; 14,1), A (25,8; -1,7) y B (51,4; 6,8). La circunferencia O por M, N y R tiene el centro en (30,5; 9,2) y radio 31,8 mm: A y B quedan **dentro**.] PDF oficial

Solución: Primero, la circunferencia O: corte de las mediatrices de MN y NR. Después, un **PPC** con los puntos dentro: una auxiliar por A y B que corte a O; su cuerda común con O corta a la recta AB en el centro radical CR (99,6; 22,9), fuera de O. Las tangentes desde CR a O (miden 62,8 mm) dan los puntos de tangencia, y las rectas que los unen con el centro de O cortan a la mediatriz de AB en los centros. Salen dos circunferencias interiores, de **21,8 mm** (centro en (33,2; 18,8), tangente en (39,1; 39,8)) y **15,2 mm** (centro en (40,8; -4,0), tangente en (50,2; -15,9)). **Coincide con la solución gráfica oficial.** Criterio oficial: circunferencia O 0,50; centro radical 0,50; centros y puntos de tangencia 0,75; trazado de las circunferencias 0,75.

PAU Galicia 2025 (ordinaria), Pregunta 2, apartado 2.1 (a elegir entre 2.1 y 2.2; 2,25 puntos). Dadas las circunferencias de centro O1, O2 y O3, resuelva uno de los apartados siguientes: 2.1.- Trace el centro radical de las tres circunferencias. Radio de O2 =24mm, Radio de O3 = 37mm. [Datos redibujados, medidos en el PDF oficial (A3, 1:1), con origen en O_1 y el eje y hacia arriba: la circunferencia de O_1 está dibujada, con radio 64,8 mm (unos 65 mm); O_2 en (-57,7; 84,7) y O_3 en (70,5; 100,2). Las tres son exteriores entre sí.] PDF oficial

Solución: Dibuja primero las circunferencias de O_2 y O_3 con sus radios. Como no se cortan, cada eje radical sale con una **auxiliar** que corte a las dos y la perpendicular a la línea de centros por el punto M donde se cortan las cuerdas. El eje de O_1 y O_2 corta a O_1O_2 a 68,9 mm de O_1; el de O_1 y O_3, a 72,8 mm de O_1. Su corte es el **centro radical**, en (4,1; 86,2), casi en la vertical de O_1.

Comprobación: el eje de O_2 y O_3 (a 61,5 mm de O_2) pasa por el mismo punto, y las tangentes desde él a las tres miden 56,9 mm. Criterio oficial: trazados auxiliares 0,25; «Eixes radicais» (ejes radicales) 1,50; centro radical 0,50.

PAU Castilla-La Mancha 2025 (extraordinaria), Pregunta 1, ejercicio 1a (a elegir entre 1a y 1b; 3 puntos). Dibujar las circunferencias tangentes a la recta R y a la circunferencia C, conocido el punto de tangencia T en la recta. [Datos redibujados, medidos en el PDF oficial (A3, 1:1): circunferencia *C* de radio 13,3 mm, con el centro a 37,0 mm de la recta *R*. El pie de la perpendicular desde ese centro a *R* está a 20,0 mm de *T*.] PDF oficial

Solución: Los centros están en la **perpendicular a R por T**. Por potencia: una auxiliar tangente a *R* en *T* que corte a *C*; la cuerda común corta a *R* en el centro radical *CR*, a 39,7 mm de *T*, del mismo lado que el pie de la perpendicular desde el centro de *C*. El arco de centro *CR* y radio *CR T* corta a *C* en los dos puntos de tangencia, y las rectas que los unen con el centro de *C* cortan a la perpendicular en los centros. Salen **15,8 mm** (tangente exterior a *C*) y **33,6 mm** (envuelve a *C*). Comprobación: el centro de la pequeña dista del de *C* 15,8 + 13,3 = 29,1 mm; el de la grande, 33,6 − 13,3 = 20,3 mm. Criterio oficial: perpendicular a *R* por *T* 1,0 («Si se resuelve por inversión se puntuará 0,5 por cada recta perpendicular a R»); puntos de tangencia 1,0; centros 0,5; trazado preciso de las dos circunferencias 0,5.

PAU Extremadura 2026 (extraordinaria), Bloque 1, ejercicio 2, Tangencias (se eligen 3 de los 6 ejercicios del bloque; 2 puntos). El polígono que se muestra representa un trozo de chapa en el que está dibujada la circunferencia C dada. Se pide dibujar el arco de circunferencia que sea tangente a la circunferencia C y que pase por los puntos A y B, de tal forma que defina el recorte mayor de la chapa. Indica CLARAMENTE el punto de tangencia y el centro del arco solución. [Datos redibujados, medidos en el PDF oficial (A3, 1:1): *A* y *B* están en el borde superior de la chapa, a 35,8 mm uno de otro. La circunferencia *C*, de radio 22,8 mm, tiene el centro a 38,3 mm por debajo de ese borde, casi en la vertical de *A* (su pie está a 2,9 mm de *A*, hacia *B*).] PDF oficial

Solución: Es un **PPC**. La auxiliar por *A* y *B* que corte a *C* da, con su cuerda común, el centro radical *CR* sobre la recta del borde, a 31,7 mm de *A* por el lado contrario a *B*. Las tangentes desde *CR* a *C* dan dos puntos de tangencia, y las rectas que los unen con el centro de *C* cortan a la mediatriz de *AB* en dos centros: radios **17,9 mm** (arco tangente por fuera a *C*, entre el borde y *C*) y **38,5 mm** (arco que **envuelve** a *C*). El recorte mayor es el segundo: el arco va de *A* a *B* rodeando a *C* y la toca por la izquierda (por el lado contrario a *B*). Comprueba que ese arco cabe dentro de la chapa. Criterio oficial: «Planteamiento e interpretación correcta de los elementos» 0,75 y «Resolución del ejercicio» 1,25.

PAU La Rioja 2025 (ordinaria), Apartado A, pregunta 1 (pregunta competencial, sin optatividad; 2,5 puntos). Se desea reconstruir un tramo de acequia mediante dos arcos de circunferencia tangentes entre sí. El primer arco será tangente a las rectas r1 y r2 y pasará por el punto P1. Definir claramente los puntos de tangencia T1 (en la recta r1) y T2 (en la recta r2). El segundo arco, que será tangente al anterior, empezará en el punto de tangencia de la recta r2 y pasará por el punto P3. [Datos redibujados, medidos en el PDF oficial (A3, 1:1): r_1 y r_2 se cortan en *V* formando 120°; r_1 baja hacia la izquierda a 45° y r_2 baja hacia la derecha a 15°. P_1 está dentro del ángulo, a 35,6 mm de *V*, a 16,0 mm de r_1 y a 35,5 mm de r_2. P_3 está a 164,2 mm de *V* medidos a lo largo de r_2 y 46,8 mm por debajo de ella.] PDF oficial

Solución: El primer arco es un **RRP**: simétrico P_1' de P_1 respecto a la bisectriz; la recta P_1P_1' corta a r_1 en CR, a 59,5 mm de V; la tangente desde CR a la circunferencia de diámetro P_1P_1' mide 47,7 mm y se lleva sobre r_1 a los dos lados. Salen dos soluciones: **radio 185,7 mm** ($VT_1 = VT_2 = 107{,}2$ mm) y **radio 20,5 mm** ($VT_1 = VT_2 = 11{,}8$ mm). El segundo arco tiene el centro en la recta que une T_2 con el centro del primero (tangencia en T_2) y en la mediatriz de T_2P_3: con el primer arco grande sale de **58,2 mm**; con el pequeño, de 271,5 mm, con el centro fuera de la lámina. La Rioja no publica criterios ni solución de este ejercicio: dibuja la solución que cabe en el formato y explica que hay dos.

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (BOE-A-2022-5521): Dibujo Técnico I y II
2. C. Ayala Luna y A. M.ª de Benito Zamarrón, «Dibujo Técnico II», unidad 1 «Trazados en el plano. Potencia» (potencia, eje radical y centro radical), Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013
3. J. Montalvá-Colomer, «Fundamentos de geometría plana: proceso de trazado de tangencias por potencias», Universitat Politècnica de València (Polimedia, 2026)
4. UCLM: Directrices y orientaciones generales para la PAU, Dibujo Técnico II, curso 2026/2027 (los seis casos de tangencias por potencia)
5. Junta de Andalucía: Directrices y Orientaciones Generales PAU 2026-27, Dibujo Técnico II
6. Universidad de Cantabria: Dibujo Técnico II. Contenidos y estructura del ejercicio
7. PAU Andalucía 2026, ordinaria: examen de Dibujo Técnico II
8. PAU Andalucía 2026, ordinaria: criterios específicos de corrección
9. PAU Región de Murcia 2026, extraordinaria: examen, criterios y soluciones de Dibujo Técnico II
10. PAU Cantabria 2025, extraordinaria: examen de Dibujo Técnico II
11. PAU Cantabria 2025, extraordinaria: criterios de corrección
12. PAU Asturias 2026, extraordinaria: examen y solución de Dibujo Técnico II
13. PAU Galicia 2025, ordinaria: examen de Dibujo Técnico II
14. PAU Galicia 2025, ordinaria: criterios de Debuxo Técnico II
15. PAU Castilla-La Mancha 2025, extraordinaria: examen de Dibujo Técnico II
16. PAU Castilla-La Mancha 2025, extraordinaria: criterios de corrección de Dibujo Técnico II
17. PAU Extremadura 2026, extraordinaria: examen de Dibujo Técnico
18. PAU La Rioja 2025, ordinaria: examen de Dibujo Técnico II

Imágenes: figuras de elaboración propia de Farmeando PAU (Python y matplotlib).

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 22 de noviembre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.