Inversión

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en **farmeandopau.com** ›

Última revisión: 22 de noviembre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

La **inversión** de centro *O* y potencia *k* lleva cada punto *A* a *A′*, alineado con *O*, con $OA \cdot OA' = k$. Con *k* > 0 hay una **circunferencia de puntos dobles** de radio $\sqrt{k}$. Transforma rectas y circunferencias en rectas o circunferencias, **conserva ángulos y tangencias** y sirve para resolver tangencias. Se pregunta en **8 de las 68 convocatorias** de 2025 y 2026, solo en Madrid y Extremadura, que la ponen en todas; la C. Valenciana la incluye desde 2027.

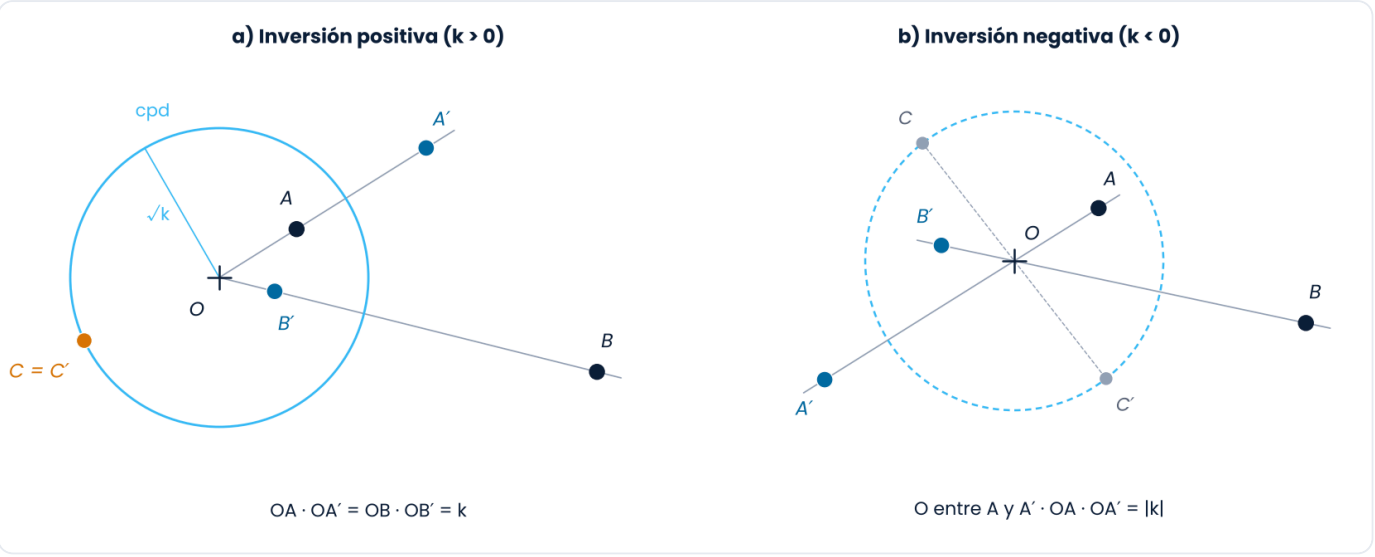
1 Qué es la inversión: centro, potencia y puntos dobles

La **inversión** es una transformación del plano que «da la vuelta» a la figura respecto de un punto: lo que está cerca del centro se va lejos y lo que está lejos se acerca. Se define con un **centro** *O* y un número *k*, la **potencia de inversión**. No está en el RD 243/2022, pero la recogen los currículos de Andalucía, Madrid, Extremadura, la C. Valenciana y Baleares, y es casi fija en la pregunta 1 de Madrid y en el bloque 1 de Extremadura.

- **Definición.** Dos puntos *A* y *A′* son **inversos** si están alineados con *O* y cumplen $OA \cdot OA' = k$. El centro *O* no tiene inverso (le «corresponde» el infinito), y cada punto distinto de *O* tiene uno solo.
- **Inversión positiva (k > 0).** *A* y *A′* están **al mismo lado** de *O*. Si *A* se acerca a *O*, *A′* se aleja, porque el producto es fijo. Es la que piden casi siempre: «inversión positiva» (Madrid 2025) o con «un punto doble» (Extremadura).
- **Inversión negativa (k < 0).** *A* y *A′* quedan **a distinto lado** de *O*, y $OA \cdot OA' = |k|$. Equivale a una inversión positiva de potencia |*k*| seguida de una simetría central de centro *O*: por eso no tiene puntos dobles.
- **Puntos dobles.** Un punto es doble si coincide con su inverso: $OA^2 = k$, es decir, $OA = \sqrt{k}$. Solo existen si *k* > 0 y forman la **circunferencia de puntos dobles** (cpd, también llamada circunferencia de inversión), de centro *O* y radio $\sqrt{k}$.
- **Dentro y fuera.** En la inversión positiva, los puntos **interiores** a la cpd se transforman en **exteriores** y al revés: si $OA < \sqrt{k}$, entonces $OA' = k/OA > \sqrt{k}$.
- **Es involutiva.** Si *A′* es el inverso de *A*, *A* es el inverso de *A′*. Por eso se habla de **pares de puntos inversos** y da igual cuál de los dos te den.
- **Cómo te la dan en el examen.** De tres formas equivalentes: el centro y un **punto doble** (Extremadura 2024 extraordinaria, con el punto rotulado «A=A'»; 2025 y 2026 extraordinarias: «el punto A es un punto doble»; 2026 ordinaria: «C es un punto doble»), el centro y la **cpd dibujada** (Extremadura 2025 ordinaria y modelo 2026) o el centro y un **par de inversos** *A*–*A′* (Extremadura 2024 ordinaria). En Madrid a veces tienes que deducir la inversión tú: «la inversión que transforma la circunferencia c en la c′».

La fórmula que lo resume todo

$OA \cdot OA' = k$, con A y A' alineados con O. Si te dan un punto doble C, ya tienes la potencia: $k = OC^2$. Si te dan un par A–A', $k = OA \cdot OA'$. Pero en el examen **no se calcula: se construye** (Extremadura prohíbe la calculadora).



Positiva y negativa. a) Con $k > 0$, A y A' están al mismo lado de O; el interior de la circunferencia de puntos dobles (cpd, radio $\sqrt{k}$) pasa al exterior, y C, sobre ella, es doble. b) Con $k < 0$, O queda entre cada punto y su inverso; los puntos de la circunferencia de radio $\sqrt{|k|}$ van al punto diametralmente opuesto.

2 El inverso de un punto: las dos construcciones que caen

Es la mitad de cualquier ejercicio de inversión y casi siempre el ejercicio entero en Extremadura, que lo ha puesto en todas las convocatorias de 2024 a 2026: «determina los puntos inversos de los dados» (en 2024 ordinaria, además, el inverso de un segmento). Hay dos construcciones, según tengas la circunferencia de puntos dobles o solo un par de inversos.

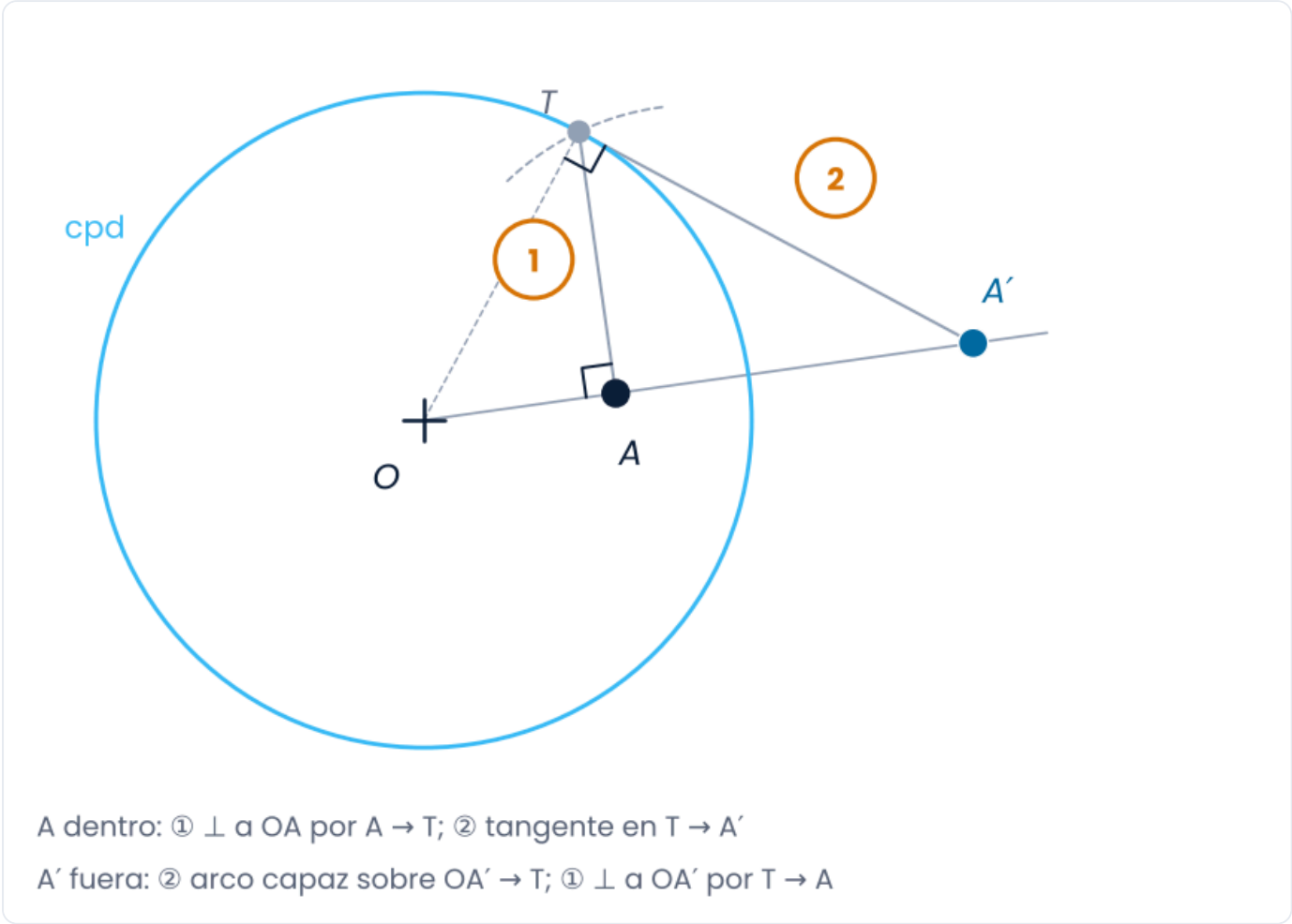
- **Con la cpd, punto interior *A*.** Traza por A la perpendicular a OA: corta a la cpd en T. La tangente a la cpd en T (perpendicular a OT) corta a la recta OA en A'. Funciona por el **teorema del cateto**: en el triángulo rectángulo OTA', $OT^2 = OA \cdot OA'$, y $OT^2 = k$.
- **Con la cpd, punto exterior *B*.** Es la misma figura leída al revés. Traza las tangentes desde B a la cpd con el **arco capaz de 90°** sobre OB (circunferencia de diámetro OB): da T. La perpendicular desde T a OB (o la cuerda que une los dos puntos de tangencia) corta a OB en B'.
- **Punto de la cpd.** Es doble: $C = C'$. Escríbelo así en el dibujo; Extremadura lo pide («determina los puntos inversos de los dados (A, B, C y D)»).
- **Si te dan un punto doble en vez de la cpd,** el primer paso es dibujarla: circunferencia de centro O que pasa por ese punto.
- **Con un par *A*–*A'* y sin cpd.** Traza la circunferencia que pasa por A, A' y B (centro en el corte de las mediatrices de AA' y de AB). Corta a la recta OB en B'. Funciona por **potencia**: la potencia de O respecto de esa circunferencia vale $OA \cdot OA'$ y también $OB \cdot OB'$, luego las dos son k (lo ves en el Tema 4).
- **Si *B* está alineado con *O*, *A* y *A'*,** la circunferencia por A, A' y B no existe. Usa un punto auxiliar X fuera de esa recta: halla X' y después usa el par X–X'. O construye la cpd: su radio es la media proporcional $\sqrt{OA \cdot OA'}$, que sale con el teorema de la altura o del cateto (Tema 2).
- **Inversión negativa.** Halla el inverso como si fuera positiva de potencia $|k|$ y lleva el resultado al otro lado de O (simétrico respecto de O).

Paso 1: Identifica la inversión: centro O y cpd (dibújala si te dan un punto doble) o un par A–A'.

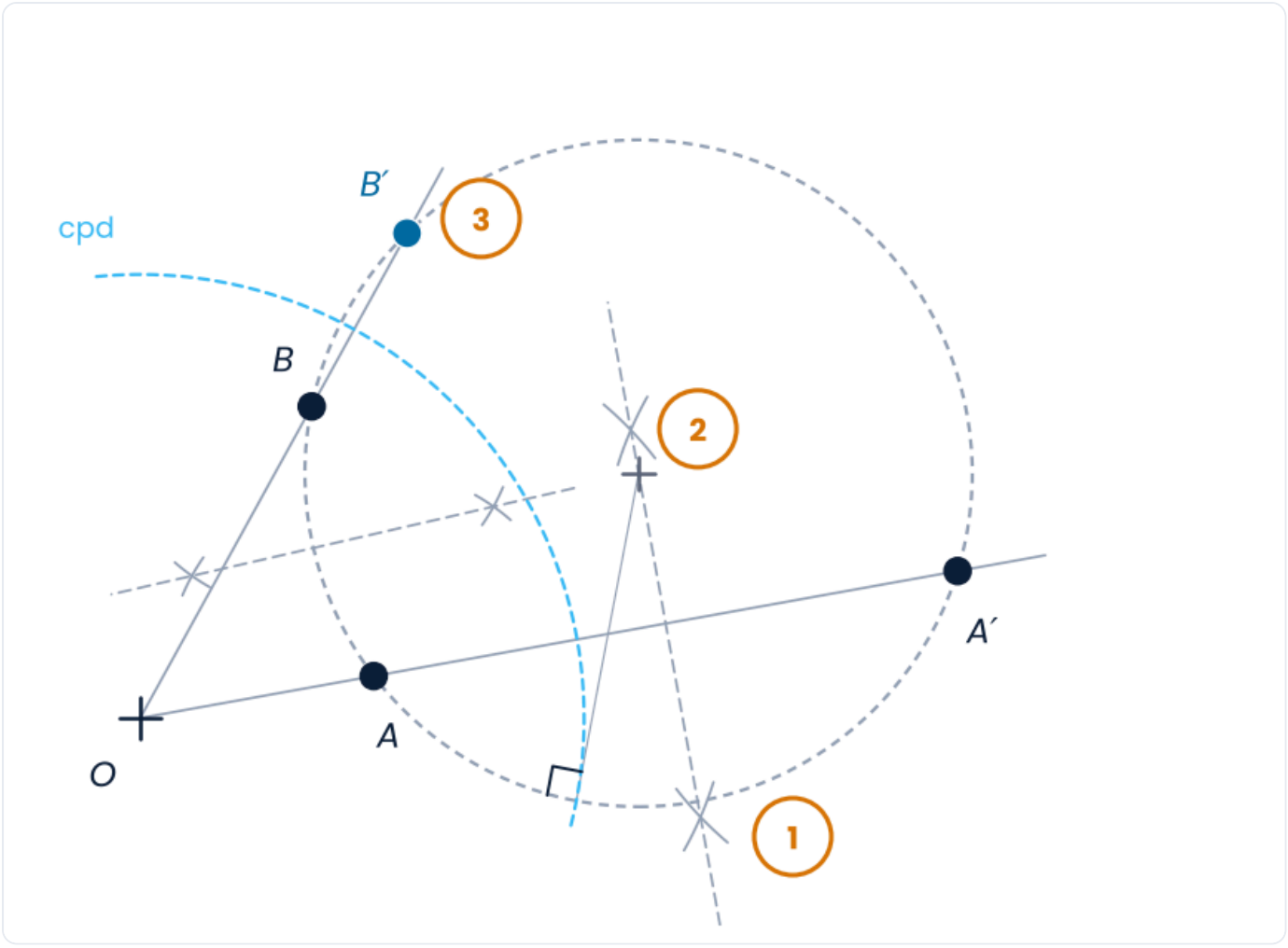
Paso 2: Traza siempre la recta O–punto y prolóngala: el inverso está en ella (al mismo lado si $k > 0$).

Paso 3: Punto interior: perpendicular por el punto y tangente. Punto exterior: arco capaz de 90° y perpendicular desde T. Punto de la cpd: es doble.

Paso 4: Nombra cada inverso (A', B'…) y deja todas las construcciones en línea fina.



Con la circunferencia de puntos dobles. ① Perpendicular a OA por A: da T en la cpd. ② Tangente en T: corta a OA en A'. Para un punto exterior se recorre al revés: arco capaz de 90° sobre OA' (discontinuo) y perpendicular desde T.



Con un par de inversos *A*–*A*′. ① Mediatrices de *AA*′ y de *AB*. ② Su corte es el centro de la circunferencia por *A*, *A*′ y *B*. ③ Esa circunferencia corta a *OB* en *B*′. Es ortogonal a la cpd (ángulo recto marcado): es una circunferencia doble.

3 Propiedades que usarás siempre

Las construcciones de figuras inversas y de tangencias salen de seis propiedades. Aprende cuáles son los **elementos dobles**, porque son los que se transforman en sí mismos y te ahorran trabajo.

- **Por qué una circunferencia por un par de inversos es doble:** la potencia de *O* respecto de ella es $OA \cdot OA' = k$. Y si la potencia de *O* vale *k*, cada recta por *O* la corta en dos puntos cuyo producto de distancias es *k*: son inversos entre sí. Por eso esa circunferencia es **ortogonal** a la cpd (las tangentes desde *O* miden $\sqrt{k}$).
- **Una circunferencia tangente a *OA* en un punto doble *A* es doble.** La potencia de *O* respecto de ella es el cuadrado de la tangente, $OA^2 = k$. Es la clave de Madrid 2025 extraordinaria y de la reserva de 2026: los arcos tangentes a *OA* en *A* se invierten en otro arco de la misma circunferencia.
- **Una recta por *O* es doble,** pero sus puntos no: cada uno va a otro punto de la misma recta. Una recta que no pasa por *O* nunca es doble.
- **El ángulo se conserva en magnitud.** Por eso, si en la figura dada dos lados forman 90°, en la inversa los arcos correspondientes también forman 90° en el vértice inverso. Úsalo para comprobar tu dibujo.

Propiedad	Qué dice	Para qué la usas
Elementos dobles	Los puntos de la cpd; las rectas que pasan por O (como conjunto: sus puntos cambian de sitio dentro de la recta); las circunferencias **ortogonales** a la cpd	Si una línea de la figura es doble, su inversa está sobre ella misma (Madrid 2025 extraordinaria)
Pares concíclicos	Si A–A' y B–B' son pares de inversos no alineados con O, los cuatro están en una circunferencia, y esa circunferencia es doble	Hallar inversos con un par dado
Triángulos semejantes	Los triángulos OAB y $OB'A'$ son semejantes: $A'B' = \lvert k\rvert \cdot AB/(OA \cdot OB)$	Comprobar medidas
Conserva los ángulos	Dos curvas que se cortan formando un ángulo se invierten en dos curvas que se cortan formando el mismo ángulo (es una transformación **conforme**)	Un ángulo recto sigue siendo recto; dos líneas tangentes siguen siendo tangentes
Conserva las tangencias	Si dos líneas son tangentes en T, sus inversas son tangentes en T' (si T no es O; si son tangentes en O, se convierten en dos rectas paralelas)	Tangencias por inversión (Madrid 2025 ordinaria y 2026 extraordinaria)
No conserva distancias ni centros	El inverso del centro de una circunferencia **no** es el centro de su inversa	Evitar el error más repetido

Las demostraciones están en A. Reventós Tarrida, «Geometría inversiva» (Universitat Autònoma de Barcelona), que resume la clave así: «Las inversiones conservan los ángulos».

Las distancias no se conservan

La inversión **no** es una semejanza: un segmento se convierte en un arco y una circunferencia pequeña puede pasar a ser enorme. Lo único que se mantiene son los **ángulos** y las **tangencias**.

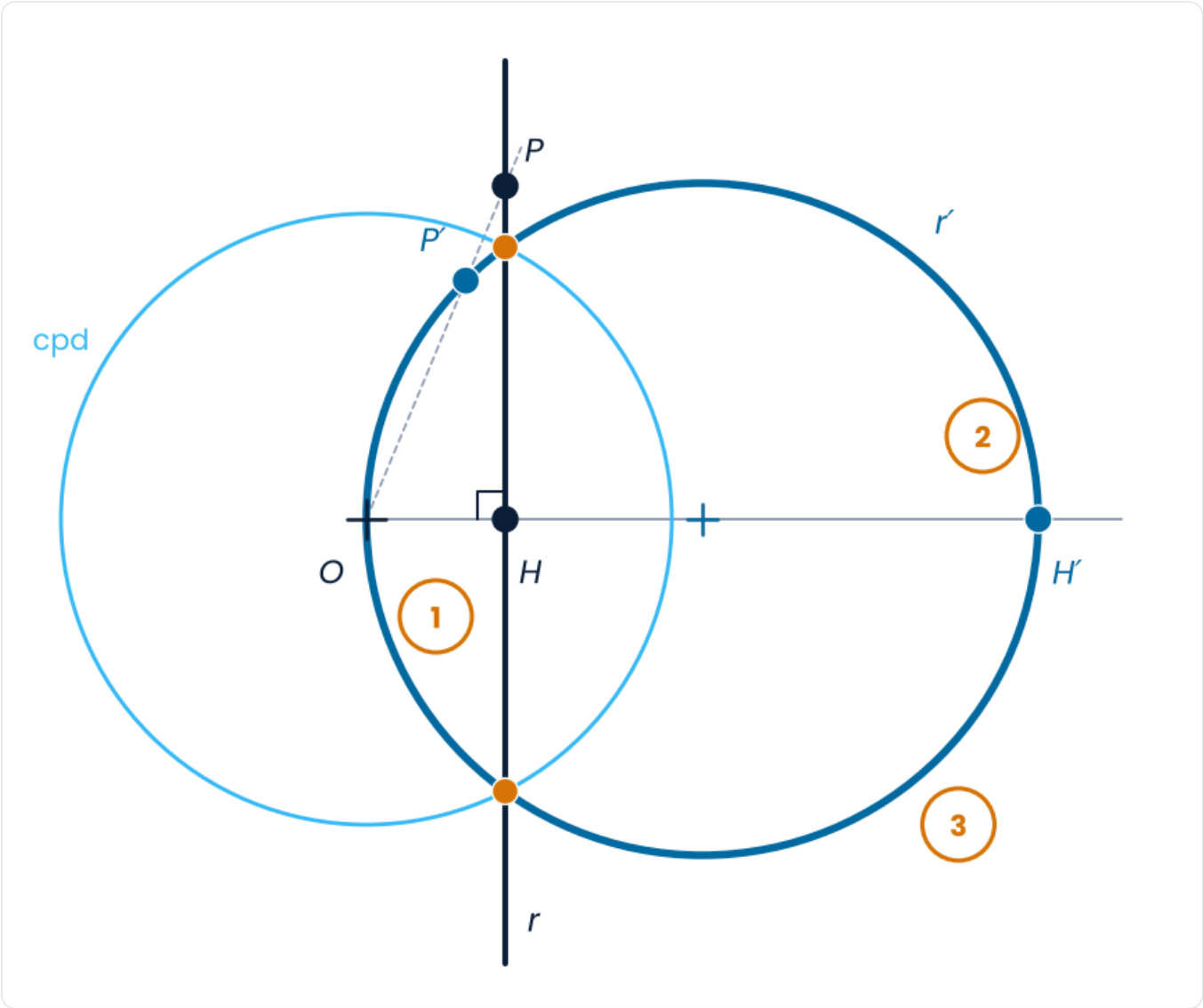
4 Inversa de una recta y de una circunferencia

La inversión transforma rectas y circunferencias en rectas o circunferencias. Qué sale depende de una sola pregunta: **¿pasa por *O*?** Con esta tabla resuelves cualquier figura hecha de segmentos y arcos.

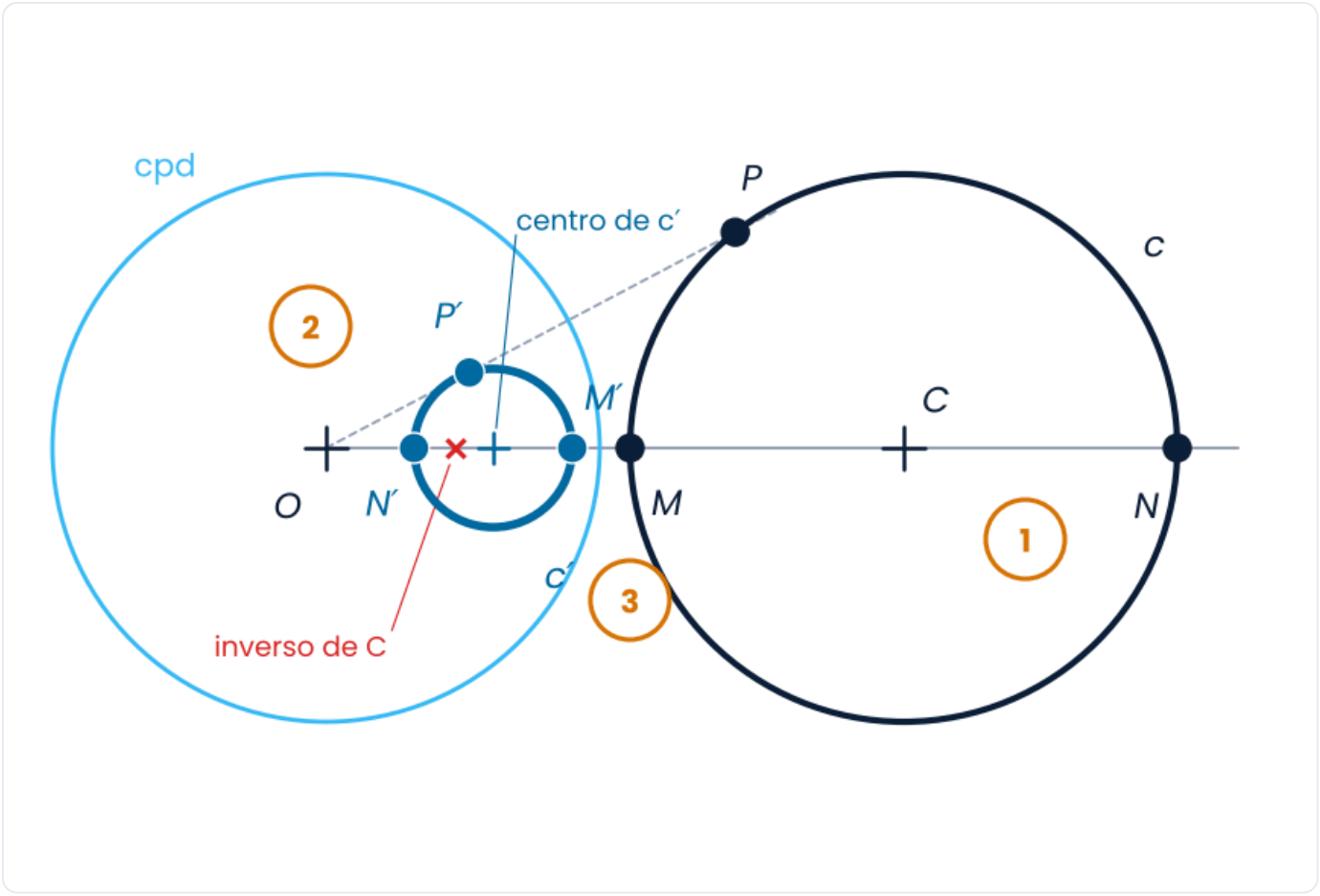
- **Recta que no pasa por *O*.** Sea H el pie de la perpendicular desde O y $d = OH$. Su inversa es la circunferencia de diámetro $OH' = k/d$, que pasa por O, con el centro en la recta OH. Si la recta corta a la cpd, la circunferencia pasa por esos dos puntos, que son dobles.
- **Circunferencia que pasa por *O*.** Traza el diámetro que pasa por O: su otro extremo M tiene inverso M'. La inversa es la recta perpendicular a OM por M'. Si la circunferencia corta a la cpd, la recta pasa por los dos puntos de corte (así lo resuelve Madrid 2025 extraordinaria: «la convierte en la recta ortogonal a OA que pasa por A=A'»).
- **Circunferencia que no pasa por *O*.** Su inversa es otra circunferencia **homotética** de la dada con centro de homotecia O y razón k/p, siendo p la potencia de O respecto de la dada. Para dibujarla, invierte los dos extremos del diámetro que está en la recta OC: son los extremos de un diámetro de la inversa.
- **El centro no se invierte en el centro.** El inverso de C cae en la recta OC, pero no en el punto medio de $M'N'$. Si invertiste el centro y trazaste la circunferencia con centro en él, está mal.
- **Los puntos se invierten en el antihomólogo.** Si una recta por O corta a la circunferencia dada en P y Q, el inverso de P está en la inversa, pero no es el punto «correspondiente» por la homotecia, sino el otro corte (lo ves con detalle en la sección siguiente).
- **Comprueba con un punto intermedio.** Para saber qué arco de la inversa te quedas (el que sustituye a un segmento o a un arco), invierte un punto intermedio del original: el arco correcto es el que pasa por su inverso.

Figura dada	Figura inversa	Cómo se construye
Recta que **pasa** por O	La misma recta	Nada que hacer (sus puntos se invierten dentro de ella)
Recta que **no pasa** por O	Circunferencia que **pasa** por O	Pie H de la perpendicular desde O; su inverso H'; circunferencia de diámetro OH'
Circunferencia que pasa por O	Recta que **no pasa** por O	Diámetro OM; inverso M'; perpendicular a OM por M'
Circunferencia que no pasa por O	Circunferencia que no pasa por O	Recta OC: corta a la circunferencia en M y N; inversos M' y N'; circunferencia de diámetro $M'N'$

Las filas 2 y 3 son la misma propiedad leída en los dos sentidos (la inversión es involutiva).



Recta que no pasa por O. ① Perpendicular desde O: pie H. ② Inverso H'. ③ Circunferencia r' de diámetro OH'. Pasa por O y por los dos puntos dobles (ámbar) donde r corta a la cpd; el inverso P' de cualquier punto P de r está en ella.



Circunferencia que no pasa por *O*. ① Recta *OC*: da *M* y *N*. ② Sus inversos *M′* y *N′*. ③ La inversa *c′* tiene diámetro *M′N′*. El inverso de *C* (aspa roja) **no** es el centro de *c′*.

5 La inversión que transforma una circunferencia en otra (o una recta en una circunferencia)

Madrid no siempre te da el centro: te pide la inversión que convierte una figura en otra («en la inversión positiva que transforma la circunferencia c en la recta c'», 2025; «la inversión que transforma la circunferencia c en la c'», 2026). Hay que saber **dónde está el centro** y **cuál es la potencia**.

- **Dos circunferencias.** Como la inversa de una circunferencia es homotética de ella con centro *O*, el centro de inversión tiene que ser uno de los dos **centros de homotecia**: el **directo** *E* (en la línea de centros, por fuera) o el **inverso** *I* (entre los centros). Los encuentras con dos radios **paralelos**: del mismo sentido para *E*, de sentido contrario para *I*; la recta que une sus extremos corta a la línea de centros en el centro de homotecia.
- **La potencia.** Si *h* es la homotecia de razón λ (positiva para *E*, negativa para *I*) que lleva c_1 a c_2 y *p* es la potencia del centro respecto de c_1, entonces $k = \lambda \cdot p$. Con circunferencias exteriores, la inversión de centro *E* es positiva y la de centro *I*, negativa.
- **Antihomólogos.** Una recta por el centro corta a c_1 en *A* (cerca) y *B* (lejos) y a c_2 en dos puntos. El inverso de *A* **no** es su homotético, sino **el otro** punto de c_2: el lejano. Madrid lo dice así: «los homólogos por inversión contrarios en la circunferencia a los homólogos en la homotecia».
- **Circunferencias tangentes.** Uno de los centros de homotecia es el **punto de tangencia**, que está en las dos: una inversión con centro en él convertiría c_1 en una recta. Por eso solo hay **una** inversión que las relaciona, la del otro centro de homotecia (el inverso *I* si son tangentes interiores, como en Madrid 2026). El punto de tangencia es doble: $k = IT^2$.

- **Una recta y una circunferencia.** El centro tiene que estar **en la circunferencia** (para que se convierta en una recta) y en el diámetro **perpendicular** a la recta: son sus dos extremos N y S. Si H es el pie de ese diámetro en la recta, $k = NH \cdot NS$: positiva si H y S quedan al mismo lado de N y negativa si quedan a distinto lado. Con S sale la otra inversión.
- **Qué centro elegir.** Si el enunciado dice «inversión positiva», descarta la negativa. Si hay dos positivas posibles (cuando la recta corta a la circunferencia, por ejemplo si pasa por su centro, como en la carretera de Madrid 2026), decide con la figura: la solución tiene que encajar en el croquis.

Paso 1: Dibuja la línea de centros (o el diámetro perpendicular a la recta).

↓

Paso 2: Halla los centros de homotecia con radios paralelos (o los extremos N, S del diámetro). Si las circunferencias son tangentes, descarta el punto de tangencia.

↓

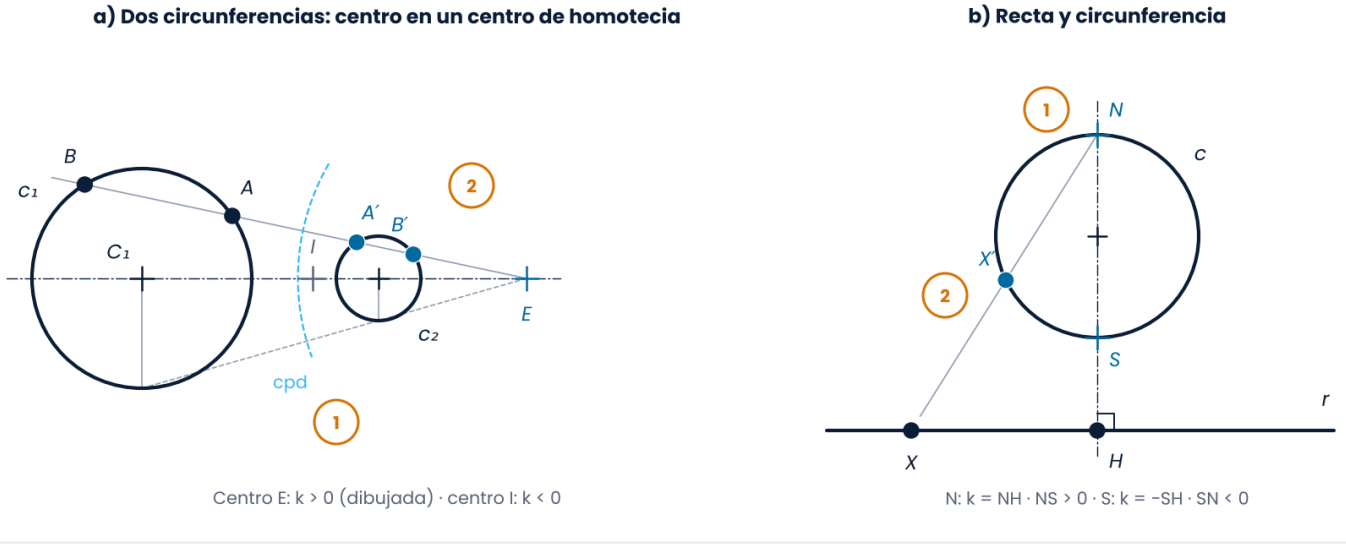
Paso 3: Elige el centro según el enunciado (positiva o negativa) y el croquis.

↓

Paso 4: Para invertir un punto, traza la recta desde el centro: su inverso es el **antihomólogo**, el corte «contrario» al homotético.

Antihomólogo, no homotético

En la recta E–A, el punto de c_2 que **corresponde por homotecia** a A es el cercano si A es el cercano. El **inverso** es el otro. Si te equivocas, el arco inverso te sale «del revés».



Dónde está el centro. a) Dos circunferencias exteriores: ① radios paralelos del mismo sentido, cuya recta da el centro de homotecia directa E; ② desde E, una secante corta a c_1 en A y B; sus inversos son los antihomólogos A' (el lejano) y B' (el cercano). El centro inverso I da la otra inversión, negativa. b) Recta y circunferencia: ① los centros son los extremos N y S del diámetro perpendicular a r; ② la recta NX lleva cada punto X de r a su inverso X' en c.

6 Figuras inversas: el método lado a lado

Es el formato de Madrid 2025 extraordinaria, de la reserva de 2026 y de 2024: una figura hecha de **segmentos y arcos** con el centro O y un punto doble. No se invierte punto a punto: se clasifica cada lado con la tabla de «Inversa de una recta y de una circunferencia» y se invierten solo los **vértices** y los puntos que fijan cada curva.

- **Un segmento que no pasa por O se convierte en un arco**, nunca en otro segmento. Es el fallo que más puntos cuesta: unir los vértices inversos con la regla.

- **Un arco de una circunferencia que pasa por O se convierte en un segmento.** En Madrid 2025 extraordinaria, el arco BAC está en una circunferencia que pasa por O: su inverso es el segmento $B'C'$, perpendicular a OA por $A = A'$.
- **Un arco de una circunferencia doble se convierte en otro arco de la misma circunferencia.** El de la figura inversa es el «complementario» respecto de los vértices: el que no contiene los puntos originales del arco (si el arco no corta a la cpd salvo en un vértice doble; en caso de duda, invierte un punto intermedio).
- **El tamaño engaña.** Un lado lejano de O se convierte en un arco pequeño cerca de O, y un lado cercano, en un arco enorme. Antes de empezar, mira cuánto espacio necesitas en la hoja.
- **Comprobación con los ángulos.** Si la figura dada tiene ángulos rectos, los arcos inversos se cortan a 90° en los vértices inversos. En la figura, los cuatro ángulos del cuadrado siguen siendo rectos.

Paso 1: Dibuja la cpd (centro O, radio OA si A es doble). Marca los vértices que caen en ella: son dobles.

↓

Paso 2: Clasifica cada lado: ¿segmento por O?, ¿segmento que no pasa por O?, ¿arco de una circunferencia que pasa por O?, ¿arco de una circunferencia doble?

↓

Paso 3: Invierte los vértices restantes con la recta O–vértice (cada inverso está en ella).

↓

Paso 4: Para cada lado, traza su línea inversa: recta, circunferencia por O (centro en la perpendicular desde O al lado, a distancia $k/2d$) o la misma circunferencia si es doble.

↓

Paso 5: Remarca solo el tramo entre los vértices inversos que contiene el inverso de un punto intermedio del lado. Comprueba que en cada vértice se conserva el ángulo.

Vértices sí, puntos sueltos no

Invertir diez puntos de un lado y unirlos a mano alzada no vale: el corrector busca el **centro** de cada circunferencia inversa y la construcción que lo justifica. Madrid puntúa cada tipo de línea por separado («Determinación de la inversa del segmento BC 0,75»).

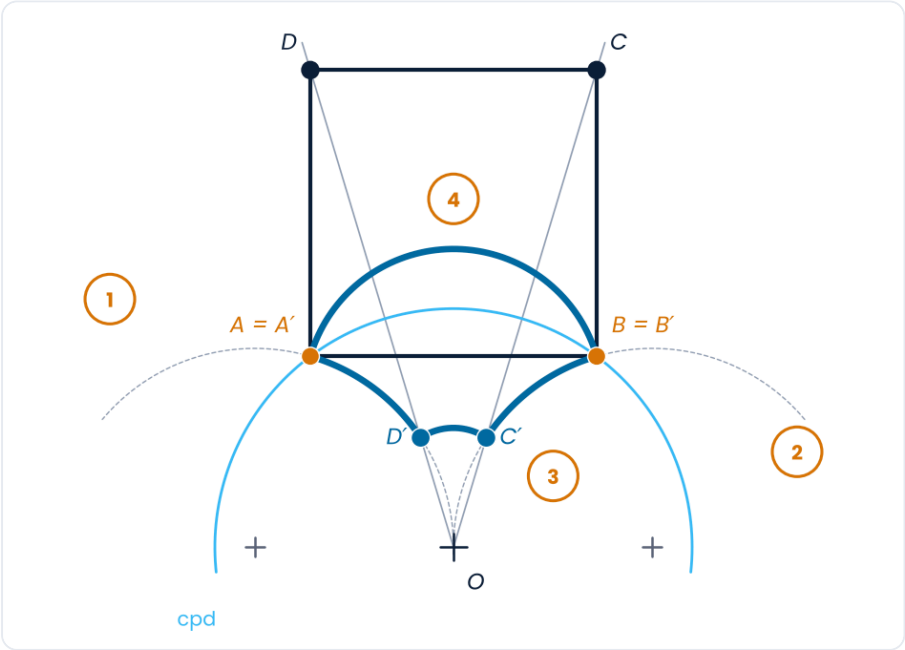


Figura inversa de un cuadrado (de elaboración propia). ① A y B están en la cpd: son dobles. ② Cada lado, que no pasa por O, se convierte en una circunferencia que pasa por O (las de BC y DA, en gris discontinuo). ③ C' y D' están en las rectas OC y OD. ④ Se remarcan los arcos entre vértices: AB da el arco superior, que sigue pasando por A y B.

7 Tangencias por inversión

La inversión sirve para resolver tangencias difíciles porque **conserva las tangencias** y puede convertir una circunferencia en una recta. Madrid la pide expresamente (Decreto 64/2022: «Aplicación a la resolución de problemas de tangencias. Problemas de Apolonio») y la C. Valenciana la nombra desde 2027 («tangencias básicas y mediante potencia e inversión»). Hay dos ideas que caen.

- **PPC por inversión (dos puntos *P*, *Q* y una circunferencia *c*).** Inversión de centro *P* y potencia igual a la potencia de *P* respecto de *c*: *c* es doble. *Q* pasa a *Q*′. Las soluciones se convierten en las **rectas por *Q*′ tangentes a *c***: trázalas con el arco capaz de 90°. Cada recta toca a *c* en un punto; la recta que lo une con *P* corta a *c* en el **punto de tangencia** de la solución (el inverso). La solución es la circunferencia por *P*, *Q* y ese punto. Salen **dos**.
- **CCP por inversión** (Madrid 2025, reserva 2: «Trazar las circunferencias tangentes a las dadas que pasan por el punto P»): centro *P* y potencia la de *P* respecto de c_1, que queda doble; invierte c_2 en c_2' con la tabla de «Inversa de una recta y de una circunferencia». Las soluciones se convierten en las **tangentes comunes** a c_1 y c_2' (Tema 3). Invierte cada punto de contacto (está en la recta que lo une con *P*): son los puntos de tangencia de la solución con c_1 y c_2. Hasta **cuatro** soluciones.
- **Tangente a c_1 en un punto *T* y a c_2.** Las dos inversiones que cambian c_1 en c_2 tienen centro en los centros de homotecia. El punto de tangencia con c_2 es el inverso *T*′ de *T*: la recta que une *T* con el centro de homotecia corta a c_2 en *T*′ (el antihomólogo). El centro de la solución es el corte de C_1T con C_2T'. Con cada centro de homotecia sale una solución.
- **Tangente a una recta en *T* y a una circunferencia.** Igual, con los centros en los extremos del diámetro perpendicular a la recta. Es la carretera de Madrid 2026 extraordinaria (ejercicio resuelto).
- **Comparado con el Tema 3:** el caso «punto dado» se resolvía con la mediatriz trasladando un radio; aquí sale con una sola recta por el centro de homotecia. Los dos métodos dan lo mismo; el de inversión es el que pide la solución oficial de Madrid.
- **Con potencia** (Tema 4) se resuelven los mismos Apolonios por eje y centro radical. Madrid lo admite en su criterio de la reserva 2 de 2025: «Otros métodos como 'potencia' u 'homotecia' son igualmente factibles». Andalucía, en cambio, pide las tangencias «con eje/centro radical».

Idea 1: invertir para simplificar

Si la solución pasa por un punto *P*, invierte con centro *P*: las circunferencias buscadas se convierten en **rectas**. Resuelves el problema fácil (tangentes) y deshaces la inversión. Elige *k* = potencia de *P* respecto de una circunferencia dada: así esa circunferencia es doble y no tienes que invertirla.

Idea 2: la solución es doble

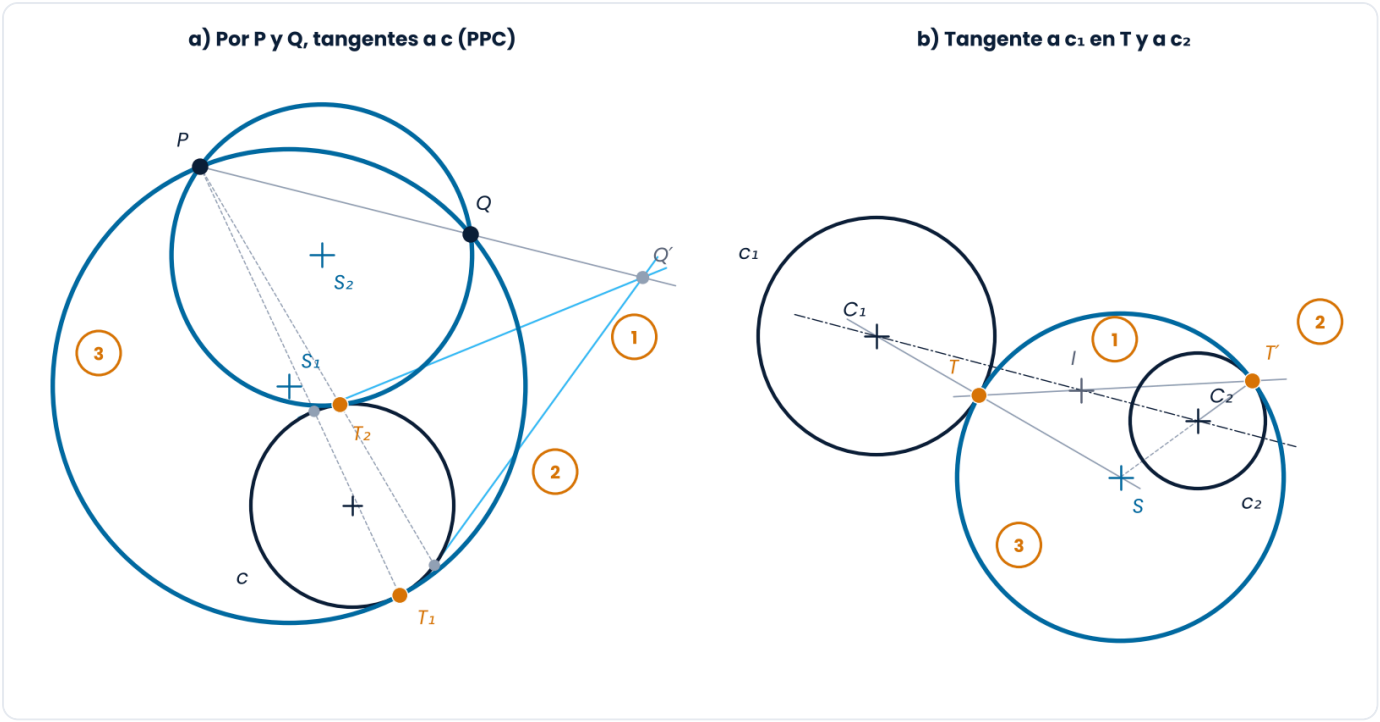
Una circunferencia tangente a dos figuras que son inversas entre sí (una recta y una circunferencia, o dos circunferencias) es **doble** en una de las inversiones que las relacionan (en general hay dos, una por cada centro): la que tiene el centro **alineado con sus dos puntos de tangencia**, que son inversos entre sí. Con el otro centro sale otra solución. Es el método oficial de Madrid 2026 extraordinaria.

Por qué funciona la idea 2

Clásico: la recta que une los dos puntos de contacto de una circunferencia tangente a otras dos pasa por un centro de homotecia de estas. Esos dos puntos son antihomólogos, luego inversos, y una circunferencia que pasa por un par de inversos es doble.

Una recta, dos puntos de tangencia

Si una circunferencia es tangente a dos líneas inversas entre sí, **sus dos puntos de tangencia están alineados con uno de los centros de inversión** que las relacionan (en general hay dos, y con cada uno sale una solución). Con eso, el problema se reduce a trazar una recta y cortar dos rectas de centros.



Dos tangencias por inversión. a) PPC: ① Q', inverso de Q con centro P (c es doble); ② tangentes desde Q' a c (celeste); ③ las rectas P–tangencia cortan a c en T_1 y T_2: circunferencias por P, Q y T_1 (centro S_1) o T_2 (centro S_2). b) Tangente a c_1 en T y a c_2: ① centro de homotecia inversa I; ② la recta TI da T'; ③ C_1T y C_2T' se cortan en S.

8 Qué te piden en tu comunidad

La inversión se pregunta en **8 de las 68 convocatorias** ordinarias y extraordinarias de 2025 y 2026, en **2 comunidades**: las cuatro de Madrid y las cuatro de Extremadura (0,11 puntos de media por examen en el conjunto de España). La C. Valenciana la incluye en su lista desde 2027. En el resto no hay ejercicio de inversión, pero puedes usarla como **método** para resolver una tangencia, siempre que el enunciado no imponga otro.

Comunidad	Cómo te lo piden	Puntos	Estado
Andalucía (y Ceuta y Melilla)	Ejercicio 1 (1A o 1B), de geometría plana. No ha caído en 2025-2026. Las directrices limitan el ejercicio 1 a tangencias con eje y centro radical, cónicas y homología o afinidad. La inversión sí está en el currículo andaluz (Orden de 30 de mayo de 2023, saber DIBT.2.A.2: «inversión (determinación de figuras inversas)»), pero las Directrices no le dan ejercicio.	2,5	En parte: la recoge el currículo andaluz (DIBT.2.A.2), pero no es ejercicio propio: el ejercicio 1 solo puede ser tangencias con eje/centro radical, cónicas u homología/afinidad (Directrices 2026-27, Tabla 1); puedes usarla como método
Aragón	Ejercicio 1 (1A o 1B), de geometría plana. No ha caído en 2025-2026: cae una figura de enlaces o tangencias a dos rectas (Tema 3).	2,75	En parte: no está entre los saberes del RD 243/2022 ni del currículo aragonés (la Orden ECD/1173/2022 solo nombra las figuras «inversas» en sus orientaciones): no hay ejercicio de inversión, pero puedes usarla como método
Asturias	Ejercicio 1 (se hacen 4 de 5). No ha caído en 2025-2026: las tangencias van por centro radical (Tema 4).	2,5	En parte: la inversión no está entre los saberes del RD 243/2022 y tu examen no tiene ejercicio de inversión, pero puedes usarla como método

Comunidad	Cómo te lo piden	Puntos	Estado
Baleares	Pregunta 1, obligatoria, de geometría plana básica. No ha caído en 2025-2026.	3	En parte: la recoge el currículo (Decret 43/2025: «Estudi del concepte de potència i inversió i les seves aplicacions»), pero la ficha de la UIB y el examen no tienen ejercicio de inversión; puedes usarla como método
Canarias	Ejercicio 1 (1a o 1b): croquis de enlaces. No ha caído en 2025-2026.	2	En parte: la inversión no está entre los saberes del RD 243/2022 y tu examen no tiene ejercicio de inversión, pero puedes usarla como método
Cantabria	Pregunta 1, obligatoria: potencia o cónicas. No ha caído en 2025-2026.	2,5	En parte: la inversión no está entre los saberes del RD 243/2022 y tu examen no tiene ejercicio de inversión, pero puedes usarla como método
Castilla-La Mancha	Ejercicio 1 (1a o 1b): los seis casos de tangencias de su lista (Tema 4). No ha caído como ejercicio de inversión en 2025-2026, pero los criterios la admiten como método: en 2025 extraordinaria (1a, de 3 puntos, circunferencias tangentes a una recta en T y a una circunferencia), «(Si se resuelve por inversión se puntuará 0,5 por cada recta perpendicular a R)».	2,5	En parte: la inversión no está entre los saberes del RD 243/2022 y tu examen no tiene ejercicio de inversión, pero puedes usarla como método
Castilla y León	Ejercicio 1 (A1 o A2): pieza con enlaces o cónica. No ha caído en 2025-2026.	2,5	En parte: la inversión no está entre los saberes del RD 243/2022 y tu examen no tiene ejercicio de inversión, pero puedes usarla como método
Cataluña	Dibujo 1 (A o B): siluetas con arcos tangentes. No ha caído en 2025-2026.	3	En parte: la inversión no está entre los saberes del RD 243/2022 y tu examen no tiene ejercicio de inversión, pero puedes usarla como método
C. Valenciana	Pregunta 1 (A o B). No ha caído en 2025-2026; el acta de octubre de 2026 la añade a la lista del bloque 1 como método de tangencias. Lo que ha caído son tangencias con punto conocido (Tema 3), que también se resuelven por inversión.	2,5	Entra: la lista del bloque 1 incluye «tangencias básicas y mediante potencia e inversión» (acta de octubre de 2026); también el Decreto 108/2022
Extremadura	Bloque 1. Inversos de puntos en todas las convocatorias de 2024 a 2026: con el centro y un punto doble (2024 extraordinaria y el modelo 2025, que la repite; 2025 extraordinaria; 2026 ordinaria y extraordinaria), con la cpd dibujada (2025 ordinaria y modelo 2026) o con un par A–A' y un segmento (2024 ordinaria). En 2025-2026 se elegían 3 de 6; desde 2027, 1 de 2 entre inversión, homología o afinidad, tangencias y cónicas.	2 (2,5 en 2027)	Entra: bloque 1: «(Inversión, Homología/Afinidad, Tangencias, Curvas Cónicas)» (Criterios 2026-27); también en el Decreto 109/2022
Galicia	Pregunta 2 (2.1 o 2.2). No ha caído en 2025-2026.	2,25	En parte: la inversión no está entre los saberes del RD 243/2022 y tu examen no tiene ejercicio de inversión, pero puedes usarla como método
La Rioja	Apartado A (uno de dos). No ha caído en 2025-2026.	2,5	En parte: la inversión no está entre los saberes del RD 243/2022 y tu examen no tiene ejercicio de inversión, pero puedes usarla como método

Comunidad	Cómo te lo piden	Puntos	Estado
Madrid	Pregunta 1 (1.1 o 1.2), en todas las convocatorias de 2025 y 2026: inversa de una circunferencia *d* en la inversión que convierte otra, *c*, en una recta (2025 ordinaria), figura de arcos y segmento con un punto doble (2025 extraordinaria y reserva 2026), arco inverso entre dos circunferencias tangentes (2026 ordinaria) y carretera con enlace a una rotonda (2026 extraordinaria, como método oficial). Desde 2027 no se pide justificación razonada.	2,5	Entra: la recoge el Decreto 64/2022 (BOCM) y sale casi siempre en la pregunta 1
Murcia	Bloque I (uno de dos): formas técnicas con tangencias. No ha caído en 2025-2026.	10 (30 % de la nota en 2027)	En parte: la inversión no está entre los saberes del RD 243/2022 y tu examen no tiene ejercicio de inversión, pero puedes usarla como método
Navarra	Ejercicio 1 (tangencias o cónica). No ha caído en 2025-2026.	2	En parte: la inversión no está entre los saberes del RD 243/2022 y tu examen no tiene ejercicio de inversión, pero puedes usarla como método
País Vasco	Bloque A: pieza con enlaces, arco capaz o potencia. No ha caído en 2025-2026.	3	En parte: la inversión no está entre los saberes del RD 243/2022 y tu examen no tiene ejercicio de inversión, pero puedes usarla como método

«Puntos» son los del ejercicio en que cae (o en que podría caer, el de geometría plana). Que algo no haya caído en 2025-2026 no significa que no vaya a caer: la PAU nueva solo lleva dos convocatorias.

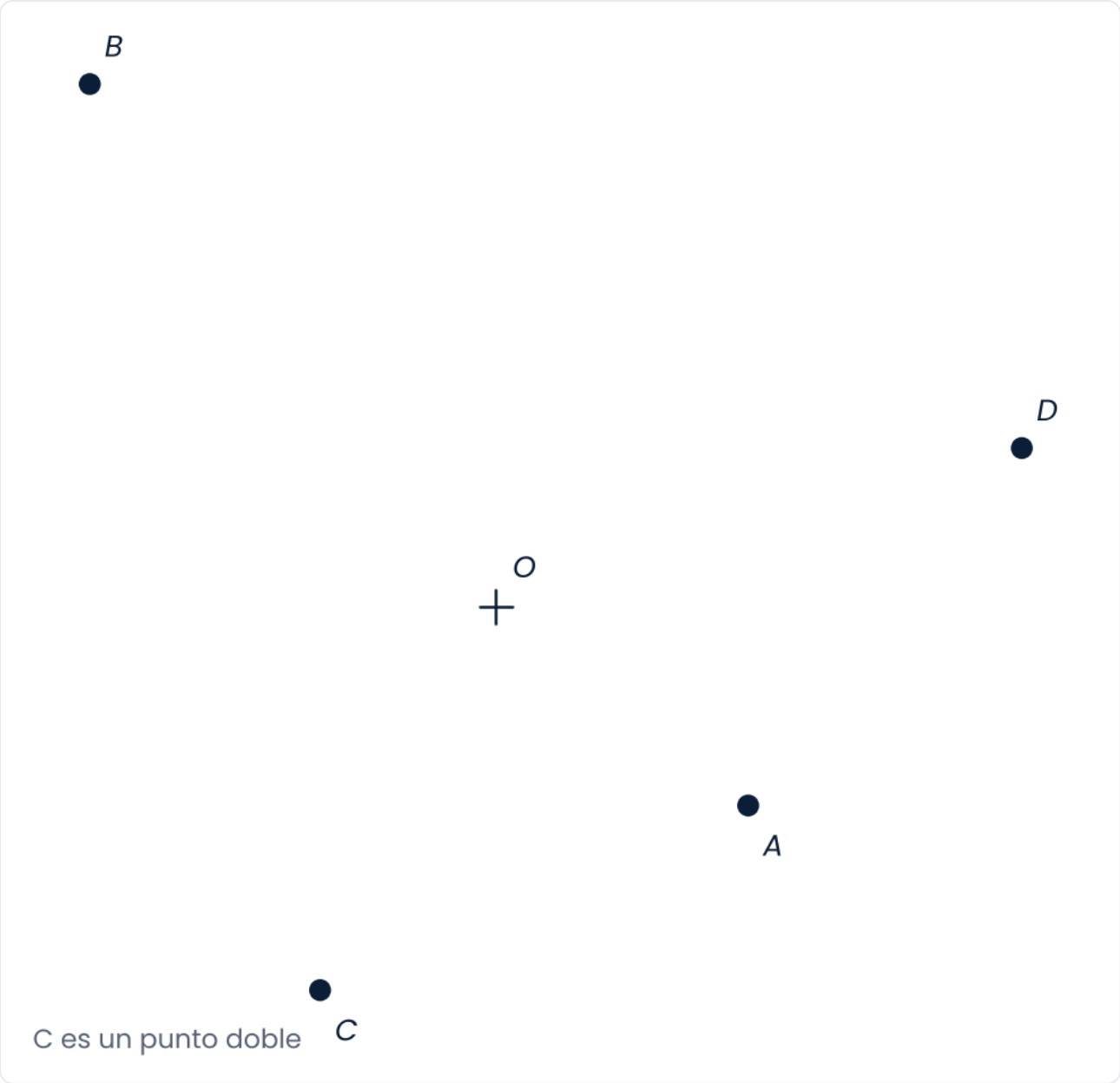
9 Ejercicio resuelto: inversos de cuatro puntos con un punto doble (Extremadura 2026)

PAU EXTREMADURA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · BLOQUE 1, EJERCICIO 3, INVERSIÓN (SE ELIGEN 3 DE LOS 6 EJERCICIOS DEL BLOQUE; 2 PUNTOS). LOS MISMOS PUNTOS SALEN EN 2025 ORDINARIA Y EN EL MODELO 2026, CON LA CIRCUNFERENCIA DE PUNTOS DOBLES YA DIBUJADA

Conocido que O es el centro de inversión y que C es un punto doble, determina los puntos inversos de los dados (A, B, C y D).

Datos (redibujados del examen; medidos sobre el PDF oficial, A3 a escala 1:1; origen en *O*, *x* hacia la derecha, *y* hacia arriba): **A (27,2; −21,5)**, **B (−43,9; 56,5)**, **C (−19,0; −41,4)** y **D (56,8; 17,1)**, en mm. Distancias a *O*: *OA* = 34,7, *OB* = 71,5, *OC* = 45,6 y *OD* = 59,3 mm.

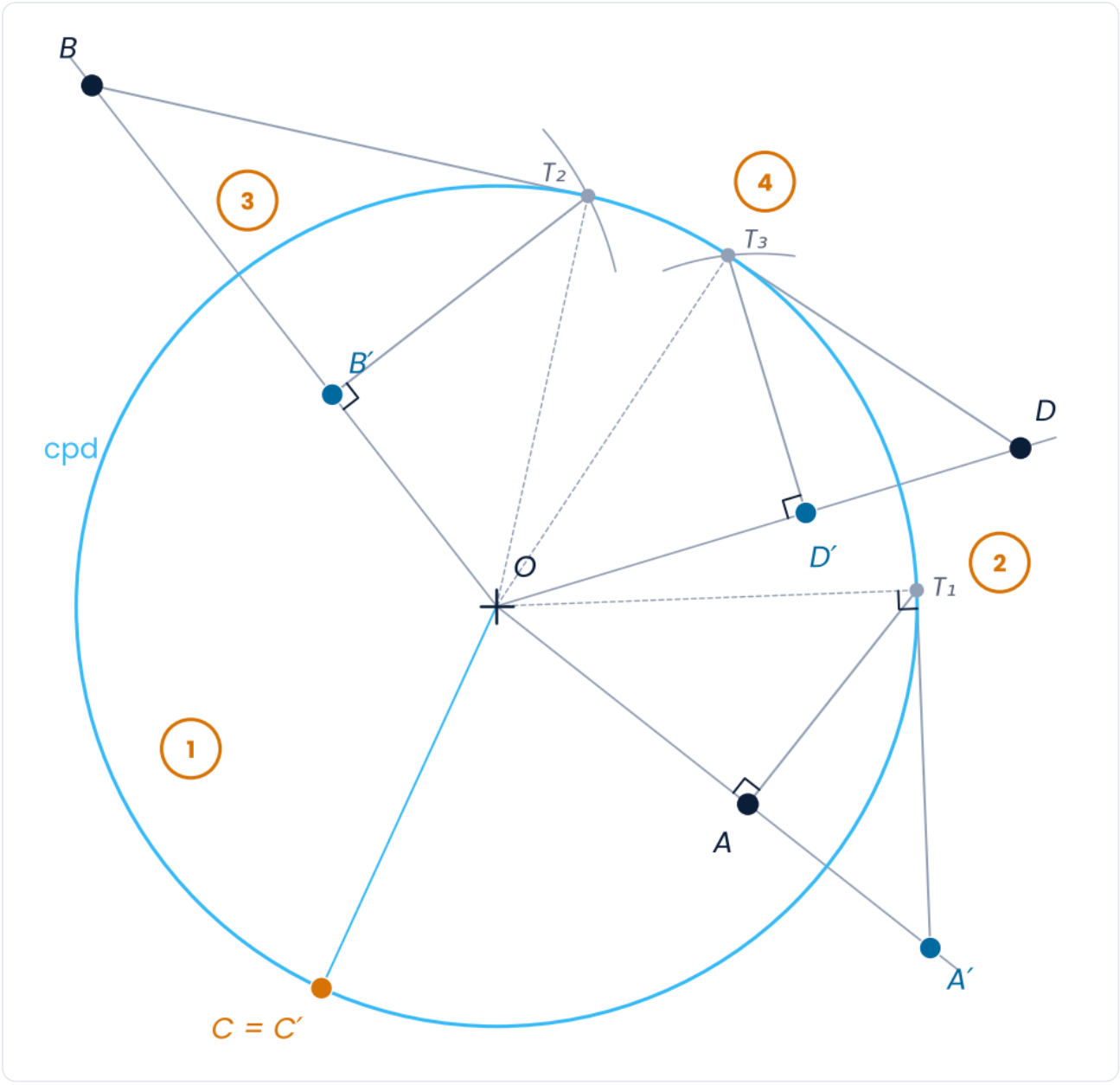
a) Determinar los puntos inversos de A, B, C y D, sabiendo que O es el centro de inversión y C un punto doble. (2 puntos)



Datos del ejercicio, redibujados a escala con las medidas tomadas en el PDF oficial.

Apartado a)

1. **Idea.** Si *C* es doble, la circunferencia de centro *O* que pasa por *C* es la **circunferencia de puntos dobles** y la potencia es $k = OC^2$. Con ella, cada inverso se construye con la perpendicular y la tangente (punto interior) o con el arco capaz y la perpendicular (punto exterior). La inversión es positiva: cada inverso, en la semirrecta de *O* al punto.
2. **Paso 1 ①:** traza la cpd: centro *O*, radio *OC* = 45,6 mm. *C* está en ella: **C′ = C**. Compara las distancias: *A* (34,7) está **dentro**; *B* (71,5) y *D* (59,3), **fuera**. Traza y prolonga las rectas *OA*, *OB* y *OD*.
3. **Paso 2 ②: A, interior.** Perpendicular a *OA* por *A*: corta a la cpd en T_1. La tangente en T_1 (perpendicular a OT_1) corta a la prolongación de *OA* en **A′**, a **59,9 mm** de *O*, en (47,0; −37,1).
4. **Paso 3 ③: B, exterior.** Arco capaz de 90° sobre *OB* (circunferencia de diámetro *OB*; basta un trozo de arco): corta a la cpd en T_2. La perpendicular desde T_2 a *OB* da **B′**, a **29,1 mm** de *O*, en (−17,8; 22,9).
5. **Paso 4 ④: D, exterior.** Igual que *B*, con T_3: **D′** a **35,0 mm** de *O*, en (33,5; 10,1).
6. **Comprobación:** $OA \cdot OA' = 34{,}7 \cdot 59{,}9 \approx 2077$, igual que $OB \cdot OB' = 71{,}5 \cdot 29{,}05$, $OD \cdot OD' = 59{,}3 \cdot 35{,}0$ y $OC^2 = 45{,}6^2$. Los cuatro dan $k \approx 2077$ mm².



Solución. Los pasos ①②③④ de la figura son los del texto: ① cpd por *C*; ② perpendicular y tangente para *A*; ③ y ④ arco capaz y perpendicular para *B* y *D*. Inversos en azul. En el examen, marca cada punto como el corte de dos líneas, no como un punto relleno (criterios de Extremadura 2026-27).

SOLUCIÓN **A′** a 59,9 mm de *O* (fuera de la cpd), **B′** a 29,1 mm y **D′** a 35,0 mm (dentro), y **C′ = C**. Extremadura no publica solución gráfica (solo el reparto de puntos): comprueba que cada inverso está en su semirrecta y que el producto de distancias es el mismo.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Extremadura 2026, ejercicio 3: «Planteamiento e interpretación correcta de los elementos» **0,75** y «Resolución del ejercicio» **1,25**. Instrucciones del examen: «Se valorará la corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación), así como la presentación, pudiéndose deducir hasta 1 punto». Para 2027 los criterios añaden: «Se valorará la diferenciación de trazado auxiliar, mediante líneas finas, del trazado solución, de líneas más anchas» y «El punto debe representarse gráficamente como del corte de dos líneas y no como un círculo relleno».

Error típico que te quita puntos. Medir *OA* con la regla y calcular $OA' = k/OA$: el resultado puede ser bueno, pero no hay construcción y no se puede usar calculadora. También es frecuente llevar el inverso al otro lado de *O* (eso sería una inversión negativa) u olvidar escribir que *C′* = *C*.

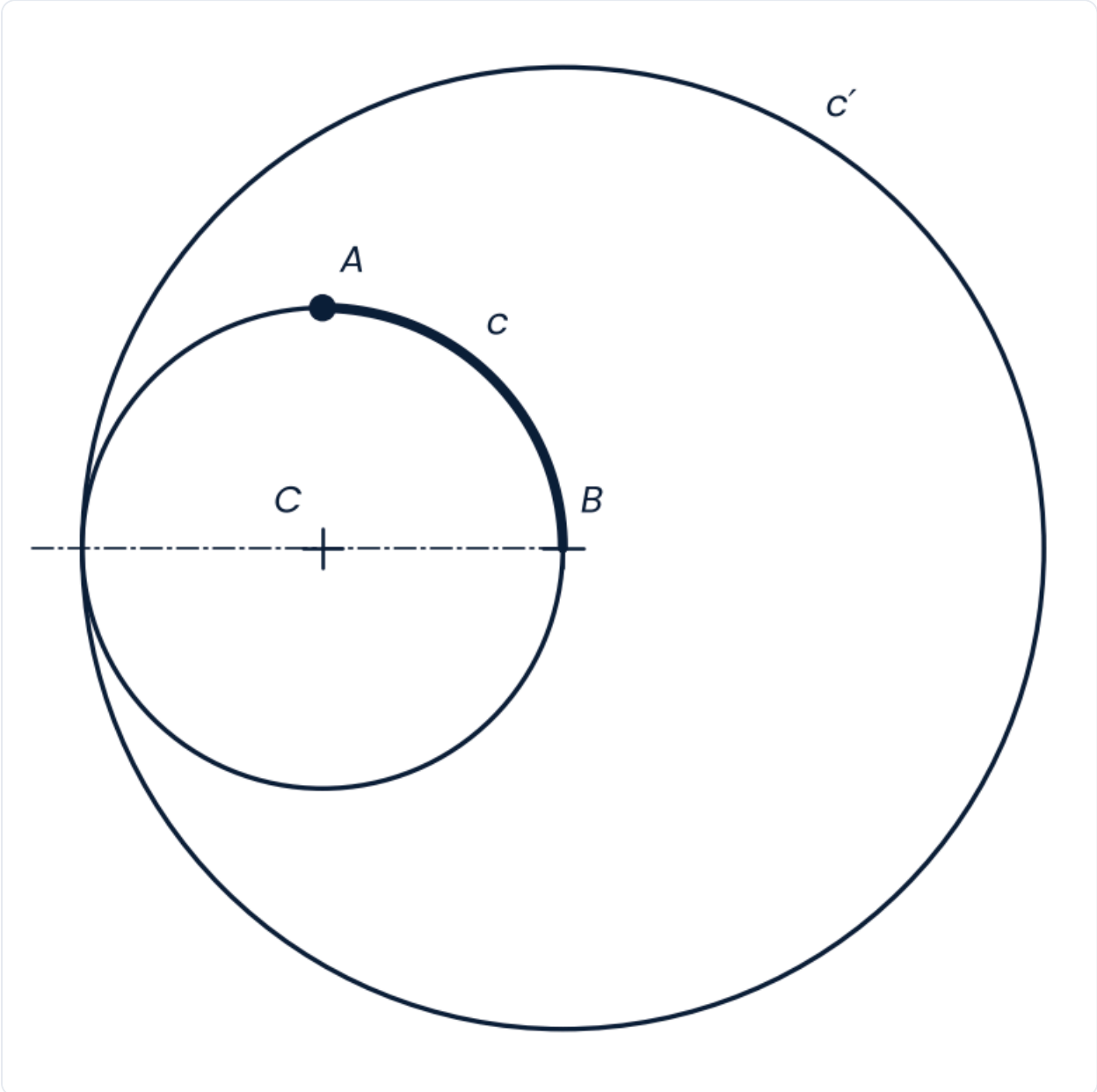
10 Ejercicio resuelto: arco inverso en la inversión que transforma una circunferencia en otra (Madrid 2026)

PAU COMUNIDAD DE MADRID 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 1, OPCIÓN 1.1 (A ELEGIR ENTRE 1.1 Y 1.2; 2,5 PUNTOS)

Determínese el arco homólogo de AB en la inversión que transforma la circunferencia c en la c'. Exponer el fundamento de la construcción empleada.

Datos (redibujados del examen; medidos sobre el PDF oficial, A4 a escala 1:1; origen en *C*, *y* hacia arriba): **c** de centro *C* y radio **19,0 mm**. **c'** de radio **38,1 mm** (el doble) y centro en **B**, el punto más a la derecha de *c*. Las dos son **tangentes interiores** en el punto *T* de la izquierda, en la horizontal de *C*. **A** es el punto más alto de *c*, y el arco *AB* es el cuarto de *c* entre *A* y *B*.

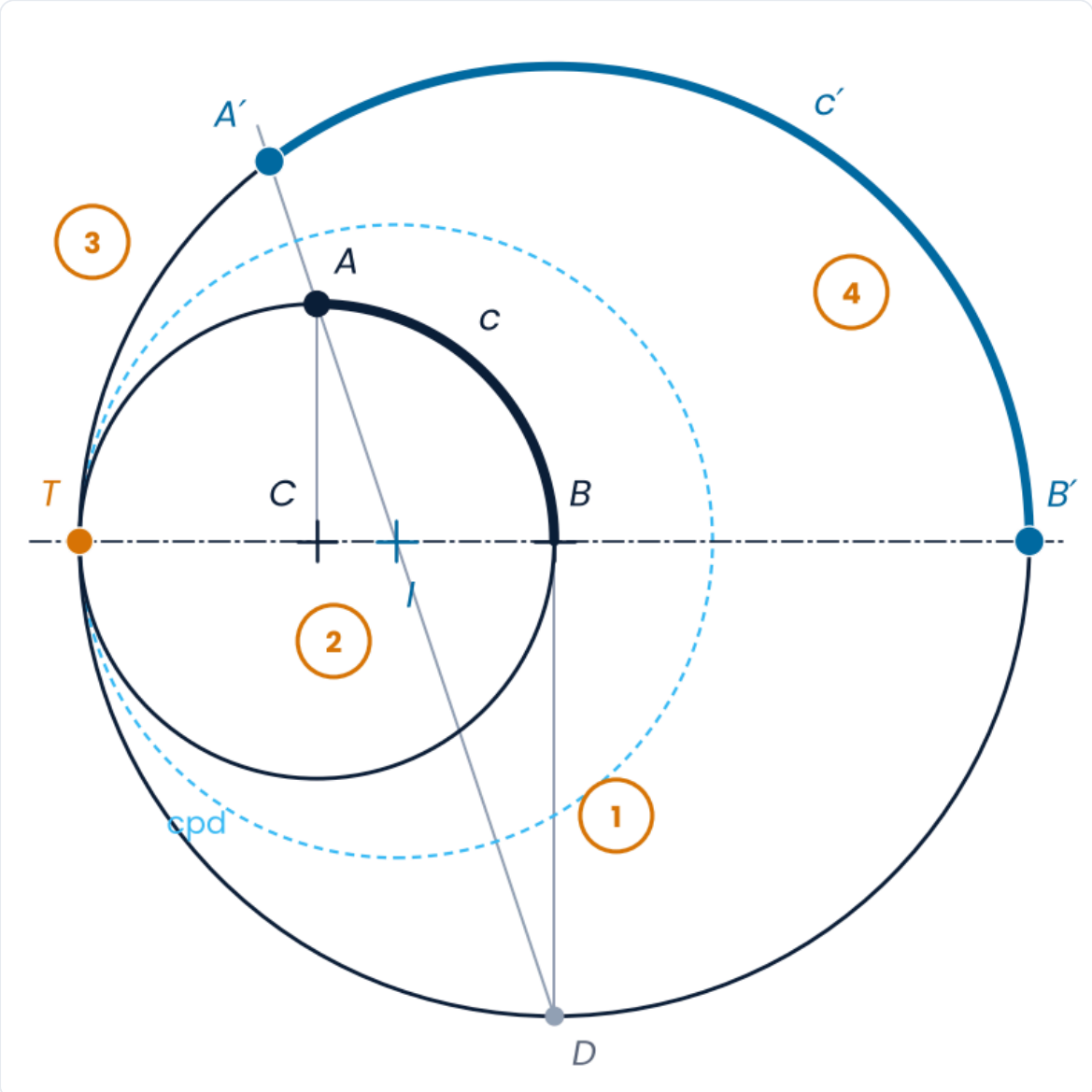
a) Determinar el arco inverso del arco AB en la inversión que transforma c en c' y exponer el fundamento. (2,5 puntos)



Datos del ejercicio, redibujados a escala con las medidas tomadas en el PDF oficial.

Apartado a)

1. **Fundamento (lo que hay que escribir).** Si una inversión transforma c en c', las dos son homotéticas con centro en el centro de inversión, así que este tiene que ser un **centro de homotecia** de c y c'. Son dos: el punto de tangencia T (homotecia directa) y el centro de homotecia inversa I. T no sirve: está en c, y una inversión con centro en él convertiría c en una recta. Queda **I**. Cada punto se transforma en su **antihomólogo**: la recta I–punto corta a c' en dos puntos; uno es su homotético y el otro, su inverso. T es doble, así que $k = IT^2 > 0$.
2. **Paso 1 ①:** traza el radio CA (vertical, hacia arriba) y el radio de c' **paralelo y de sentido contrario**: desde B hacia abajo, hasta D, el punto más bajo de c'.
3. **Paso 2 ②:** une A con D: corta a la línea de centros en **I**, a 6,3 mm de C (un tercio del radio de c, porque c' mide el doble). La cpd tiene centro I y pasa por T: radio $IT = 25{,}4$ mm.
4. **Paso 3 ③:** prolonga DA más allá de A: corta a c' en **A'**. D es el homotético de A; A', el otro corte, es su inverso. La recta IB corta a c' en T (homotético de B) y en **B'**, el punto más a la derecha de c': es el inverso de B.
5. **Paso 4 ④:** el arco inverso es el de c' entre A' y B' que **pasa por arriba**: el inverso de cualquier punto intermedio de AB (por ejemplo, el de 45°) cae en él.



Solución. Los pasos ①②③④ son los del texto: ① radios antiparalelos CA y BD; ② la recta AD da I; ③ A' en la prolongación de DA y B' en la de IB; ④ arco $A'B'$ en azul. En celeste, la cpd de centro I, que pasa por T.

SOLUCIÓN I a 6,3 mm de *C*, entre *C* y *B*; potencia $k = IT^2 \approx 644$ mm² (cpd de radio 25,4 mm). **A′** en (-3,8; 30,5) respecto de *C* y **B′** a 57,1 mm de *C* (el extremo derecho de *c*′). El arco inverso es el arco superior *A*′*B*′ de *c*′. **Coincide con la solución gráfica oficial**, que sitúa *I* con la misma recta *A*–(punto más bajo de *c*′) y remarca el mismo arco.

Lo que puntúa. Criterio oficial de Madrid: «Determinación del centro I de la inversión» **0,70**; «Determinación del arco A'B' inverso del AB» **1,00**; «Explicación razonada» **0,50**; «Valoración del trazado y la ejecución» **0,30**. El fundamento oficial dice: «Siendo ambas circunferencias tangentes entre sí, la única inversión que las relaciona es la de centro en I, que es también el centro de la homotecia negativa que también las relaciona, siendo los homólogos por inversión contrarios en la circunferencia a los homólogos en la homotecia». Ojo: desde 2027, «no se pedirá una justificación razonada en ninguno de los ejercicios» (acta de la UAM de 28-10-2026).

Error típico que te quita puntos. Tomar el punto de tangencia *T* como centro de inversión o, ya con *I*, quedarse con el **homotético** (el punto *D*, abajo) en vez del inverso. Entonces el arco sale por debajo de *c*′. En la recta que pasa por *I* hay dos cortes con *c*′: el inverso es el que queda **al mismo lado** de *I* que el punto original.

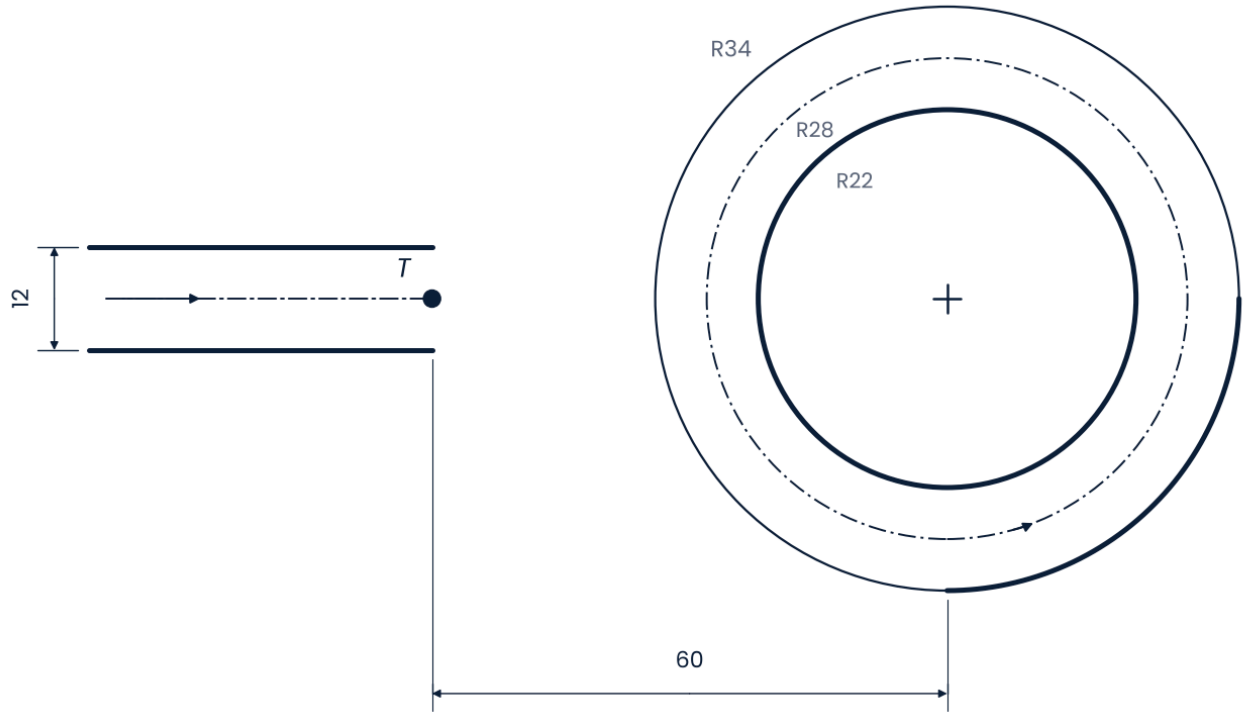
11 Ejercicio resuelto: enlace de una carretera con una rotonda por inversión (Madrid 2026)

PAU COMUNIDAD DE MADRID 2026 · CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA · PREGUNTA 1, OPCIÓN 1.1 (A ELEGIR ENTRE 1.1 Y 1.2; 2,5 PUNTOS)

Completar la representación del tramo circular de carretera, calculando las líneas de los dos arcenes hasta su entrada en la rotonda, sabiendo que el eje del mismo es tangente al eje central en la rotonda.

Datos (redibujados del examen; medidos sobre el PDF oficial, A4 a escala 1:1; origen en el centro de la rotonda, *y* hacia arriba): tramo recto de carretera de **12 mm** de ancho (arcenes a 6 mm del eje), cuyo eje es la horizontal que pasa por el centro de la rotonda y termina en **T**, **60 mm** a la izquierda del centro. Rotonda: isleta de radio **22**, eje central de radio **28** y borde exterior de radio **34**; se circula en sentido antihorario. Un croquis muestra que la carretera gira hacia abajo y entra en la rotonda por la parte inferior izquierda.

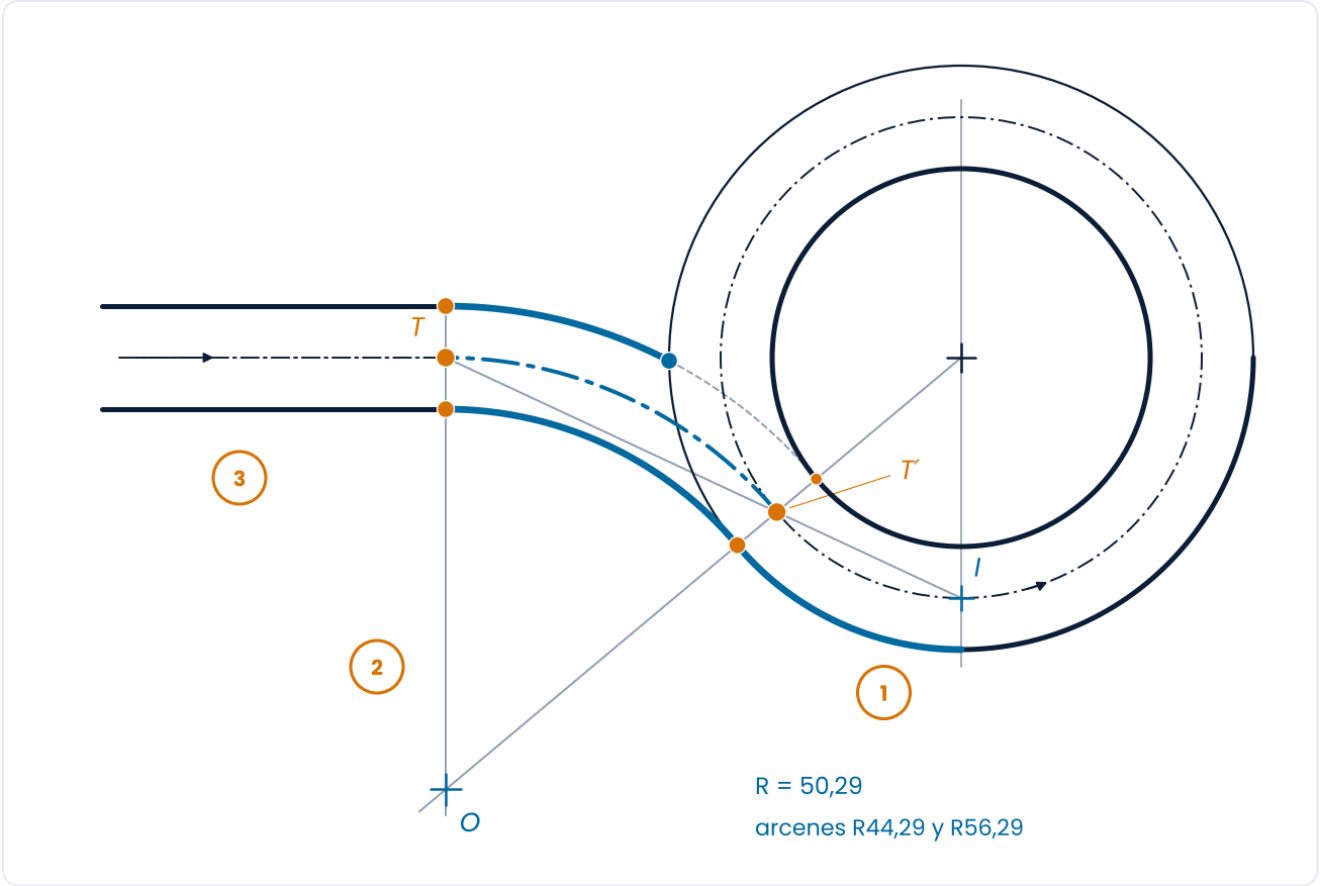
a) Trazar el tramo circular (eje tangente en T al eje recto y al eje central de la rotonda) y los dos arcenes hasta su entrada en la rotonda. (2,5 puntos)



Datos del ejercicio, redibujados a escala con las medidas tomadas en el PDF oficial.

Apartado a)

1. **Idea.** El eje del enlace es una circunferencia tangente a una recta (el eje recto, en T) y a una circunferencia (el eje de la rotonda). Recta y circunferencia son **inversas** en dos inversiones, con centro en uno u otro extremo del diámetro perpendicular a la recta. El enlace, tangente a las dos, es **doble** en una de ellas: su punto de tangencia T' con la rotonda es el inverso de T, alineado con T y con ese centro de inversión, I.
2. **Elegir I.** El diámetro vertical del eje de la rotonda tiene dos extremos. Como el croquis gira hacia abajo y se entra en sentido antihorario, se usa el **inferior**: **I (0; −28)**. Su potencia es $k = 28 \cdot 56 = 1568$ mm² (positiva). Con el extremo superior saldría un enlace hacia arriba que entraría en dirección contraria a la circulación.
3. **Paso 1 ①:** une T con I: la recta corta al eje de la rotonda en **T′ (−21,5; −18,0)**, el punto de tangencia.
4. **Paso 2 ②:** el centro del enlace está en la **perpendicular al eje recto por T** (vertical por T) y en la **recta que une el centro de la rotonda con T′**. Se cortan en **O (−60,0; −50,3)**: radio **R = 50,3 mm**.
5. **Paso 3 ③: arcenes.** Son **dilataciones** del eje: arcos concéntricos de centro O y radios R − 6 = **44,3** y R + 6 = **56,3** mm, que empiezan en los extremos de los arcenes rectos (en la vertical de T, que son sus puntos de tangencia). El interior (44,3) es tangente al borde exterior de la rotonda (44,3 + 34 = 78,3 = OC) en (−26,1; −21,8), en la recta O–centro, y desde ahí el arcén sigue por la rotonda. El exterior (56,3) llega al borde de la rotonda en (−34,0; −0,4): ahí entra. Si lo prolongas, sería tangente a la isleta (56,3 + 22 = 78,3).



Solución. Los pasos ①②③ son los del texto: ① recta *T*–*I*, que da *T'*; ② vertical por *T* y recta centro–*T'*, que se cortan en *O*; ③ arcenes concéntricos. En azul, el eje del enlace (trazo y punto) y los arcenes.

SOLUCIÓN Enlace de **radio 50,3 mm** y centro *O* 50,3 mm por debajo de *T*; punto de tangencia **T' (-21,5; -18,0)**; arcenes de radios **44,3** y **56,3 mm**. Comprobaciones: *T*, *T'* e *I* alineados; $OC = 50{,}3 + 28 = 78{,}3$ mm. **Coincide con la solución gráfica oficial**, que da *O* en la vertical de *T* a unos 50 mm y el mismo *T'*.

Lo que puntúa. Criterio oficial de Madrid: «Determinación del punto de tangencia en el eje circular» **0,50**; «Determinación del centro, O, y trazado del eje del enlace» **1,00**; «Trazado de los arcenes con determinación de sus extremos tangentes» **0,70**; «Valoración del trazado y la ejecución» **0,30**. El fundamento oficial: «Tal arco (enlace) será un elemento doble en la inversión que relaciona el eje recto con el circular, por lo que el punto T y el T' estarán alineados con el centro I de la inversión. Los arcenes son simples dilataciones en ambos sentidos del eje de la carretera».

Error típico que te quita puntos. Buscar el enlace de los **bordes** (arcenes) en vez del **eje**: el enunciado dice que es el eje el que es tangente al eje central. También es un error tomar *I* arriba (el enlace sale curvado hacia arriba) o trazar los arcenes con otro centro: tienen que ser **concéntricos** con el eje del enlace.

COMPARATIVA FINAL

Qué construcción usar y cuándo

Lo que te dan o te piden	Construcción	Dónde ha caído
Inverso de un punto interior a la cpd	Perpendicular a *OA* por *A* → *T*; tangente en *T* → *A'*	Extremadura 2026 (punto *A*)
Inverso de un punto exterior	Arco capaz de 90° sobre *OB* → *T*; perpendicular desde *T* a *OB* → *B'*	Extremadura 2026 (*B* y *D*), 2026 extraordinaria
Solo un par *A*–*A'*	Circunferencia por *A*, *A'* y *B*; corta a *OB* en *B'*	Extremadura 2024 ordinaria

Lo que te dan o te piden	Construcción	Dónde ha caído
Recta que no pasa por *O*	Circunferencia por *O* de diámetro *OH′* (*H*, pie de la perpendicular)	Extremadura 2024 ordinaria (segmento *AB*), Madrid 2025 extraordinaria (*BC*)
Circunferencia que pasa por *O*	Recta perpendicular al diámetro *OM* por *M′*	Madrid 2025 extraordinaria (arco *BAC*)
Circunferencia que no pasa por *O*	Inversos de los extremos del diámetro sobre *OC*; o homotecia de centro *O*	Madrid 2025 ordinaria ($d \to d'$)
Inversión que cambia c_1 en c_2	Centro en un centro de homotecia (si son tangentes, el que no es el punto de tangencia); inversos = antihomólogos	Madrid 2026 ordinaria
Tangente a dos figuras inversas entre sí	Puntos de tangencia alineados con uno de los centros de inversión (una solución por centro); centro en el corte de las rectas de centros	Madrid 2026 extraordinaria y reserva 2 de 2025

Regla general: decide primero si cada elemento pasa por *O* o es doble; después invierte solo los puntos que fijan cada recta o circunferencia.

Errores que te quitan puntos

Lo que más se confunde en este tema, y cómo decirlo bien.

- ✗ Llevar *A′* al otro lado de *O* en una inversión positiva, o ponerlo en cualquier sitio «más lejos» sin que esté en la recta *OA*.
- ✓ Con $k > 0$, *A′* está en la **semirrecta** de *O* a *A*. Traza siempre esa semirrecta primero.

Apartado 1: Qué es la inversión: centro, potencia y puntos dobles

- ✗ Medir *OA* y calcular $OA' = k/OA$ con la calculadora o de cabeza.
- ✓ Construye: perpendicular y tangente (interior) o arco capaz y perpendicular (exterior). Extremadura no permite calculadora y todos los criterios puntúan la construcción.

Apartado 2: El inverso de un punto: las dos construcciones que caen

- ✗ Usar el arco capaz de 90° para un punto **interior**: la circunferencia de diámetro *OA* no corta a la cpd y no sale nada.
- ✓ Mira primero si el punto está dentro o fuera de la cpd. Dentro: perpendicular por el punto; fuera: tangentes desde el punto.

Apartado 2: El inverso de un punto: las dos construcciones que caen

- ✗ Invertir el centro de una circunferencia y trazar la inversa con centro en él.
- ✓ Invierte los extremos *M* y *N* del diámetro que está en la recta *OC*: el centro de la inversa es el punto medio de *M′N′*.

Apartado 4: Inversa de una recta y de una circunferencia

- ✗ Convertir un segmento que no pasa por *O* en otro segmento uniendo sus extremos inversos con la regla.
- ✓ Solo los segmentos de rectas que pasan por *O* siguen siendo rectos. Los demás se convierten en arcos de circunferencias que pasan por *O*.

Apartado 4: Inversa de una recta y de una circunferencia

- ✗ Tomar el punto de tangencia de dos circunferencias tangentes como centro de la inversión que las relaciona.
- ✓ Ese punto está en las dos: con él como centro, una se convertiría en recta. El centro es el **otro** centro de homotecia.

Apartado 5: La inversión que transforma una circunferencia en otra (o una recta en una circunferencia)

- ✗ Remarcar el arco equivocado de cada circunferencia inversa (el que pasa por O o el complementario).
- ✓ Invierte un punto intermedio de cada lado: el arco bueno es el que pasa por su inverso, y nunca contiene a O (solo lo haría si el lado original llegara al infinito).

Apartado 6: Figuras inversas: el método lado a lado

- ✗ En una tangencia por inversión, unir T con el centro de homotecia y quedarse con el corte **homotético** en vez del inverso.
- ✓ El punto de tangencia es el **antihomólogo**: el corte que no corresponde por la homotecia. Comprueba que el centro de la solución está en las dos rectas de centros.

Apartado 7: Tangencias por inversión

Conceptos clave

Inversión

Transformación del plano que lleva cada punto A a un punto A' de la recta OA tal que $OA \cdot OA' = k$.

Centro de inversión

Punto O dado que define la inversión: cada punto y su inverso están alineados con él. No tiene inverso: le corresponde el infinito.

Potencia de inversión

El número k, igual para todos los pares de inversos: $OA \cdot OA'$, con signo + si A y A' están al mismo lado de O y − si están a distinto lado. Si $k > 0$, es el cuadrado del radio de la circunferencia de puntos dobles.

Inversión positiva

La de $k > 0$: cada punto y su inverso están al mismo lado del centro.

Inversión negativa

La de $k < 0$: el centro queda entre cada punto y su inverso. Equivale a una positiva seguida de una simetría central; no tiene puntos dobles.

Puntos inversos

Pareja A–A' que se corresponde en la inversión. Si A' es el inverso de A, A es el inverso de A' (la inversión es involutiva).

Punto doble

Punto que coincide con su inverso: está a distancia $\sqrt{k}$ del centro.

Circunferencia de puntos dobles

Circunferencia de centro O y radio $\sqrt{k}$ (cpd o circunferencia de inversión): sus puntos son dobles, y separa los puntos que se invierten hacia dentro de los que se invierten hacia fuera.

Circunferencia doble

Circunferencia que se transforma en sí misma: la potencia del centro de inversión respecto de ella vale k. Es ortogonal a la cpd y contiene, con cada punto, a su inverso.

Circunferencias ortogonales

Las que se cortan en ángulo recto: el radio de una en el punto de corte es tangente a la otra.

Figura inversa

La formada por los inversos de todos los puntos de una figura. Se construye lado a lado: rectas y circunferencias se convierten en rectas o circunferencias.

Centro de homotecia

Punto de la línea de centros desde el que una circunferencia se ve como ampliación de otra: el directo (fuera del segmento que une los centros, razón positiva) y el inverso (entre los dos centros, razón negativa).

Puntos antihomólogos

En una recta por un centro de homotecia que corta a dos circunferencias, los puntos que no se corresponden por la homotecia. Son los inversos en la inversión que transforma una circunferencia en la otra.

Transformación conforme

La que conserva los ángulos entre curvas. La inversión lo es: por eso conserva las tangencias y los ángulos rectos.

Teorema del cateto

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es el producto de la hipotenusa por su proyección. Justifica la construcción del inverso con la cpd: $OT^2 = OA \cdot OA'$.

Problema de Apolonio

Trazar las circunferencias tangentes a tres elementos (puntos, rectas o circunferencias). Se resuelve por potencia (Tema 4) o por inversión: con centro en un punto por el que pasan, las circunferencias buscadas se convierten en rectas.

MODO PAU

Nueve claves que valen puntos

La fórmula

$OA \cdot OA' = k$, con A y A' **alineados con *O***. Positiva: al mismo lado.

Punto doble

Si te dan un punto doble C, dibuja primero la **cpd**: centro O, radio OC.

Dentro o fuera

Interior: **perpendicular + tangente**. Exterior: **arco capaz de 90° + perpendicular**. Nunca calculado.

Par dado

Sin cpd: la **circunferencia por *A*, *A'* y *B*** corta a OB en B'.

¿Pasa por O?

Recta por O → ella misma. Recta que no pasa → **circunferencia por *O***. Circunferencia por O → recta.

El centro engaña

El inverso del centro **no** es el centro de la inversa: invierte los extremos del diámetro sobre OC.

Dos circunferencias

El centro de inversión es un **centro de homotecia**; si son tangentes, solo vale el que no es el punto de tangencia.

Antihomólogo

En la recta por el centro, el inverso es el corte **contrario** al homotético.

Tangencias

Una circunferencia tangente a dos figuras inversas es **doble** en una de las inversiones que las relacionan: sus puntos de tangencia están **alineados con uno de los centros**.

Cómo te lo pueden preguntar

- **Inversos de puntos** con el centro y un punto doble, con la circunferencia de puntos dobles dibujada o con un par A–A': Extremadura, en las 4 convocatorias de 2025 y 2026 y en las de 2024. La inversión cae en **8 de las 68 convocatorias** de 2025 y 2026, en 2 comunidades (0,11 puntos por examen en el conjunto de España).
- **Figura inversa** de una figura de segmentos y arcos con centro O y un punto doble: Madrid 2025 extraordinaria, reserva 2026 y 2024 (rectángulo y cuadrilátero con vértices dobles).
- **Inversa de una circunferencia** en la inversión que transforma una circunferencia en otra o en una recta: Madrid 2025 ordinaria (c → recta, d tangente a c) y 2026 ordinaria (arco inverso entre dos circunferencias tangentes).
- **Tangencias por inversión** en contexto: la carretera que enlaza con una rotonda (Madrid 2026 extraordinaria) y las circunferencias por un punto tangentes a dos dadas (Madrid, reserva 2 de 2025).

- **Exponer el fundamento** de la construcción (0,5 puntos en Madrid 2026 ordinaria). Desde 2027, Madrid ya no pide justificación razonada.
- En la **C. Valenciana**, desde 2027 la lista del bloque 1 incluye «tangencias básicas y mediante potencia e inversión»: no ha caído en 2025-2026.

No lo confundas

- **Inverso con homotético:** en la inversión que cambia c_1 por c_2, la recta por el centro corta a c_2 en dos puntos; el homotético de *A* es uno y su inverso, el otro (el antihomólogo).
- **Centro de la inversa con inverso del centro:** el centro de la circunferencia inversa está en la recta *OC*, pero no es el inverso de *C*. Se obtiene con los extremos del diámetro.
- **Inversión positiva con negativa:** en la positiva, punto e inverso están al mismo lado de *O* y hay circunferencia de puntos dobles; en la negativa, a distinto lado y sin puntos dobles.
- **Recta doble con recta de puntos dobles:** una recta que pasa por *O* se transforma en sí misma, pero sus puntos se mueven dentro de ella. Los únicos puntos fijos son los de la cpd.
- **Potencia de inversión con potencia de un punto:** la primera es el número *k* que define la inversión; la segunda (Tema 4) es $d^2 - r^2$ de un punto respecto de una circunferencia. Se relacionan: una circunferencia es doble si la potencia de *O* respecto de ella vale *k*.

Ponte a prueba

PAU Comunidad de Madrid 2025 (ordinaria), Pregunta 1, opción 1.1 (a elegir entre 1.1 y 1.2; 2,5 puntos). Determinar la figura inversa de la circunferencia d, y su punto T de tangencia, en la inversión positiva que transforma la circunferencia c en la recta c'. [Datos redibujados, medidos sobre el PDF oficial (A4, 1:1), con origen en el centro *C* de *c* e *y* hacia arriba: *c* de radio 24 mm; *d* de radio 16 mm y centro *D* (32; 24), tangente exterior a *c* en *T* (19,2; 14,4); *c′* es la recta vertical *x* = 72.] PDF oficial

Solución: El centro *I* tiene que estar **en *c*** (para que se convierta en recta) y en la perpendicular desde *C* a *c′*: es uno de los extremos del diámetro horizontal. Para que la inversión sea **positiva**, *c* y *c′* deben quedar al mismo lado de *I*: **I (-24; 0)**, el extremo izquierdo. Potencia: $k = 96 \cdot 48 = 4608$ mm². *T′* es el corte de la recta *IT* con *c′*: **T′ (72; 32)**. Como *d* es tangente a *c* en *T*, *d′* es tangente a *c′* en *T′*: su centro está en la **perpendicular a *c′* por *T′*** (la horizontal *y* = 32) y en la **recta *ID*** (homotecia de centro *I*). Sale el centro en (50,7; 32) y **radio 21,3 mm** $(16 \cdot 4608/3456)$. Coincide con la solución gráfica oficial. Criterio: «Determinación de I» 1,00; «Determinación de T′ inverso de T» 0,50; «Determinación de O y trazado de la solución d′» 0,75; trazado 0,25.

PAU Comunidad de Madrid 2025 (extraordinaria), Pregunta 1, opción 1.1 (a elegir entre 1.1 y 1.2; 2,5 puntos). Dibujar la figura inversa de la dada sabiendo que O es el centro de inversión y que el punto A es doble. [Datos redibujados, medidos sobre el PDF oficial (A4, 1:1), con origen en *A* e *y* hacia arriba: *O* (0; 40); *B* (-20; 20) y *C* (20; 20), unidos por el segmento *BC*; el arco *BAC* es la semicircunferencia inferior de centro (0; 20) y radio 20; los arcos *BA* y *AC* son cuartos de circunferencia de radio 20 con centros en (-20; 0) y (20; 0), tangentes a *OA* en *A*.] PDF oficial

Solución: $k = OA^2 = 1600$ (cpd de radio 40). El arco *BAC* está en una circunferencia que **pasa por *O*** (su centro está a 20 de *O* y su radio es 20): se convierte en la **recta perpendicular a *OA* por *A***, y el arco, en el segmento **B′C′**, con *B′* (-40; 0) y *C′* (40; 0) en las rectas *OB* y *OC*. El segmento *BC* no pasa por *O*: se convierte en un arco de la circunferencia de **centro *A* y radio**

40, el inferior, de B' a C' pasando por (0; -40). Los arcos BA y AC están en circunferencias **dobles** (tangentes a OA en el punto doble A: potencia de O = 1600): se convierten en los arcos $B'A$ y AC' de esas mismas circunferencias, las semicircunferencias inferiores. Coincide con la solución gráfica oficial. Criterio: 0,75 por cada tipo de línea y 0,25 por el trazado.

PAU Comunidad de Madrid 2025 (reserva 2), Pregunta 1, opción 1.1 (a elegir entre 1.1 y 1.2; 2,5 puntos). Trazar las circunferencias tangentes a las dadas que pasan por el punto P, determinando sus puntos de tangencia. [Datos redibujados, medidos sobre el PDF oficial (A4, 1:1), con origen en el centro C_1 de c_1 e y hacia arriba: c_1 de radio 19 mm; c_2 de radio 12 mm y centro C_2 (40,0; -15,0); P (13,9; -13,0) está sobre c_1.] PDF oficial

Solución: Como P está en c_1, es el **punto de tangencia** con c_1: las soluciones son tangentes en P a la recta t tangente a c_1 en P (y su centro está en la recta C_1P). Son tangentes a t y a c_2, que son inversas en las inversiones de centro en los extremos I y J del diámetro de c_2 perpendicular a t. Por tanto, los puntos de tangencia con c_2 están en las rectas PI y PJ, y cada centro es el corte de C_1P con C_2T. Salen dos: una **pequeña, de radio 8,4 mm**, que toca a c_2 por fuera en (28,2; -17,2), y una **grande, de radio 32,2 mm**, que envuelve a c_2 y la toca en (41,6; -3,1). Las dos dejan c_1 fuera. Coincide con la solución gráfica oficial (s_2 pequeña y s_1 grande). Criterio: circunferencias 1,50, puntos de tangencia 0,75 y trazado 0,25; el criterio admite también «potencia» u «homotecia».

PAU Extremadura 2024 (ordinaria, EBAU), Bloque 1, ejercicio 3 (se eligen 3 de 6; 2 puntos). INVERSIÓN. Conocido el centro de inversión, O, y una pareja de puntos inversos, A y A', determina el inverso del segmento AB y el punto inverso del C dado. [Datos redibujados, medidos sobre el PDF oficial (A3, 1:1), con origen en O e y hacia arriba: A (-19,2; 26,4) y A' (-38,5; 52,7), en la misma semirrecta (OA = 32,6 y OA' = 65,2 mm); B (-33,1; 5,0); C es el punto medio de AB, en (-26,2; 15,7).] PDF oficial

Solución: La potencia es $k = OA \cdot OA' \approx 2128$ mm² (cpd de radio 46,1, que puedes construir con el teorema del cateto). B': circunferencia por A, A' y B, que corta a OB en B', a **63,6 mm** de O. C': lo mismo con C, a **69,8 mm**. La recta AB no pasa por O, así que el segmento AB se convierte en un **arco de circunferencia que pasa por O**: la de diámetro k/d = 69,9 mm sobre la perpendicular desde O a AB (d = 30,5 mm es la distancia de O a la recta). El inverso del segmento es el arco $A'B'$ que **no** contiene a O y pasa por C'. Comprobación: A', B' y C' están en esa circunferencia. Criterio: planteamiento 0,75 y resolución 1,25.

PAU Extremadura 2026 (extraordinaria), Bloque 1, ejercicio 3 (se eligen 3 de 6; 2 puntos). INVERSIÓN. Determina los puntos inversos de A, B, C, D y E, conocidos el centro de inversión, O, y que el punto A es un punto doble. [Datos redibujados, medidos sobre el PDF oficial (A3, 1:1), con origen en O e y hacia arriba: A (-39,3; 41,4), B (30,6; 21,0), C (37,2; -5,5), D (65,5; 21,7) y E (63,5; 4,7).] PDF oficial

Solución: La cpd tiene centro O y pasa por A: radio OA = 57,1 mm, y **A' = A**. B (37,1 mm) y C (37,6 mm) están **dentro**: perpendicular a OB por B y tangente; salen **OB' = 87,8 mm** y **OC' = 86,8 mm**. D (69,0 mm) y E (63,7 mm) están **fuera**: arco capaz de 90° y perpendicular desde el

punto de tangencia; salen **OD′ = 47,3 mm** y **OE′ = 51,2 mm**. Comprobación: todos los productos $OX \cdot OX'$ valen $OA^2 \approx 3260$ mm². Ojo con el espacio: B' y C' caen lejos de O, a la derecha, así que prolonga bien las semirrectas. Criterio: planteamiento 0,75 y resolución 1,25.

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (BOE-A-2022-5521): Dibujo Técnico I y II
2. Decreto 64/2022, de 20 de julio, currículo del Bachillerato de la Comunidad de Madrid (BOCM 26-7-2022): Dibujo Técnico II, «Inversión: determinación de figuras inversas. Aplicación a la resolución de problemas de tangencias. Problemas de Apolonio»
3. Decreto 109/2022 de Extremadura (DOE n.º 164, 25-8-2022): currículo de Bachillerato, «Tangencias como aplicación de los conceptos de potencia e inversión»
4. Decreto 108/2022, de 5 de agosto, del Consell (DOGV n.º 9404): currículo de Bachillerato de la Comunitat Valenciana, Dibujo Técnico I y II
5. Orden de 30 de mayo de 2023 de la Consejería de Desarrollo Educativo y Formación Profesional (BOJA n.º 104, 2-6-2023): currículo del Bachillerato en Andalucía, Dibujo Técnico II, saber DIBT.2.A.2 («inversión (determinación de figuras inversas)»)
6. Comunitat Valenciana: acta de coordinación PAU 2027 de Dibujo Técnico II (octubre de 2026)
7. Universidad de Extremadura: criterios generales de evaluación de Dibujo Técnico, PAU 2026-2027
8. UAM: acta de la reunión de la Comisión de materia de Dibujo Técnico con los centros, 28 de octubre de 2026
9. PAU Castilla-La Mancha 2025, extraordinaria: criterios de calificación de Dibujo Técnico II (ejercicio 1a)
10. PAU Extremadura 2026, ordinaria: examen de Dibujo Técnico II
11. PAU Extremadura 2026, ordinaria: criterios específicos de corrección
12. PAU Comunidad de Madrid 2026, ordinaria: examen, criterios y soluciones de Dibujo Técnico II
13. PAU Comunidad de Madrid 2026, extraordinaria: examen, criterios y soluciones de Dibujo Técnico II
14. PAU Comunidad de Madrid 2025, ordinaria: examen, criterios y soluciones de Dibujo Técnico II
15. PAU Comunidad de Madrid 2025, extraordinaria: examen, criterios y soluciones de Dibujo Técnico II
16. PAU Comunidad de Madrid 2025, reserva 2: examen, criterios y soluciones de Dibujo Técnico II
17. A. Reventós Tarrida, «Geometría inversiva», Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona
18. C. Ayala Luna y A. M.ª de Benito Zamarrón, Dibujo Técnico II (Bachillerato a distancia), Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, CIDEAD, 2013 (glosario: «Inversión»)

Imágenes: figuras de elaboración propia de Farmeando PAU (Python y matplotlib).

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 22 de noviembre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.