La elipse: construcción, diámetros conjugados y tangentes

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en **farmeandopau.com** ›

Última revisión: 22 de noviembre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

La elipse es el lugar de los puntos cuyos **radios vectores suman 2a**, y casi todo sale de dos circunferencias: la **principal** (centro *O*, radio *a*) y la **focal** (centro en un foco, radio 2a), que contiene los **simétricos del otro foco** respecto de las tangentes. Con ellas dibujas la curva (radios vectores, afinidad, haces proyectivos), hallas los **ejes desde dos diámetros conjugados** (Rytz) y trazas **tangentes** y cortes sin dibujarla. Se pregunta en **26 de las 68 convocatorias** de 2025 y 2026, en 14 comunidades.

1 Qué es una elipse: definición, ejes, focos y circunferencias principal y focales

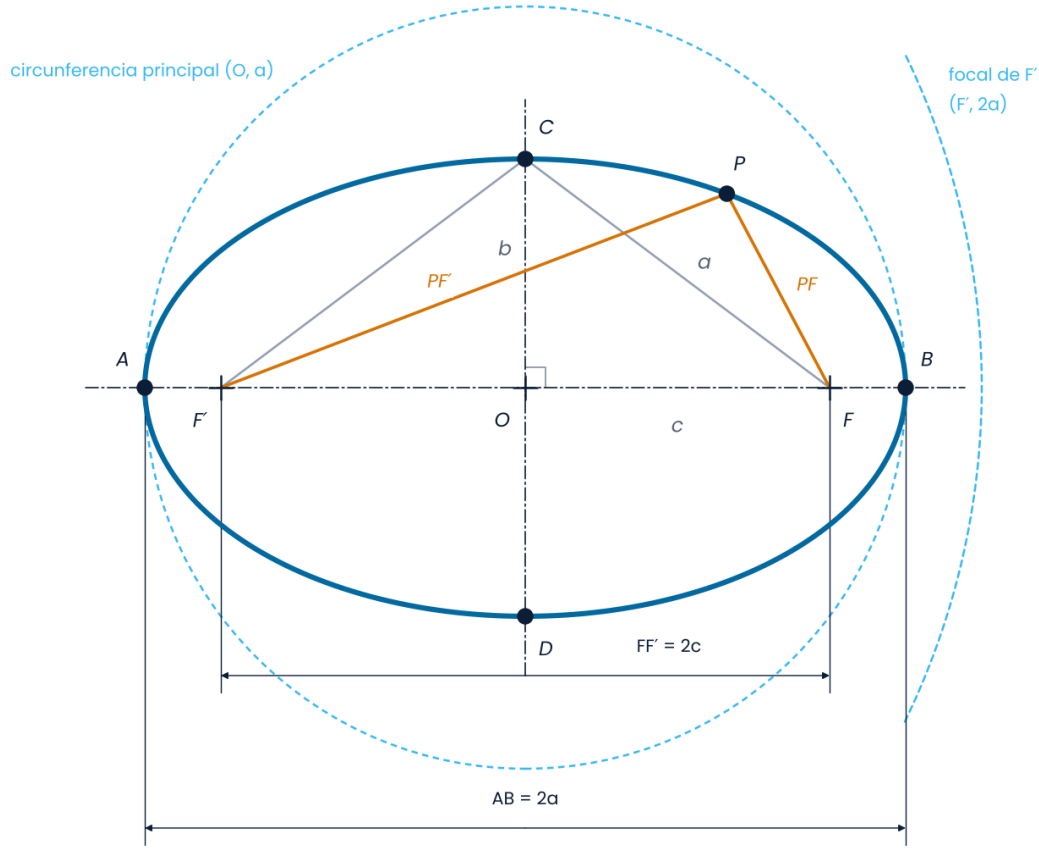
La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya **suma de distancias a dos puntos fijos**, los **focos** *F* y *F'*, es constante e igual al eje mayor: $PF + PF' = 2a$. Es una curva cerrada con dos ejes de simetría y un centro. Todas las construcciones del tema salen de esta definición y de tres circunferencias auxiliares: la **principal** y las dos **focales**. El RD 243/2022 lo pide así en Dibujo Técnico II: «Curvas cónicas: elipse, hipérbola y parábola. Propiedades y métodos de construcción. Rectas tangentes».

- **Ejes.** El **eje mayor** *AB* mide 2a y contiene los focos; el **eje menor** *CD* mide 2b y es la mediatriz de *AB*. Se cortan en el **centro** *O*. *A*, *B*, *C* y *D* son los **vértices**.
- **Distancia focal:** *FF'* = 2c. Como *C* está en la curva y equidista de los focos, $CF = CF' = a$: el triángulo *OCF* es rectángulo y $a^2 = b^2 + c^2$. De ahí salen las dos construcciones que más se usan: **focos dados los ejes** (arco de centro *C* y radio *a*: corta a *AB* en *F* y *F'*) y **eje menor dados los focos y a** (arcos de radio *a* con centro en los focos: se cortan en *C* y *D*).
- **Radios vectores:** los segmentos *PF* y *PF'* que unen un punto *P* de la curva con los focos. Suman siempre 2a, y su suma es la que se usa para dibujar por puntos.
- **Circunferencia principal:** centro *O* y radio *a*. Pasa por *A* y *B* y es el lugar de los **pies de las perpendiculares** trazadas desde un foco a las tangentes. La elipse es su figura afín (sección «Construcción por afinidad»).
- **Circunferencias focales:** centro en un foco y radio 2a (hay dos). La focal de *F'* es el lugar de los **simétricos de *F*** respecto de las tangentes. Es la herramienta de casi todos los problemas de tangentes.
- **Excentricidad:** $e = c/a$, siempre entre 0 y 1. Cerca de 0, la elipse es casi una circunferencia; cerca de 1, muy alargada. Si c = 0 los focos coinciden en *O* y la curva es una circunferencia de radio *a*.
- **De dónde sale.** Es la sección de un cono por un plano que corta a todas sus generatrices (Tema 15) y la proyección de una circunferencia cuyo plano es oblicuo al plano de proyección (Temas 11 y 16). La

comparación con la parábola y la hipérbola está en el Tema 8.

Tres medidas, un triángulo

Si conoces dos de las medidas *a*, *b* y *c*, la tercera sale del triángulo rectángulo *OCF* **con el compás**, sin calcular: arco de radio *a* desde *C* (focos) o desde un foco (vértices del eje menor). Cantabria y Castilla-La Mancha lo puntúan aparte.



Elementos de la elipse. Ejes *AB* = 2a y *CD* = 2b, focos *F* y *F′* (2c), radios vectores de *P* (ámbar), triángulo rectángulo *OCF* con $CF = a$, circunferencia principal y un arco de la focal de *F′* (azul discontinuo).

2 Construcción por puntos con radios vectores (y el método del jardinero)

Es la definición convertida en construcción. Sirve siempre que tengas los focos y la longitud 2a, y es la que piden Extremadura («Emplea al menos 16 puntos de la elipse», 2025), Galicia o Navarra cuando dan los focos y un punto.

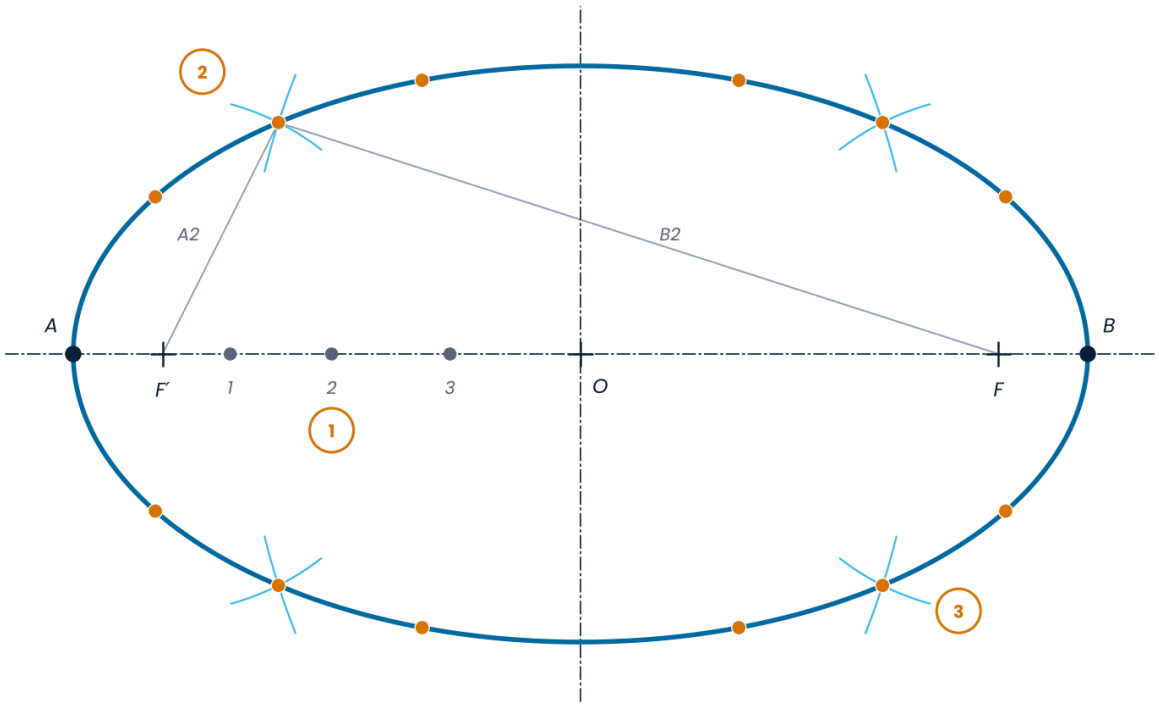
- **Por qué los puntos van entre *F′* y *O*.** Un punto de la elipse está a una distancia del foco entre $a - c$ (el vértice más cercano) y $a + c$ (el más lejano). Si *N* estuviera entre *A* y *F′*, el radio *AN* sería menor que $a - c$ y los arcos no se cortarían. Los puntos entre *O* y *F* dan los mismos resultados que los de entre *F′* y *O*.
- **El método del jardinero.** Dos estacas en los focos, una cuerda de longitud 2a atada a ellas y un palo que recorre el contorno con la cuerda tensa: en cada posición, $PF + PF' = 2a$. Madrid lo preguntó en 2026 (extraordinaria) a escala 1:100.

Paso 1: Marca en el eje mayor, **entre *F′* y *O***, varios puntos 1, 2, 3… Ponlos más juntos cerca del foco, que es donde la curva se dobla más.

Paso 2: Para un punto *N* de la división, las distancias *AN* y *BN* suman 2a. Arco de centro *F′* y radio *AN* y arco de centro *F* y radio *BN*: se cortan en dos puntos de la elipse, uno arriba y otro abajo del eje.

Paso 3: Intercambia los radios (centro *F* con radio *AN* y centro *F′* con radio *BN*): otros dos puntos, simétricos de los anteriores respecto del eje menor.

Paso 4: Repite con cada división, añade los cuatro vértices y une todos los puntos con una curva suave a mano alzada. Nunca con segmentos rectos.



Construcción por radios vectores. ① Puntos 1, 2 y 3 entre *F′* y *O*. ② Para el punto 2, arcos de centro *F′* y radio *A2* y de centro *F* y radio *B2* (azul). ③ Cada punto de división da cuatro puntos simétricos (ámbar). Los números de los círculos son los pasos del texto.

3 Construcción por afinidad: las dos circunferencias y los triángulos semejantes

La elipse es la **figura afín de su circunferencia principal** en una afinidad ortogonal de eje *AB* y razón b/a: cada punto de la circunferencia se acerca al eje en esa proporción. Es el método más rápido cuando te dan los ejes. La teoría de la afinidad está en el Tema 6.

- **Por qué funciona.** El punto tiene la abscisa de *Q* y la ordenada de *q*: es la circunferencia grande «aplastada» hacia el eje mayor en la proporción b/a. Los puntos quedan repartidos por toda la curva.
- **Con dos diámetros conjugados** (sección siguiente) la afinidad es oblicua. Te dan *MN* y *RS*: dibuja la circunferencia de diámetro *MN*, levanta *OR′* perpendicular a *MN* con *OR′* = *OM* y une *R′* con *R*. El triángulo *OR′R* define la afinidad (eje *MN*, dirección *R′R*).
- **Los triángulos semejantes.** Para cada punto *Q* de la circunferencia, baja la perpendicular a *MN* (pie *q*) y construye sobre *qQ* un triángulo *qQX* con los lados paralelos a los de *OR′R*: *X* es un punto de la elipse. Es lo que Castilla-La Mancha pidió en 2025: «Construye una elipse, por el método de los triángulos semejantes afines, conocidos dos diámetros conjugados».

- **Elipse afín a una circunferencia con otro eje y otra dirección** (te dan el eje de afinidad y un par de puntos afines): es un ejercicio de afinidad y se trabaja en el Tema 6. Ha caído en Castilla y León 2025 (ordinaria, y antes en sus modelos 2025 y 2026) y en Canarias 2026 (extraordinaria).

Paso 1: Traza dos circunferencias de centro *O*: la principal, de radio *a*, y otra de radio *b*.

↓

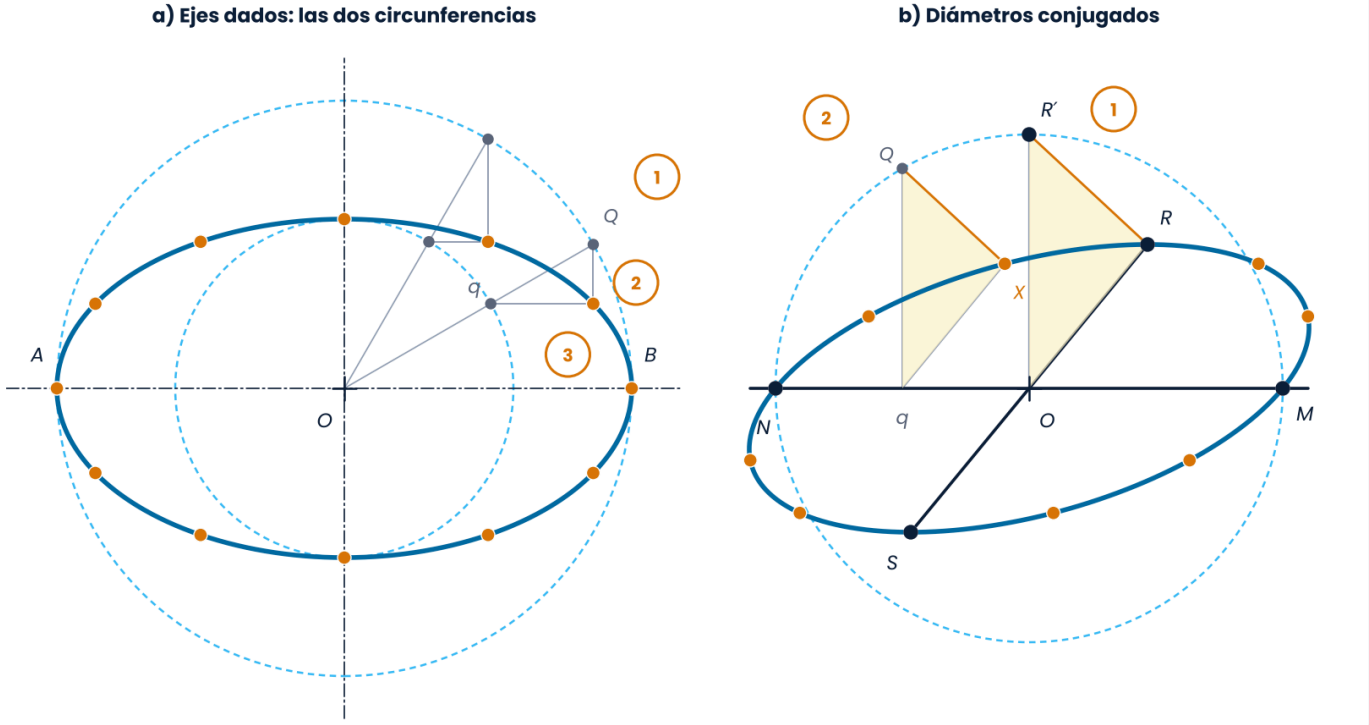
Paso 2: Traza un radio cualquiera desde *O*: corta a la grande en *Q* y a la pequeña en *q*.

↓

Paso 3: Por *Q*, la paralela al eje menor; por *q*, la paralela al eje mayor. Se cortan en un punto de la elipse. Repite con radios cada 30° (12 puntos) o cada 15° (24 puntos).

Un óvalo no es una elipse

El óvalo (Tema 3) son cuatro arcos de circunferencia enlazados y no cumple $PF + PF' = 2a$. Si te piden una elipse, dibújala por puntos. Andalucía lo dice expresamente para la isométrica: «Esta proyección nunca se podrá sustituir por un óvalo».



Elipse por afinidad. a) Ejes dados: ① las dos circunferencias; ② un radio las corta en *Q* y *q*; ③ las paralelas a los ejes por *Q* y *q* se cortan en un punto de la curva. b) Diámetros conjugados *MN* y *RS*: ① triángulo *OR′R*; ② cada triángulo *qQX* semejante a él da un punto *X*. Los números son los pasos del texto.

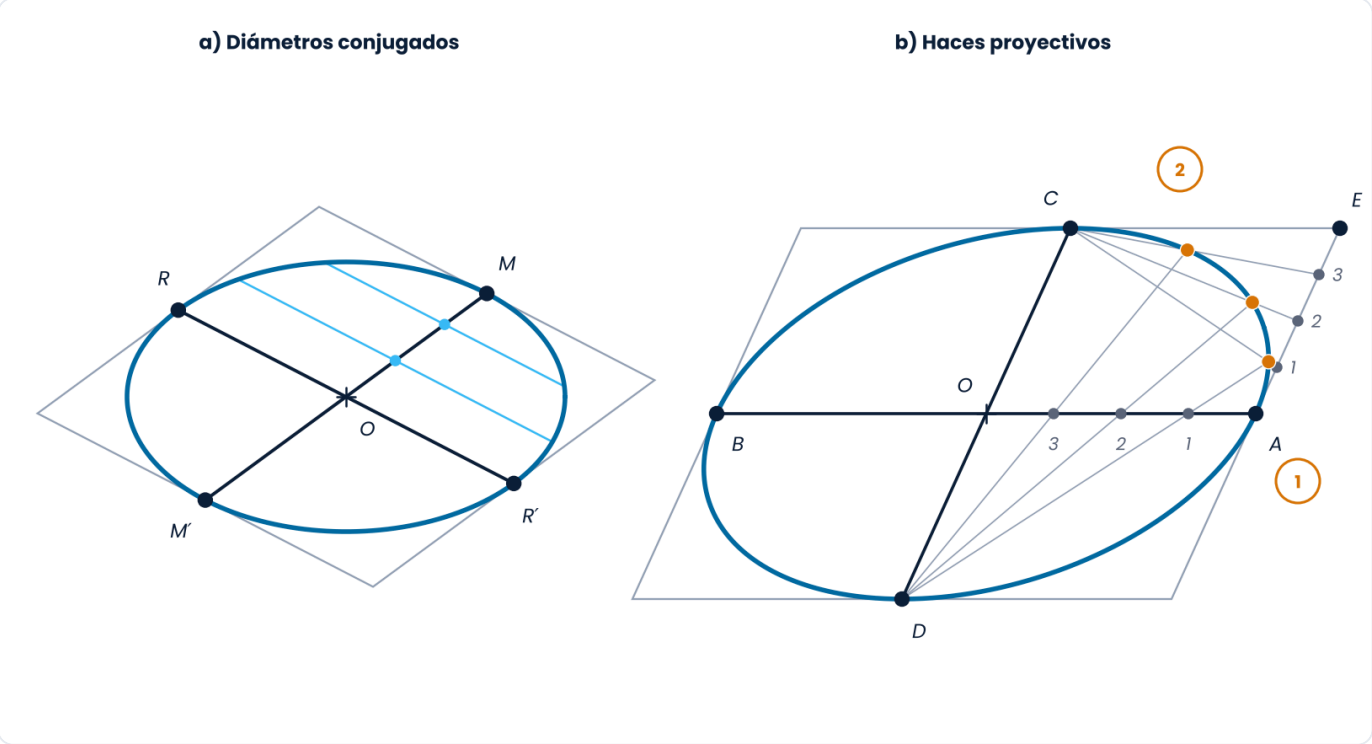
4 Diámetros conjugados y construcción por haces proyectivos

Un **diámetro** es cualquier cuerda que pasa por el centro. Dos diámetros son **conjugados** cuando cada uno divide en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas al otro. Son los afines de dos diámetros perpendiculares de la circunferencia principal, y aparecen en cuanto la elipse no está «de frente».

- **Las tangentes.** Las tangentes en los extremos de un diámetro son **paralelas a su conjugado**. Por eso dos diámetros conjugados *MM′* y *RR′* definen un **paralelogramo circunscrito** a la elipse, que toca la curva en los cuatro extremos.
- **Los ejes son el único par de diámetros conjugados perpendiculares.** En la circunferencia lo son todos los pares perpendiculares; en la elipse, solo los ejes. Por eso hay que buscarlos con una

construcción (sección siguiente).

- **Teoremas de Apolonio** (sirven para comprobar). Si a' y b' son dos semidiámetros conjugados y θ el ángulo que forman: $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ y $a'\,b'\,\sin\theta = a\,b$. El paralelogramo circunscrito tiene siempre la misma área que el rectángulo de los ejes.
- **Haces proyectivos.** En el paralelogramo de dos diámetros conjugados (o en el rectángulo de los ejes, que es un caso particular), divide el semidiámetro *OA* y el lado *AE* (de *A* a la esquina *E*) en el mismo número de partes iguales, **numeradas las dos desde *A***. Une *C* con las divisiones de *AE* y *D* con las de *OA*: los rayos del mismo número se cortan en un punto de la elipse.
- **Completa por simetría.** Eso da un cuarto de curva: repite en los otros tres cuartos o lleva los simétricos respecto de *O*.
- **Por qué funciona.** Los rayos que salen de *C* y de *D* forman dos haces proyectivos, y los cortes de dos haces proyectivos están en una cónica que pasa por sus vértices. Murcia lo tiene en su lista: «Trazado de elipses a partir de radio vectores, circunferencias afines y haces proyectivos».



Diámetros conjugados y haces proyectivos. a) *MM′* y *RR′* son conjugados: el paralelogramo de tangentes tiene los lados paralelos a ellos y *MM′* divide en dos las cuerdas paralelas a *RR′* (azul). b) ① *OA* y *AE* divididos en cuatro partes desde *A*; ② los rayos desde *C* y desde *D* del mismo número se cortan en puntos de la elipse (ámbar).

5 Los ejes a partir de dos diámetros conjugados: construcción de Rytz

Es el ejercicio de Murcia 2026 (resuelto abajo) y de Madrid 2026 (ordinaria), y Castilla-La Mancha lo incluye en sus directrices: «Sí se contempla el trazado de los ejes de la elipse a partir de diámetros conjugados». La construcción de Rytz da los ejes en cuatro trazos, sin dibujar la curva.

- **Por qué funciona.** La recta N_1M corta a los dos ejes en *S* y *R*, y la distancia de N_1 a cada corte es un semieje: Rytz se basa en el método de la «tira de papel», en el que un punto de una regla que apoya dos marcas en los ejes describe la elipse. En el examen no se pide demostrarlo, pero sí trazarlo limpio y nombrar los puntos.
- **Otra lectura (la de la solución oficial de Murcia).** Circunferencia de centro *K* y radio KN_1 (la de diámetro N_1M): la recta *OK* la corta en dos puntos que están a *a* y a *b* de *O*. La paralela por *O* a la

recta que une N_1 con el punto situado a *a* de *O* es el **eje mayor**; la paralela a la que lo une con el punto situado a *b*, el menor. No los cambies. Da los mismos ejes, y en las dos puedes girar *ON* hacia cualquier lado.

- **Otra vía: la afinidad.** Madrid resolvió los ejes en 2026 (ordinaria) con la afinidad entre la elipse y la circunferencia de diámetro *AB*, y su solución avisa: «Otras construcciones son también posibles». Rytz es más corta.
- **Comprobación.** Con Apolonio: $a^2 + b^2$ es la suma de los cuadrados de los semidiámetros dados.

Paso 1: Gira 90° alrededor de *O* uno de los semidiámetros: *ON* pasa a ON_1 (perpendicular a *ON* y de la misma longitud).

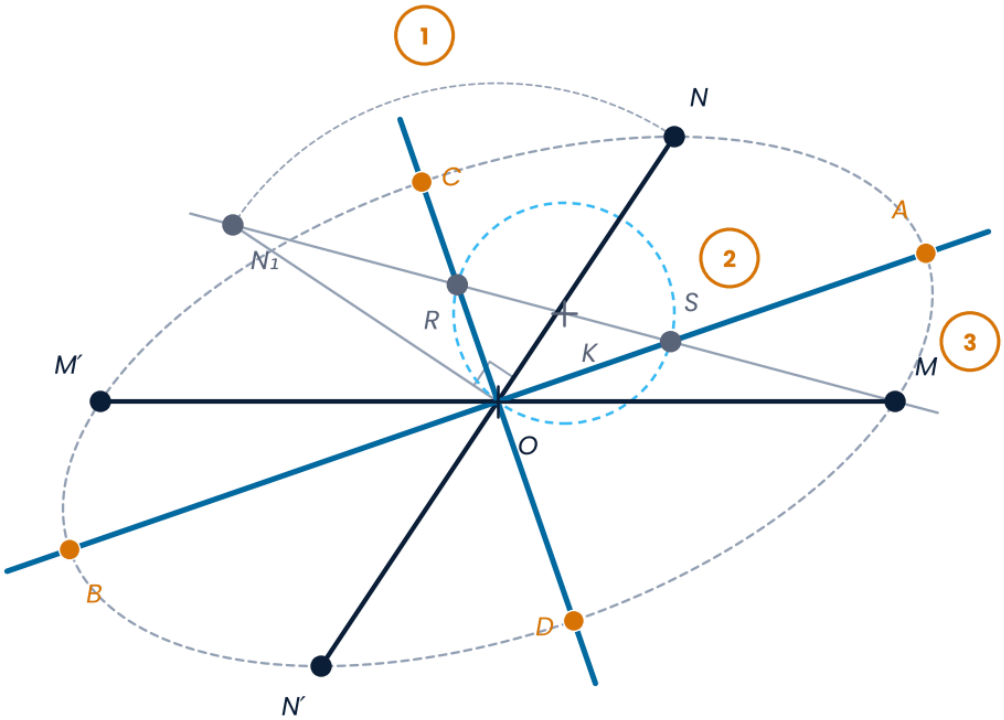
Paso 2: Une N_1 con el extremo *M* del otro semidiámetro y halla el punto medio *K* de N_1M.

Paso 3: La circunferencia de centro *K* que pasa por *O* corta a la recta N_1M en *R* y *S*. El **eje mayor va por *OS*** (*S* es el corte más próximo a *M*) y el menor por *OR*.

Paso 4: Los semiejes miden $a = N_1S$ y $b = N_1R$ (también $a = RM$ y $b = SM$). Llévalos desde *O* sobre cada eje para tener *A*, *B*, *C* y *D*. Los focos, con el arco de radio *a* desde *C*.

El eje mayor no va por cualquier corte

Si llevas el eje mayor por *R* en lugar de por *S*, los ejes salen cambiados y la elipse no pasa por *M* y *N*. Comprueba que el eje mayor queda dentro del ángulo agudo que forman los dos diámetros dados, más cerca del mayor de ellos, y que $a > b$.



Construcción de Rytz. ① (paso 1) *ON* girado 90° da ON_1. ② (pasos 2 y 3) Punto medio *K* de N_1M y circunferencia de centro *K* por *O*: corta a N_1M en *R* y *S*. ③ (paso 4) Ejes por *OS* (mayor) y *OR* (menor), con $a = N_1S$ y $b = N_1R$. La elipse gris discontinua es solo de comprobación.

6 Tangente y normal en un punto de la elipse

La tangente en un punto P de la elipse es la **bisectriz exterior** del ángulo que forman los radios vectores PF y PF'; la **normal** (perpendicular a la tangente en P) es la bisectriz interior. Es la propiedad de reflexión: un rayo que sale de un foco se refleja en la curva y pasa por el otro foco.

- **Dos propiedades que se usan al revés.** El simétrico F_1 de un foco respecto de cualquier tangente está en la **focal del otro foco**, porque $F'F_1 = F'P + PF = 2a$. Y el pie H de la perpendicular desde un foco a una tangente está en la **circunferencia principal**: H es el punto medio de FF_1 y O el de FF', así que $OH = F'F_1/2 = a$. Con estas dos frases se resuelven todas las tangentes del tema.
- **Tangente por afinidad.** Si dibujaste la elipse con las dos circunferencias, traza la tangente a la principal en el punto Q afín de P: corta al eje AB en un punto doble E. La recta EP es la tangente a la elipse en P.
- **Justificar.** Castilla-La Mancha (2026) pide trazar la normal «justificando su construcción». Escribe junto al dibujo que la tangente es la bisectriz exterior del ángulo que forman los radios vectores PF y PF', y que la normal, perpendicular a ella en P, es la bisectriz interior del ángulo FPF'.
- **Cuidado.** En los vértices la tangente es perpendicular al eje, pero en un punto cualquiera **no es perpendicular a OP**: eso solo pasa en la circunferencia.

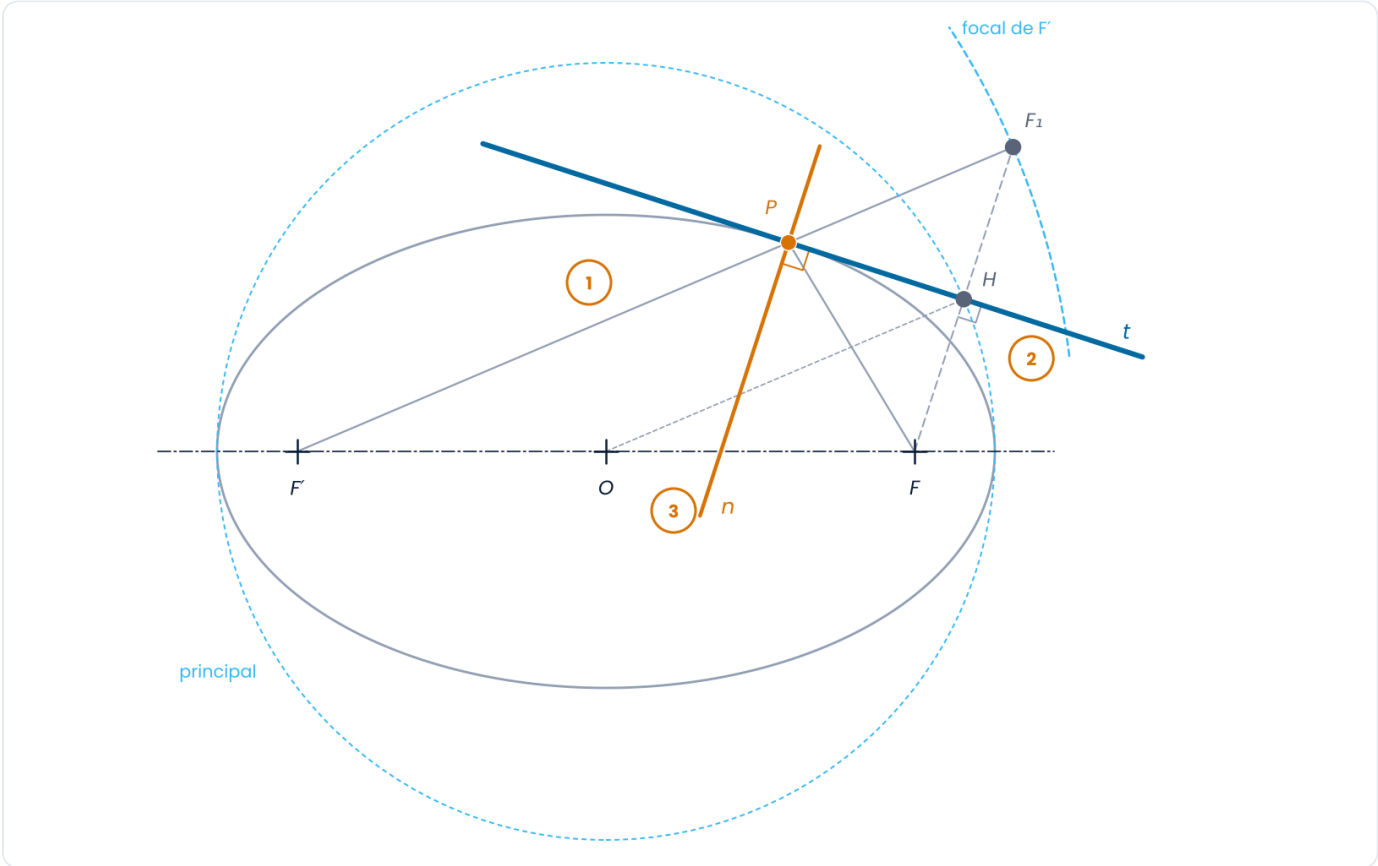
Paso 1: Une P con los dos focos y prolonga $F'P$ más allá de P.

↓

Paso 2: Lleva PF sobre esa prolongación: el punto F_1 es el **simétrico de F** respecto de la tangente. La tangente t es la mediatriz de FF_1 (o la bisectriz del ángulo FPF_1).

↓

Paso 3: La normal n es la perpendicular a t por P: divide en dos partes iguales el ángulo FPF'.



Tangente y normal en P. ① Radios vectores PF y PF' y prolongación de $F'P$. ② F_1, simétrico de F respecto de t: está en la focal de F', y el punto medio H de FF_1 está en la circunferencia principal. ③ La normal n (ámbar) es la bisectriz interior del ángulo FPF'.

7 Tangentes desde un punto exterior y paralelas a una dirección

Son las dos preguntas de tangentes que más se repiten: **desde un punto *P*** (Murcia, Cantabria, La Rioja, Asturias, Canarias) y **paralelas a una dirección** (Aragón, Madrid). Las dos se resuelven **sin dibujar la elipse**, con la circunferencia focal o con la principal. Castilla-La Mancha avisa en sus directrices: «no se considerarán ejercicios de tangentes paralelas a una dirección dada»; y allí, además, «sí será necesario dibujar la curva», así que construyes las tangentes sin ella y después la dibujas.

- **Por qué funciona.** Si t es tangente, el simétrico G de F' respecto de t está en la focal de F. Y como P está en t, que es la mediatriz de $F'G$, se cumple $PG = PF'$. Así que G está en dos circunferencias que conoces sin dibujar la elipse.
- **Cuántas soluciones.** Desde un punto exterior, dos tangentes; desde un punto de la curva, una; desde un punto interior, ninguna (la circunferencia de centro P no corta a la focal). Paralelas a una dirección hay siempre dos, simétricas respecto de O.
- **El punto de tangencia se construye.** Con la focal, T es el corte de FG con la tangente. Con la principal, T está en la paralela a OH por F (porque OH es paralela a FG). Murcia lo puntúa aparte: «1.5 puntos por cada recta tangente. Si no obtiene puntos de tangencia la recta se valorará con 1 punto».
- **Qué foco usar.** La circunferencia de centro P pasa por un foco (mejor el más cercano a P) y la focal es la **del otro**.

Desde P, por la focal

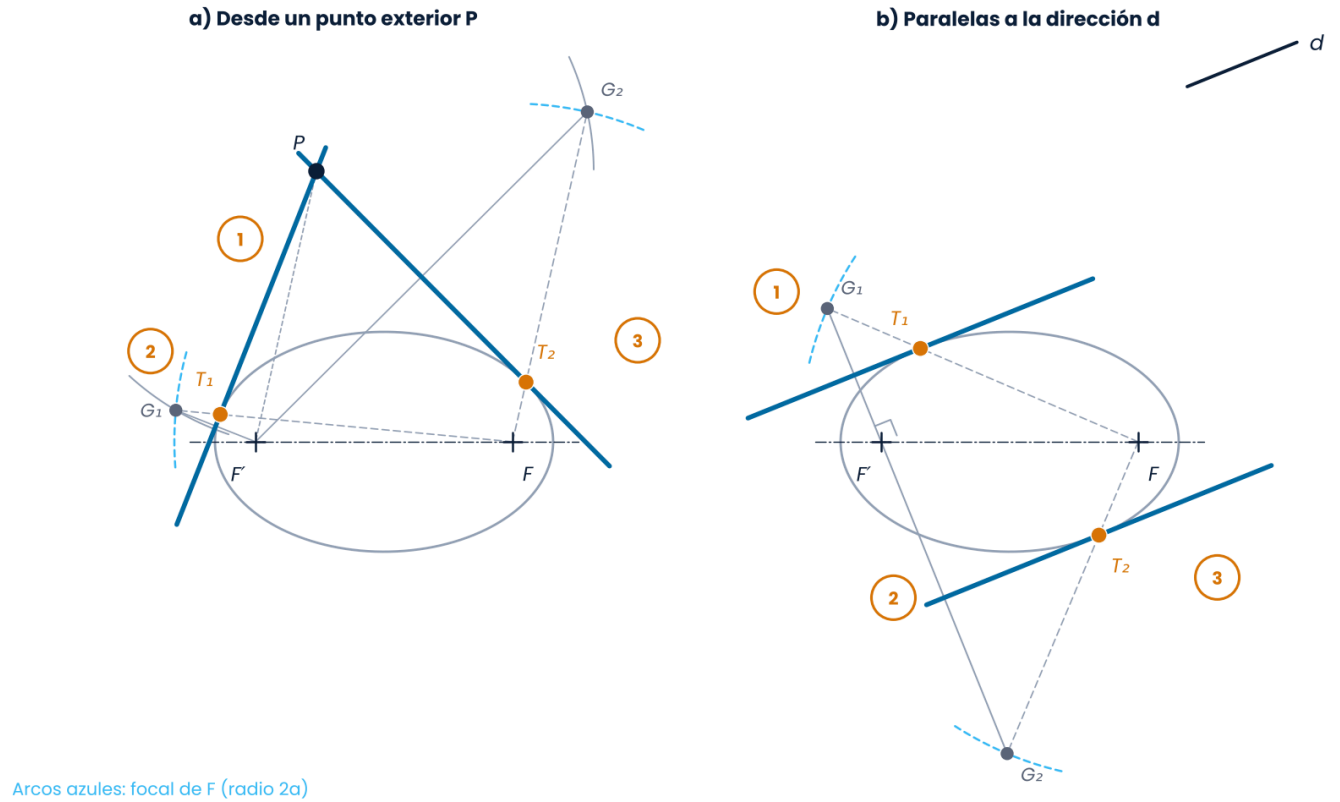
Circunferencia de centro P y radio PF'; corta a la focal de F (centro F, radio $2a$) en G_1 y G_2. Las tangentes son las **mediatrices de $F'G_1$ y $F'G_2$**, que pasan por P. Cada punto de tangencia está en la recta FG.

Desde P, por la principal

Circunferencia de diámetro PF' (arco capaz de 90°); corta a la principal en H_1 y H_2, pies de las perpendiculares desde F'. Las tangentes son PH_1 y PH_2. Es el método de la solución oficial de Murcia 2026.

Paralelas a una dirección d

Perpendicular a d por F': corta a la focal de F en G_1 y G_2. Las tangentes son las mediatrices de $F'G_1$ y $F'G_2$ (paralelas a d), con los puntos de tangencia en FG_1 y FG_2. Con la principal: la misma perpendicular la corta en los pies H de las tangentes.



Tangentes sin dibujar la elipse. a) Desde P: ① arcos de centro P y radio PF'; ② cortan a la focal de F en G_1 y G_2; ③ las tangentes son las mediatrices de $F'G$ y T está en FG. b) Paralelas a d: ① perpendicular a d por F'; ② corta a la focal de F en G_1 y G_2; ③ mediatrices de $F'G$ y puntos T en FG.

8 Hallar la elipse con focos, tangentes y puntos (problemas inversos)

Muchas comunidades no dan los ejes: dan un foco, tangentes, puntos o arcos de las focales, y tienes que reconstruir F' y $2a$ antes de dibujar nada. La clave es siempre la misma: **cada tangente te da un punto de la focal del otro foco** (el simétrico del foco conocido), y cada punto de la curva te da una suma de distancias.

- **Eje mayor y una tangente *t*** (el camión cisterna del País Vasco 2025): la circunferencia principal corta a t en los pies H_1 y H_2 de las perpendiculares desde los focos, así que las perpendiculares a t por H_1 y H_2 cortan al eje mayor en F y F'. Con a y c, el eje menor sale con el arco de radio a desde un foco.
- **Eje mayor y un punto *Q*** (los arcos de elipse de los contornos del País Vasco). Conoces a y la recta del eje; b sale por afinidad: la perpendicular al eje por Q corta a la principal en Q', y la recta OQ' corta a la paralela al eje por Q en un punto W. Entonces $OW = b$.
- **Elipse inscrita en un rectángulo** (La Rioja 2026, Asturias 2025). En un rectángulo caben infinitas elipses tangentes a los cuatro lados; la de los exámenes es la que los toca en sus puntos medios. Sus ejes son las medianas del rectángulo, y los lados, las tangentes en los vértices. Si es un paralelogramo y la elipse toca los lados en sus puntos medios, las medianas son dos diámetros conjugados: Rytz.
- **Comprueba que $c < a$.** Si no, has tomado mal un simétrico (o la cónica es una hipérbola: Tema 8).

Te dan	Cómo obtienes lo que falta	PAU
Los ejes AB y CD	Focos: arco de centro C y radio a sobre AB	Cantabria 2025, La Rioja 2026, Aragón 2026
El centro O, un vértice A y $2c$	$a = OA$; focos a c de O; C y D con arcos de radio a desde los focos	Extremadura 2025

Te dan	Cómo obtienes lo que falta	PAU
Los focos y un punto P	$2a = PF + PF'$	Galicia 2025, Navarra 2024
Arcos de las dos focales	Centros de los arcos (mediatrices de dos cuerdas) = focos; radio = 2a	Andalucía 2025 y modelos 2026-2027
La circunferencia principal y un foco	Centro = O, radio = a; F' simétrico de F respecto de O	Extremadura (modelo 2025)
Los focos y una tangente t	F_1 = simétrico de F respecto de t; $2a = F'F_1$; el punto de tangencia es el corte de $F'F_1$ con t	Castilla y León (modelo), C. Valenciana 2025
Un foco, una tangente y su punto P, y 2a	F' está en la recta F_1P, a 2a de F_1	Castilla-La Mancha 2026
Un foco y tres tangentes	Los tres simétricos de F están en la focal de F': el centro de la circunferencia que pasa por ellos es F', y su radio, 2a	Castilla y León 2026

Con un foco, dos tangentes y la distancia focal (Madrid 2024), F' está en la mediatriz de los dos simétricos de F y a 2c de F. Con un foco, dos tangentes y el punto de contacto de una (La Rioja 2024), F' está en la recta que une ese punto con el simétrico de F. Con un foco, una tangente, 2a y 2c (C. Valenciana 2025), F' es el corte de la circunferencia de centro el simétrico de F y radio 2a con la de centro F y radio 2c.

La frase que lo resuelve todo

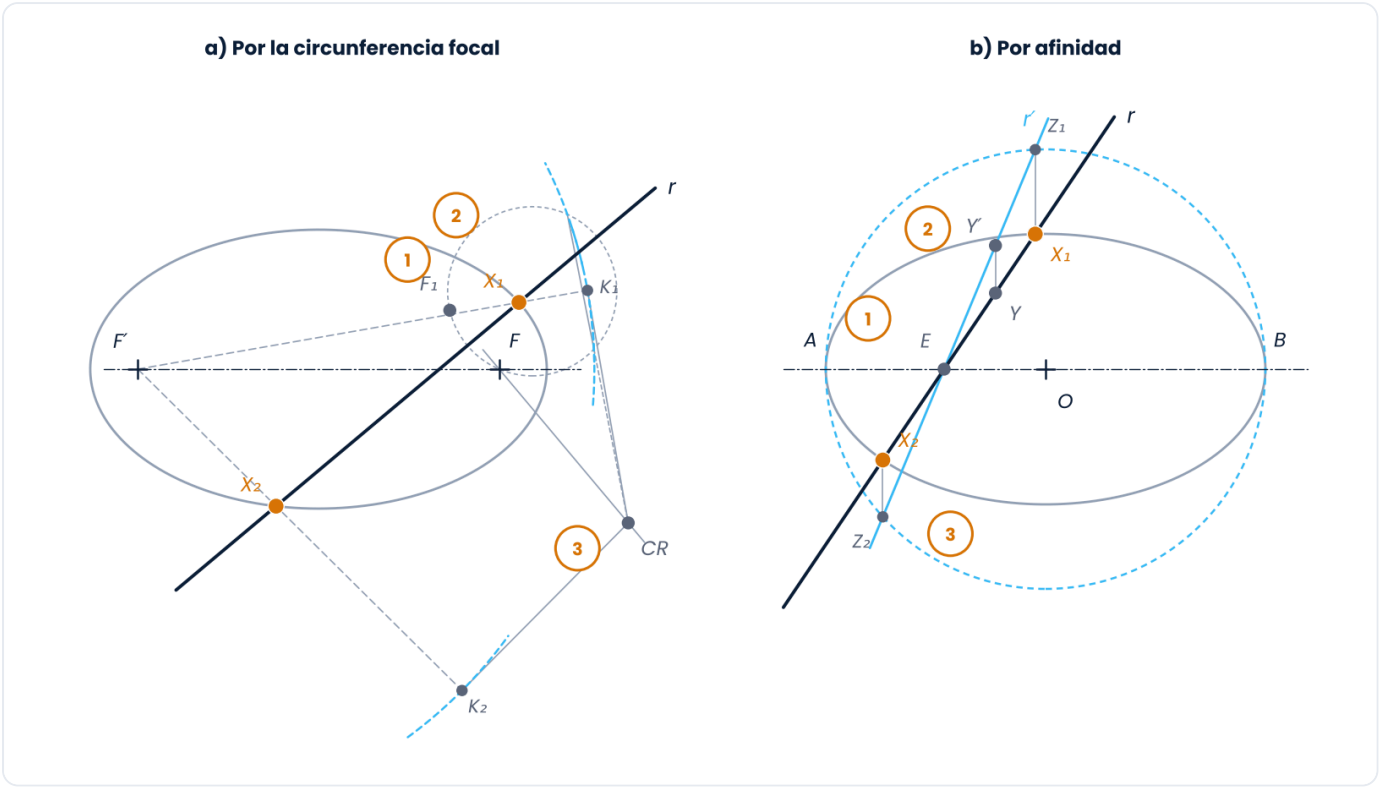
El simétrico de un foco respecto de una tangente está en la focal del otro foco. Con ella sacas F' (tres tangentes), 2a (focos y una tangente) y los puntos de tangencia, que siempre están en la recta que une el otro foco con el simétrico.

9 Intersección de una recta con la elipse

Se trata de hallar dónde corta una recta r a la elipse **sin dibujar la curva**, o sin fiarte de ella. Lo pidió Madrid en su modelo de 2025 («Justificar razonadamente la construcción realizada») y en una reserva de 2025; Castilla y León lo tiene en su guía («Rectas tangentes e intersección con una recta») y Castilla-La Mancha lo excluye: «No se contemplan ejercicios de intersección recta- cónica».

- **Por afinidad (el camino corto).** Lleva r a su afín r' respecto de la circunferencia principal (eje AB, dirección perpendicular a AB). Un punto de r' es E, donde r corta a AB: es doble. Para otro punto, toma Y en r y halla su afín Y' en la perpendicular a AB por Y, con el par $C \to C'$ (C' es el punto de la principal en la recta del eje menor): la recta CY corta a AB en un punto doble; únelo con C' y donde esa recta corte a la perpendicular por Y está Y'.
- **Si r es paralela a AB** (el caso del modelo 2025 de Madrid), no hay punto doble E: r' también es paralela al eje. Basta hallar el afín de un punto de r (con el par $C \to C'$) y trazar por él la paralela a AB. La solución oficial lo dice así: «La recta r', homóloga de r, será, como ésta, paralela al eje y puede trazarse si se determina previamente uno de sus puntos».
- **Y vuelves.** $r' = EY'$ corta a la principal en Z_1 y Z_2. Las perpendiculares a AB por Z_1 y Z_2 cortan a r en los puntos buscados X_1 y X_2. Para justificarlo, basta decir que la afinidad conserva la pertenencia: si Z está en la circunferencia y en r', su afín está en la elipse y en r. La solución oficial de Madrid (reserva 2 de 2025) añade: «Las circunferencias principales o focales pueden ser igualmente utilizadas para la resolución»; la del modelo 2025 propone como alternativa la circunferencia focal resuelta por potencia (punto siguiente).
- **Por la circunferencia focal (potencia).** Un punto X de r está en la elipse si la circunferencia de centro X que pasa por F es tangente interior a la focal de F', porque $XF' = 2a - XF$. Esa circunferencia pasa también por F_1, simétrico de F respecto de r. El problema es un Apolonio PPC (dos puntos y una circunferencia: Tema 4).

- **Cómo se traza el PPC.** Circunferencia auxiliar por F y F_1 (con centro en r) que corte a la focal. Su cuerda común con la focal corta a la recta FF_1 en el centro radical CR. Las tangentes desde CR a la focal la tocan en K_1 y K_2, y las rectas $F'K_1$ y $F'K_2$ cortan a r en X_1 y X_2.
- **Cuántos cortes.** Dos, uno (recta tangente) o ninguno: si r' no corta a la principal, la recta es exterior.



Intersección de r con la elipse. a) Por la focal: ① F_1, simétrico de F respecto de r; ② circunferencia auxiliar por F y F_1 y centro radical CR; ③ tangentes desde CR a la focal (K_1, K_2) y rectas $F'K$. b) Por afinidad: ① E, punto doble; ② Y', afín de Y, y recta r'; ③ Z_1 y Z_2 vuelven a r por perpendiculares al eje.

10 Qué te piden en tu comunidad

La elipse se pregunta en **26 de las 68 convocatorias** ordinarias y extraordinarias de 2025 y 2026, en **14 comunidades** (0,31 puntos de media por examen). No ha caído en Baleares, Cataluña ni Navarra, lo que no quiere decir que no vaya a caer.

Comunidad	Cómo te lo piden	Puntos	Estado
Andalucía (y Ceuta y Melilla)	Ejercicio 1 (1A o 1B; obligatorio en 2025). Elipse dada por **arcos de las dos focales** (focos, centro, ejes y curva) en 2025 extraordinaria, repetida como 1B en los modelos 2026 y 2027; en la reserva 3 de 2026, foco, vértice, un punto y un arco de la focal, con la tangente en P. Las directrices piden las cónicas «resolviendo su trazado por puntos o por homología respecto a la circunferencia».	2,5	Entra
Aragón	Ejercicio 1B (a elegir con 1A). En 2026 ordinaria, elipse dada por sus ejes: **tangentes paralelas a una dirección** d con sus puntos de tangencia y dos puntos de la curva. Los criterios puntúan «Focos, CfocalF2 y Perpend.F1».	2,75	Entra
Asturias	Ejercicio 1, opción B (se hacen 4 de los 5 ejercicios). En 2025 extraordinaria, **tangentes desde P** a la elipse inscrita en un rectángulo, sin dibujarla: focos 1,25 y tangentes 1,25. La elipse en diédrico (2025 y 2026) es del Tema 11.	2,5	Entra
Baleares	Pregunta 1: hasta ahora, con problemas de nivel de Dibujo Técnico I. No ha caído en 2025-2026; en 2024 sí, en las dos convocatorias: dibujar la elipse dados los semiejes (opción B1).	3	Entra

Comunidad	Cómo te lo piden	Puntos	Estado
Canarias	Ejercicio 1: croquis de enlaces a 1:1 (1a o 1b desde 2026). Uno de los seis enlaces es casi siempre una **recta tangente a una elipse**: en un punto de la curva (2025 ordinaria y extraordinaria) y desde un punto exterior (2026 ordinaria, desde el centro O_4, que la solución oficial resuelve con la circunferencia focal; modelos 2026 y 2027, desde P, con la elipse dada por sus focos). La elipse afín de 2026 extraordinaria es del Tema 6.	2	Entra
Cantabria	Pregunta 1, obligatoria: potencia o cónicas. En 2025 ordinaria, el **balón de rugby**: ejes, focos y tangentes desde P con sus puntos (resuelto en este tema). Su documento pide trazar las cónicas «principalmente por puntos (alternativamente, por homología respecto a la circunferencia)» y el examen no admite «soluciones obtenidas por tanteo».	2,5	Entra
Castilla-La Mancha	Pregunta 1 (1a o 1b). Elipse por **diámetros conjugados**: por triángulos semejantes afines (método impuesto) en 2025 ordinaria, y con método libre en los modelos 2026 y 2027. En 2026 ordinaria, elipse dada por un foco, una tangente y su punto, con la **normal justificada** (resuelto en este tema). Sus directrices 2026-27 admiten tangentes «por un punto de la curva y por un punto exterior», las normales y «el trazado de los ejes de la elipse a partir de diámetros conjugados», y exigen dibujar la curva («sí será necesario dibujar la curva»). Descartan dos casos: «no se considerarán ejercicios de tangentes paralelas a una dirección dada» y «No se contemplan ejercicios de intersección recta-cónica».	2,5 (3 en 2025)	En parte: «no se considerarán ejercicios de tangentes paralelas a una dirección dada» y «No se contemplan ejercicios de intersección recta-cónica» (Directrices 2026/2027)
Castilla y León	Ejercicio 1 (A1 o A2): una de las opciones suele ser de cónicas. Ejes de una elipse dados **un foco y tres tangentes**, con los puntos de tangencia (2026 extraordinaria), y dados los focos y una tangente (modelo). La elipse afín a una circunferencia, con focos y circunferencia principal (2025 ordinaria), es del Tema 6.	2,5	Entra
Cataluña	No ha caído en 2025-2026. Su lista de geometría plana no nombra las cónicas; la elipse solo aparece como sección plana de un cilindro o de un cono en el dibujo de diédrico (Tema 15).	3	En parte: la lista de geometría plana no nombra las cónicas; sí entran como secciones planas de conos y cilindros en el ejercicio de diédrico
C. Valenciana	Pregunta 1 (1A o 1B). En 2025, elipse dada por **un foco, una tangente, 2a y 2c**: segundo foco, ejes y punto de tangencia (extraordinaria); con los focos y una tangente, el punto de tangencia y los ejes (reserva). No ha caído en 2026.	2,5 (1,5 en 2025)	Entra
Extremadura	Bloque 1 (se eligen 3 de 6 ejercicios; en 2027, uno de dos). En 2025 ordinaria, elipse dados el centro, un vértice del eje mayor y la distancia focal de 60 mm, con «al menos 16 puntos» (repetida en el modelo 2026); en el modelo 2025, ejes y segundo foco dados la circunferencia principal y un foco. En 2026 la cónica fue una parábola.	2 (2,5 en 2027)	Entra
Galicia	Pregunta 2 (2.1 o 2.2). En 2025 extraordinaria, **elipse dados la distancia focal y un punto P**, con la tangente en P (repetida en el modelo 2027, que tiene solución gráfica oficial).	2,25	Entra
La Rioja	Apartado A (competencial, uno de dos; obligatorio en 2025 extraordinaria). Semielipse de un **tejado** tangente a dos lados dado un foco (2025 extraordinaria), **edificio de base elíptica** inscrito en un terreno rectangular (2026 ordinaria) y **piscina elíptica** con los caminos tangentes desde la puerta P (2026 extraordinaria).	2,5	Entra

Comunidad	Cómo te lo piden	Puntos	Estado
Madrid	Pregunta 1 (1.1 o 1.2), casi siempre con contexto. **Tangentes paralelas a una recta** (2025 extraordinaria), ejes y focos desde dos **diámetros conjugados** (2026 ordinaria, por afinidad), el **jardinero** a escala 1:100 (2026 extraordinaria) e **intersección de una recta** con la elipse por afinidad (modelo y reserva de 2025).	2,5	Entra
Murcia	Bloque I (uno de dos). En 2026 ordinaria, **ejes desde dos diámetros conjugados y tangentes desde *P*** (resuelto en este tema); su lista (acta de 10-10-2024) incluye radios vectores, «circunferencias afines» y haces proyectivos, y el acta de 17-9-2026 mantiene para 2027 «el mismo formato y contenido de las pruebas 2026».	10 (30 % de la nota)	Entra
Navarra	Ejercicio 1 (cónicas o tangencias, uno de dos). La elipse no ha caído en 2025-2026; en 2024 sí: ejes de la elipse de focos dados que pasa por *P*, con un cuadrante por puntos y la tangente en *P*.	2	Entra
País Vasco	Bloque A: el contorno de una pieza real con enlaces y un **arco de elipse** por puntos: grifo (modelo 2025), cisterna de camión dada por el eje mayor de 2,5 m y una tangente desde *P* (2025 extraordinaria) y leva balancín con eje mayor y un vértice (2026 ordinaria).	3	Entra

«Puntos» son los del ejercicio en que cae. Que algo no haya caído en 2025-2026 no significa que no vaya a caer: la PAU nueva solo lleva dos convocatorias.

11 Ejercicio resuelto: ejes desde dos diámetros conjugados y tangentes desde un punto (Murcia 2026)

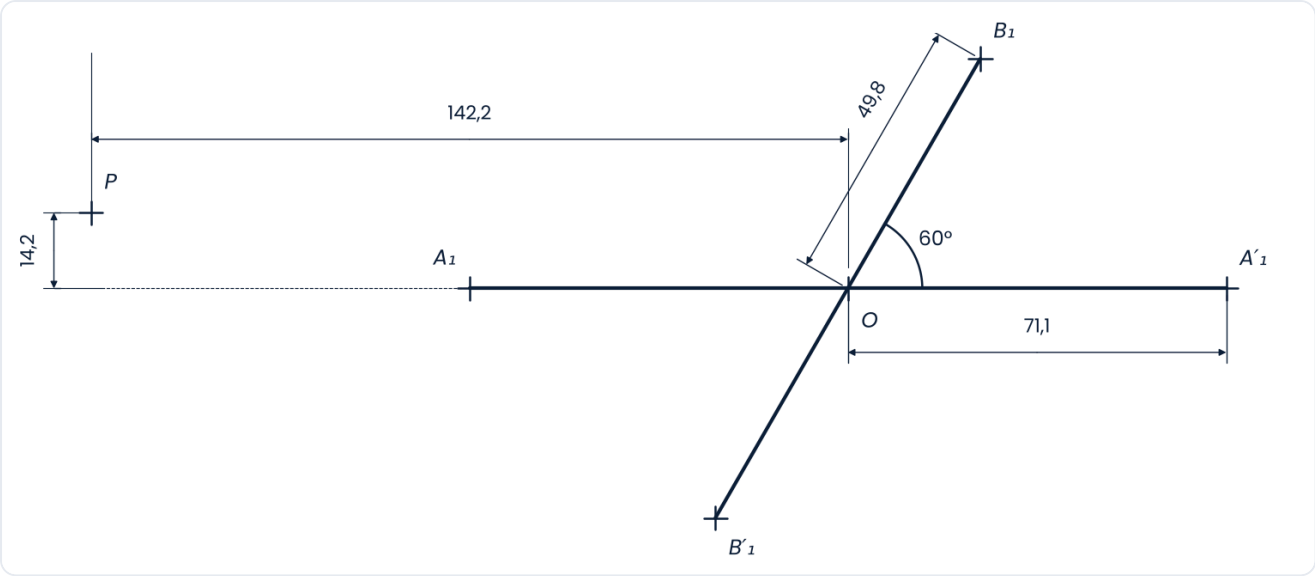
PAU REGIÓN DE MURCIA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA (JUNIO) · BLOQUE I, EJERCICIO 2 (A ELEGIR ENTRE LOS EJERCICIOS 1 Y 2; SE PUNTÚA SOBRE 10 Y PESA EL 30 % DE LA NOTA)

Obtener los ejes de la elipse definida a partir de la pareja de diámetros conjugados de la figura (A1-A'1, B1-B'1). Posteriormente trazar las rectas tangentes a la elipse desde el punto exterior P. Se recomienda girar la hoja posicionándola en forma apaisada.

Datos (redibujados del examen, medidos en la geometría vectorial del PDF oficial y con la hoja ya girada): diámetro $A_1A'_1$ horizontal de **142,2 mm** (semidiámetro 71,1) con centro O; diámetro $B_1B'_1$ de **99,6 mm** (semidiámetro 49,8), que forma **60°** con OA'_1, con B_1 arriba a la derecha. El punto P está **142,2 mm a la izquierda** de O y **14,2 mm por encima** de la recta $A_1A'_1$.

a) Obtener los ejes de la elipse definida a partir de la pareja de diámetros conjugados de la figura (A1-A'1, B1-B'1). (6 puntos)

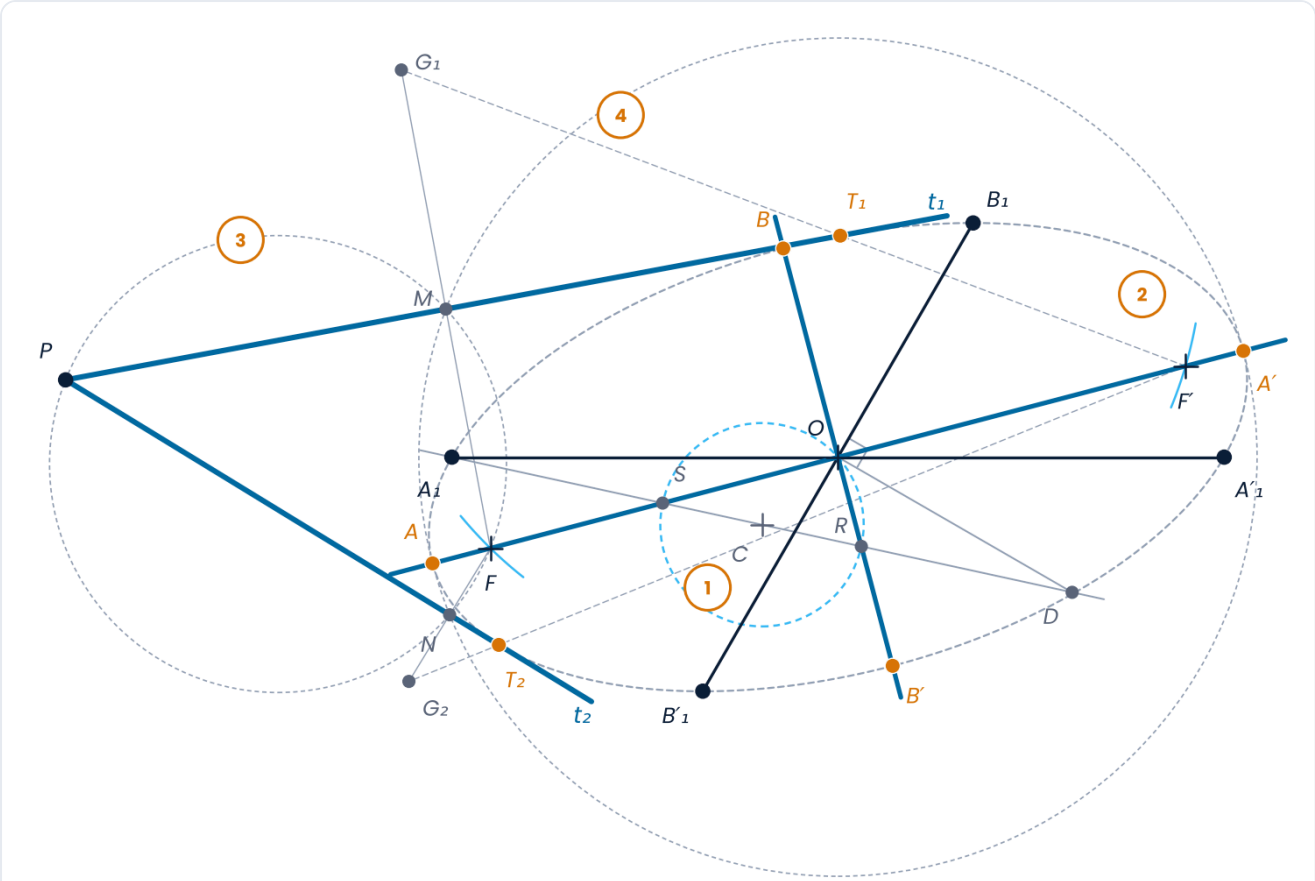
b) Posteriormente trazar las rectas tangentes a la elipse desde el punto exterior P. (3 (más 1 de designaciones y limpieza, para todo el ejercicio) puntos)



Datos del ejercicio, redibujados a escala con las medidas tomadas en el PDF oficial (hoja girada a apaisada).

Apartado a)

1. **Idea.** Te dan dos diámetros conjugados que no son perpendiculares (forman 60°): los ejes salen con la **construcción de Rytz**, sin dibujar la curva. Se usan los nombres de la solución oficial: *D* es el N_1 de la teoría, *C* es *K*, A_1 hace de *M*, y los ejes son AA' (mayor) y BB' (menor). Origen en *O*, *x* a lo largo de $A_1A'_1$ hacia A'_1 e *y* hacia arriba; medidas en mm.
2. **Paso 1 ①: giro y circunferencia de Rytz.** Gira OB_1 90° alrededor de *O* en sentido horario: sale **D (43,1; -24,9)**, con $OD = OB_1 = 49{,}8$. Une *D* con A_1 (−71,1; 0) y halla el punto medio **C (-14,0; -12,4)**. La circunferencia de centro *C* que pasa por *O* (radio 18,7) corta a la recta DA_1 en **S (-32,3; -8,5)**, el corte más próximo a A_1, y en **R (4,3; -16,4)**.
3. **Paso 2 ②: ejes y focos.** El eje mayor va por *OS* y el menor por *OR*, perpendicular. Los semiejes son $a = DS = 77{,}2$ y $b = DR = 39{,}7$: llévalos desde *O* y tendrás **A** y **A′** (eje mayor) y **B** y **B′** (eje menor). El eje mayor forma **14,7°** con $A_1A'_1$. Los focos salen con el arco de centro *B* y radio *a*: **F (-64,0; -16,8)** y **F′ (64,0; 16,8)**, a $c = 66{,}2$ de *O*.



Solución. Los pasos ①②③④ de la figura son los del texto: ① Rytz (*D*, *C*, *R* y *S*); ② ejes *AA′* y *BB′* y focos; ③ circunferencia principal y circunferencia de diámetro *PF*, que se cortan en *M* y *N*; ④ simétricos G_1 y G_2 y puntos de tangencia. La elipse gris discontinua es solo de comprobación.

SOLUCIÓN Eje mayor $2a = 154{,}3$ mm y eje menor $2b = 79{,}5$ mm, girados 14,7° respecto de $A_1A'_1$; focos a 66,2 mm de *O*. Comprobación de Apolonio: $71{,}1^2 + 49{,}8^2 \approx 7535 \approx 77{,}2^2 + 39{,}7^2$. **Coincide con la solución oficial**, que mide *OA′* = 77,2 y *OB* = 39,7. La comisión gira OB_1 igual (su *D* es el tuyo), lo une con A'_1 y usa la otra lectura de Rytz: la circunferencia de diámetro DA'_1, cortada por la recta que une *O* con su centro, en dos puntos a 77,2 y 39,7 mm de *O*; la recta que une *D* con el punto situado a 77,2 mm de *O* es paralela al eje mayor, y la que lo une con el de 39,7 mm, al menor.

Apartado b)

1. **Idea.** Tangentes desde un punto exterior por la **circunferencia principal**, como en la solución oficial: el pie de la perpendicular desde *F* a cada tangente está en la principal y, como ve el segmento *PF* con un ángulo recto, también en la circunferencia de diámetro *PF*. Los criterios admiten también la circunferencia focal.
2. **Paso 3 ③: pies de las perpendiculares.** Traza la principal (centro *O*, radio 77,2) y la circunferencia de diámetro *PF* (*PF* = 84,1; centro en su punto medio). Se cortan en **M (−72,2; 27,3)** y **N (−71,5; −29,0)**. Las tangentes son **t_1 = PM** y **t_2 = PN**, prolongadas.
3. **Paso 4 ④: puntos de tangencia.** Prolonga *FM* otro tanto: **G_1 (−80,4; 71,4)**, simétrico de *F* respecto de t_1; igual con *N*: **G_2 (−79,0; −41,2)**. Los dos están en la focal de *F′* (a 154,3 de *F′*). Las rectas $F'G_1$ y $F'G_2$ cortan a las tangentes en **T_1 (0,4; 40,8)** y **T_2 (−62,5; −34,6)**.

SOLUCIÓN t_1 toca en T_1 (0,4; 40,8), a 145,1 mm de P, y t_2 toca en T_2 (−62,5; −34,6), a 93,5 mm. **Coincide con la solución oficial**: sus M, N, T_1 y T_2 caen en los mismos puntos, con diferencias de menos de medio milímetro medidas sobre el PDF.

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Murcia (sobre 10): «Obtención de ejes de la elipse» **6**; «Trazado de rectas tangentes (1.5 puntos por cada recta tangente. Si no obtiene puntos de tangencia la recta se valorará con 1 punto)» **3**, con el aviso «CUIDADO, las rectas tangentes también pueden obtenerse por circunferencia focal»; «Designaciones y limpieza» **1**. Las instrucciones exigen trabajar «dejando patentes las construcciones auxiliares que se precisen con línea fina» y avisan: «No tendrá validez ninguna la obtención de construcciones por cálculo numérico».

Error típico que te quita puntos. Medir los semiejes desde O hasta S y R: los semiejes son DS y DR, no OS y OR. Y dejar las tangentes sin T_1 y T_2: cada recta pasa de 1,5 a 1 punto.

12 Ejercicio resuelto: elipse dada por un foco, una tangente y su punto, con la normal (Castilla-La Mancha 2026)

PAU CASTILLA-LA MANCHA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 1, EJERCICIO 1A (A ELEGIR ENTRE 1A Y 1B; 2,5 PUNTOS)

Dada una elipse definida por uno de sus focos F, una recta tangente t y su punto de tangencia P. Se pide: Determinar el foco F', sabiendo que la longitud del eje mayor es igual al triple del segmento FP. Determinar los ejes mayor y menor de la elipse. Dibujar la curva. Trazar la normal a la elipse en el punto P justificando su construcción.

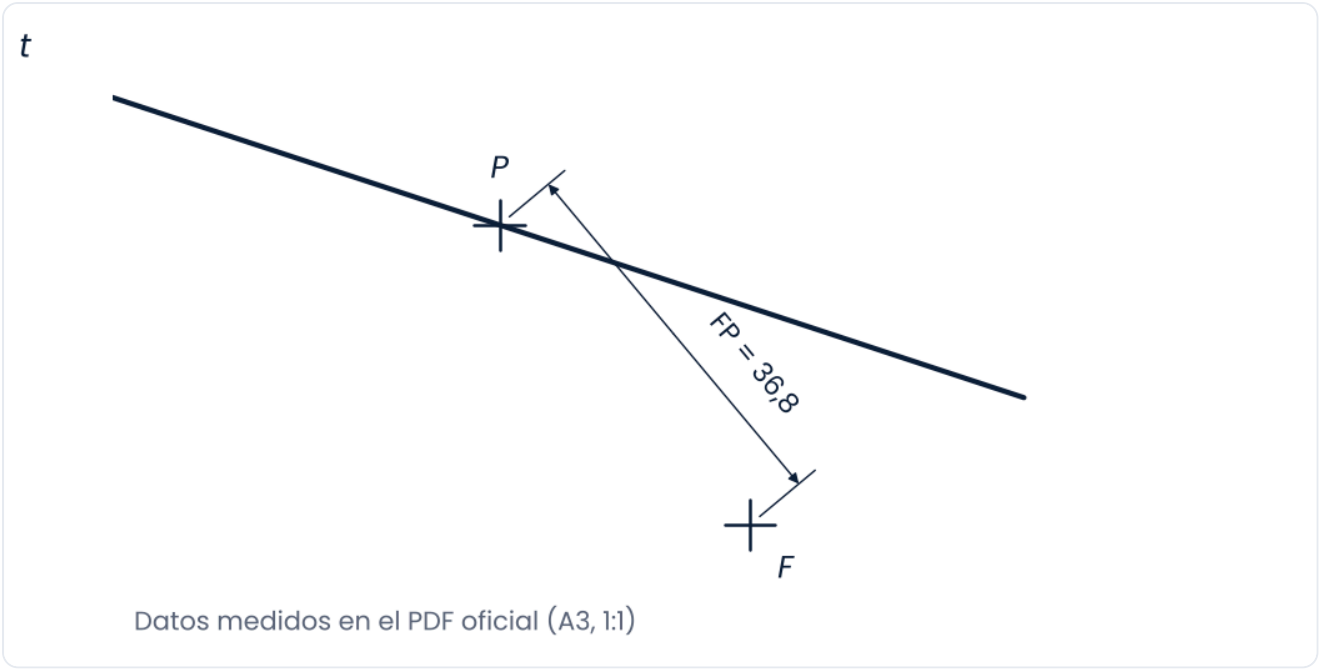
Datos (redibujados del examen, medidos en la geometría vectorial del PDF oficial, A3 a escala 1:1): la recta t baja hacia la derecha formando **18,2°** con la horizontal; el punto P está sobre t; el foco F está por debajo de t, **23,6 mm a la derecha y 28,2 mm por debajo de P**, así que FP = **36,8 mm** y $2a = 3 \cdot 36{,}8 = 110{,}4$ mm.

a) Determinar el foco F', sabiendo que la longitud del eje mayor es igual al triple del segmento FP. (0,5 puntos)

b) Determinar los ejes mayor y menor de la elipse. (1,25 puntos)

c) Dibujar la curva. (0,5 puntos)

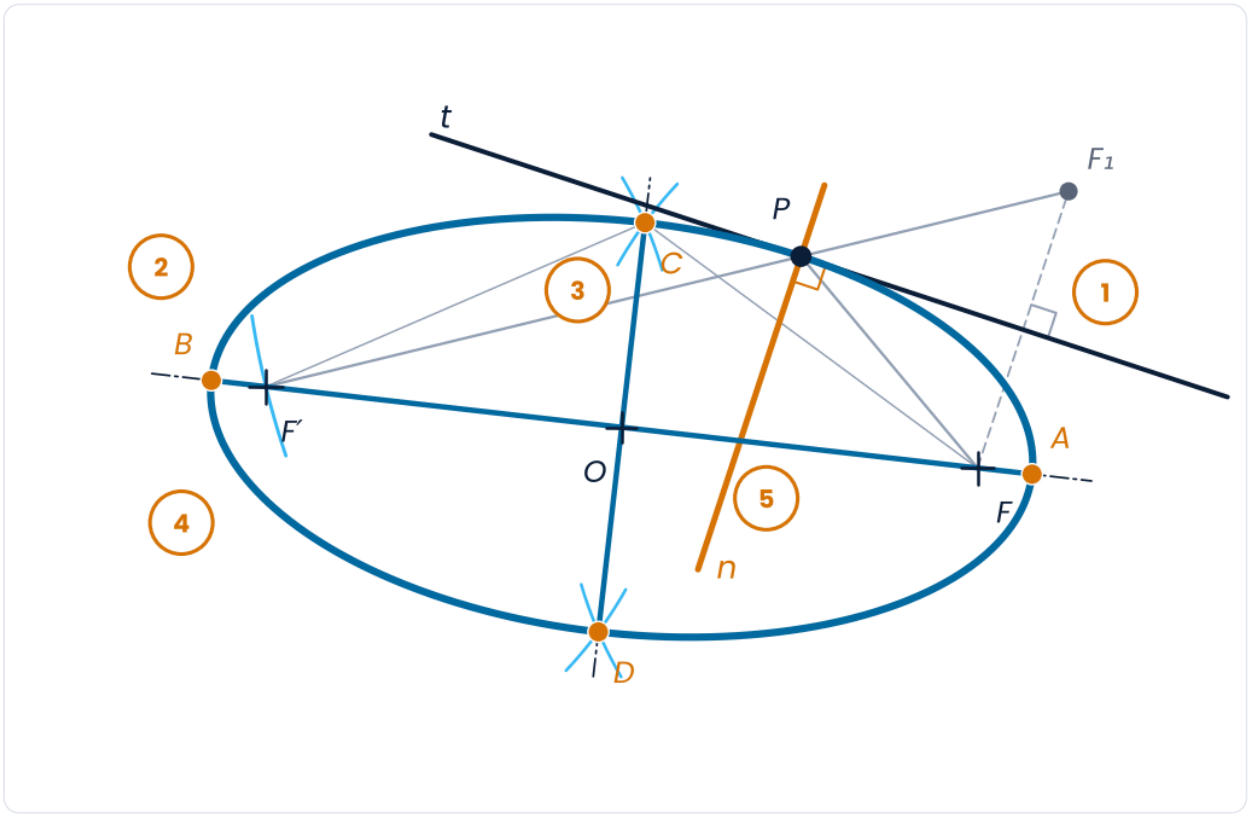
d) Trazar la normal a la elipse en el punto P justificando su construcción. (0,25 puntos)



Datos del ejercicio, redibujados a escala con las medidas tomadas en el PDF oficial.

Apartado a)

1. **Idea.** La tangente en P es la bisectriz exterior de los radios vectores, así que el **simétrico de F respecto de t** está en la recta $F'P$, y $F'F_1 = F'P + PF = 2a$. Con eso, F' queda a 2a de F_1 sobre la recta F_1P.
2. **Paso 1 ①: simétrico de F.** Perpendicular a t por F; al otro lado de t, a la misma distancia, está F_1. Se cumple $PF_1 = PF = 36{,}8$.
3. **Paso 2 ②: foco F'.** Une F_1 con P y prolonga más allá de P. Con centro en F_1 y radio $2a = 110{,}4$ mm, corta esa recta: es F'.



Solución. Los pasos ①–⑤ son los del texto: ① F_1, simétrico de F; ② F' a 2a de F_1 sobre F_1P; ③ ejes, con C y D por arcos de radio a desde los focos; ④ la curva; ⑤ la normal n.

SOLUCIÓN $F'P = 110{,}4 - 36{,}8 = 73{,}6$ mm y $FF' = 2c = 95{,}7$ mm.

Apartado b)

1. **Paso 3 ③: ejes.** El eje mayor es la recta *FF'* y su punto medio es el centro **O**. Lleva $a = 55{,}2$ mm desde *O* a cada lado: **A** y **B**. La mediatriz de *FF'* es la recta del eje menor; los arcos de radio *a* con centro en *F* y en *F'* la cortan en **C** y **D**.

SOLUCIÓN $2a = 110{,}4$ mm, $2c = 95{,}7$ mm y $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 55{,}0$ mm. El eje mayor forma 11,7° con *t*.

Apartado c)

1. **Paso 4 ④: la curva.** Por radios vectores (puntos entre *F'* y *O* y arcos de radios *AN* y *BN* desde los focos) o por afinidad, con circunferencias de radios 55,2 y 27,5.
2. **Comprobación.** La curva pasa por *A*, *B*, *C*, *D* y *P*, y en *P* toca a *t* sin cortarla. Si la corta, has llevado mal 2a.

SOLUCIÓN Elipse de ejes 110,4 × 55,0 mm, tangente a *t* en *P*.

Apartado d)

1. **Paso 5 ⑤: normal.** Perpendicular a *t* por *P*.
2. **Justificación** (escríbela junto al dibujo): la tangente es la bisectriz exterior del ángulo que forman los radios vectores *PF* y *PF'*; por tanto, la normal, perpendicular a ella en *P*, es la bisectriz interior del ángulo *FPF'*. Compruébalo: la normal divide en dos partes iguales el ángulo *FPF'*.

SOLUCIÓN La normal *n* pasa por *P*, es perpendicular a *t* y biseca el ángulo *FPF'*.

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Castilla-La Mancha (2,5 puntos): «Determina el simétrico de F respecto a la tangente» 0,25; «Determina la longitud del eje mayor y obtiene F´» 0,25; «Une F´ con F para encontrar la dirección del eje mayor» 0,25; «Determina los ejes mayor y menor de la elipse» 0,5 + 0,5; «Traza la curva» 0,5; «Traza la normal» 0,25. Además, «el corrector restará 0,25 puntos si el ejercicio carece de la claridad, limpieza o precisión exigibles», y «Las resoluciones exclusivamente matemáticas sin trazado geométrico que las justifique se puntuarán con 0 puntos en el apartado correspondiente».

Error típico que te quita puntos. Llevar 2a desde *P* en lugar de desde F_1: *F'* saldría a 110,4 mm de *P* y la elipse no pasaría por *P*. Recuerda que $F'P + PF = 2a$, así que $F'P = 2a - FP = 73{,}6$ mm.

13 Ejercicio resuelto: el balón de rugby, ejes, focos y tangentes desde un punto (Cantabria 2025)

PAU CANTABRIA 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA (JUNIO) · APARTADO 1, PREGUNTA 1 (OBLIGATORIA; 2,5 PUNTOS)

Para poder realizar una simulación aerodinámica en dos dimensiones, se pretende modelizar un balón de rugby como una elipse (la imagen de la derecha sirve solo para contextualizar). Se conoce la posición de su centro O, la dirección de su eje mayor (paralela a la recta r) y longitudes de sus ejes (AB = 140 mm y CD = 90 mm). SE PIDE: 1. Dibujar los 2 ejes de la elipse (0.5p). 2. Determinar la

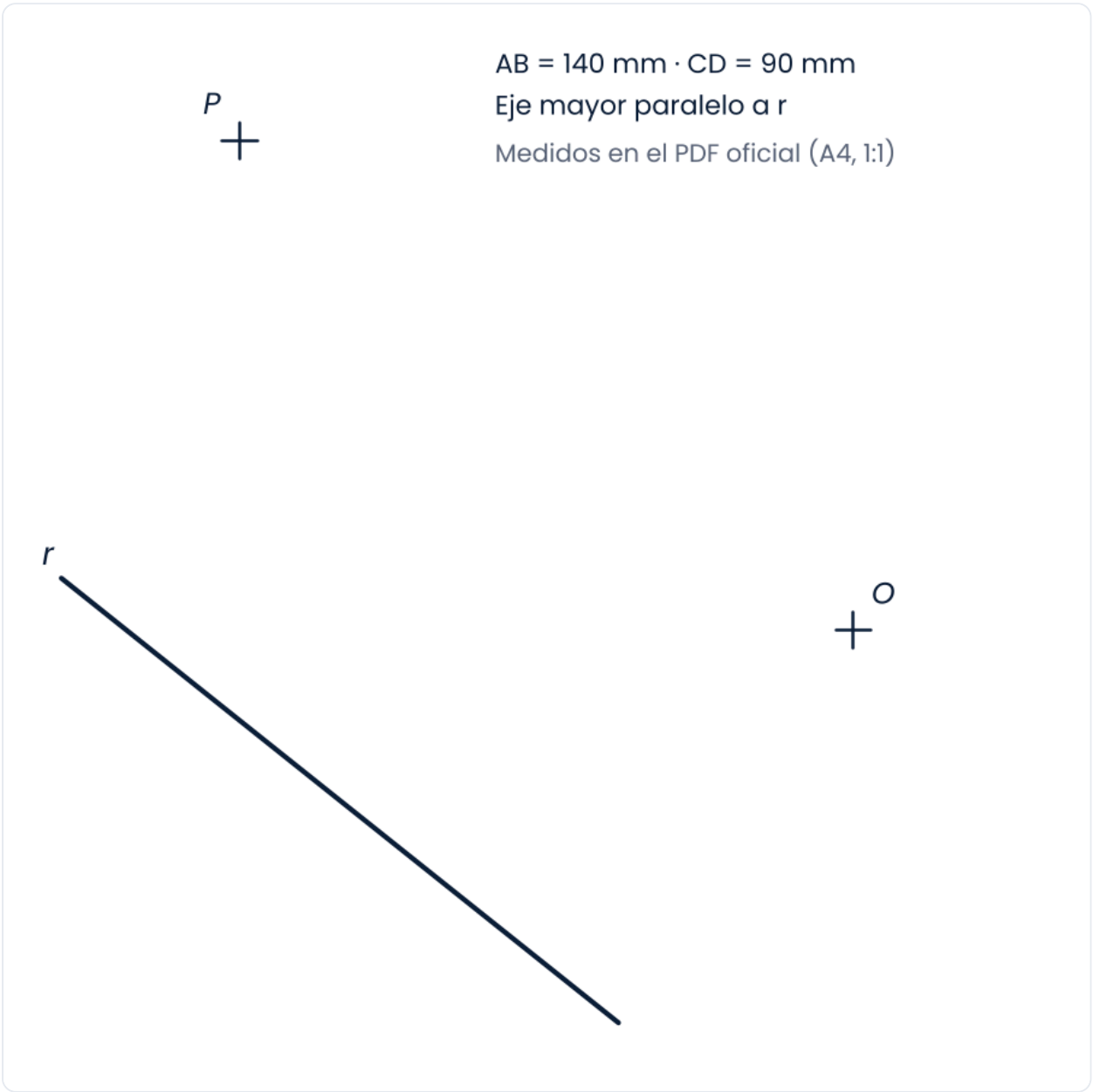
posición de los dos focos F1 y F2 (0.5p). 3. Dibujar las tangentes a la elipse (t1 y t2) trazadas desde el punto P, señalando los puntos de tangencia (T1 y T2) (1.5p).

Datos (redibujados del examen, medidos en la geometría vectorial del PDF oficial, A4 a escala 1:1): la recta *r* baja hacia la derecha formando **38,6°** con la horizontal. El punto *P* está **82,3 mm a la izquierda y 65,7 mm por encima** de *O* (a 105,3 mm), justo sobre la paralela a *r* por *O*: es decir, en la prolongación del eje mayor.

1) Dibujar los 2 ejes de la elipse. (0,5 puntos)

2) Determinar la posición de los dos focos F1 y F2. (0,5 puntos)

3) Dibujar las tangentes a la elipse (t1 y t2) trazadas desde el punto P, señalando los puntos de tangencia (T1 y T2). (1,5 puntos)

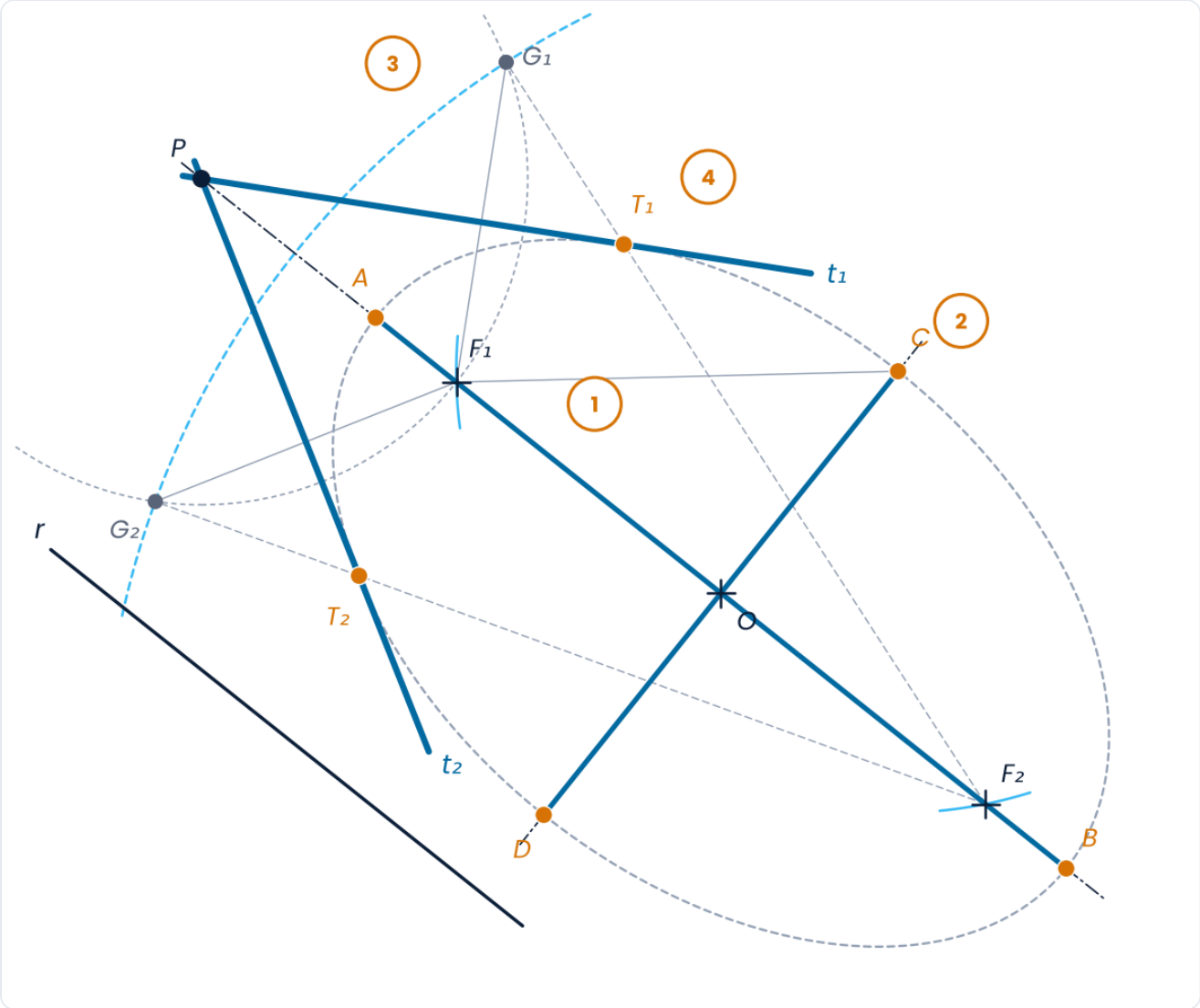


Datos del ejercicio, redibujados a escala con las medidas tomadas en el PDF oficial.

Apartado 1)

1. **Idea.** Es un problema competencial: el «balón» es una elipse de la que conoces el centro, la dirección del eje mayor y las longitudes de los ejes. No hace falta dibujar la curva: los focos y las tangentes se construyen sin ella.

2. **Paso 1 ①: ejes.** Por O, la paralela a r: es el eje mayor. La perpendicular a r por O es el eje menor. Lleva 70 mm a cada lado sobre el eje mayor (**A**, del lado de P, y **B**) y 45 mm sobre el menor (**C** y **D**).



Solución. Los pasos ①②③④ son los del texto: ① ejes; ② focos con el arco de radio a desde C; ③ circunferencia de centro P y radio PF_1 y focal de F_2, que se cortan en G_1 y G_2; ④ tangentes (mediatrices de F_1G) y puntos de tangencia en F_2G.

SOLUCIÓN Ejes AB = 140 mm, paralelo a r, y CD = 90 mm, perpendiculares en O.

Apartado 2)

1. **Paso 2 ②: focos.** Arco de centro C y radio $a = 70$ mm: corta a AB en los focos $\mathbf{F_1}$ (del lado de P) y $\mathbf{F_2}$. Funciona porque en el triángulo rectángulo OCF se cumple $CF = a$.

SOLUCIÓN $c = \sqrt{70^2 - 45^2} = 53{,}6$ mm: F_1 y F_2 están a 53,6 mm de O.

Apartado 3)

1. **Idea.** Tangentes desde un punto exterior por la **circunferencia focal**: el simétrico de F_1 respecto de cada tangente está en la focal de F_2 y a la distancia PF_1 de P.
2. **Paso 3 ③: los simétricos.** Circunferencia de centro P y radio $PF_1 = 51{,}7$ mm, y focal de F_2 (centro F_2, radio $2a = 140$ mm). Se cortan en $\mathbf{G_1}$ y $\mathbf{G_2}$.

3. **Paso 4 ④: tangentes y puntos de tangencia.** Las tangentes son las mediatrices de F_1G_1 y F_1G_2, que pasan por P porque $PG = PF_1$. Los puntos de tangencia están en las rectas F_2G_1 y F_2G_2: T_1 y T_2.
4. **Comprobación.** Como P está en la prolongación del eje mayor, las dos tangentes son simétricas respecto de él: forman 29,8° con el eje, y $PT_1 = PT_2 = 67{,}7$ mm.

SOLUCIÓN Dos tangentes simétricas respecto del eje mayor, que tocan la elipse en T_1 y T_2, a 67,7 mm de P. Cantabria no publica solución gráfica de este ejercicio: comprueba que cada T está en la recta que une F_2 con su G.

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Cantabria: apartado 1, «Obtención de cada eje (0.25 ptos. c/u X2 = 0.5 ptos.)»; apartado 2, «Obtención de cada foco (0.25 ptos. c/u X2 = 0.5 ptos.)»; apartado 3, «Obtención de tangentes (0.5 ptos. c/u X2 = 1 ptos.)» y «Obtención de puntos de tangencia (0.25 ptos. c/u X2 = 0.5 ptos.)», con «Penalizaciones por no nombrar: -0.05 ptos c/u». Las indicaciones del examen avisan: «Todos los ejercicios se resolverán por métodos gráficos. No se admitirán soluciones obtenidas por tanteo».

Error típico que te quita puntos. Dibujar la elipse a ojo y apoyar la regla en ella desde P: eso es tanteo, y Cantabria no lo admite. Las tangentes y sus puntos se construyen sin la curva. Y no nombrar F_1, F_2, t_1, t_2, T_1 y T_2: 0,05 menos por cada uno.

COMPARATIVA FINAL

Qué método usar y cuándo

Lo que te dan o te piden	Método	Por qué funciona	Ejemplo PAU
Los ejes; dibujar la curva	Afinidad (dos circunferencias) o radios vectores	La elipse es afín de la principal; $PF + PF' = 2a$	Baleares 2024, La Rioja 2026
Los focos y 2a (o un punto)	Radios vectores	Es la definición	Extremadura 2025, Galicia 2025, Madrid 2026
Dos diámetros conjugados; dibujar la curva	Haces proyectivos en el paralelogramo o triángulos semejantes afines	Afinidad oblicua; haces proyectivos	Castilla-La Mancha 2025
Dos diámetros conjugados; los ejes	Rytz	Los cortes de N_1M con los ejes están a a y b de N_1	Murcia 2026, Madrid 2026
Tangente o normal en un punto	Bisectriz exterior (o interior) de los radios vectores	Propiedad de reflexión	Castilla-La Mancha 2026, Galicia 2025
Tangentes desde un punto exterior	Focal: circunferencia (P, PF') y focal de F. Principal: circunferencia de diámetro PF'	Simétrico del foco en la focal; pie en la principal	Murcia 2026, Cantabria 2025, Asturias 2025
Tangentes paralelas a una dirección	Perpendicular a d por F' y focal de F (o principal)	Igual que desde un punto, con el punto en el infinito	Aragón 2026, Madrid 2025
Corte de una recta con la elipse	Afinidad con la principal (o focal y potencia)	La afinidad conserva la pertenencia	Madrid 2025 (modelo y reserva)

Regla general: casi todo se resuelve sin dibujar la elipse, con la circunferencia focal (simétricos de un foco) o con la principal (pies de las perpendiculares). Castilla-La Mancha no pregunta tangentes paralelas ni cortes con una recta, y pide dibujar también la curva. La tabla que compara la elipse, la parábola y la hipérbola está en el Tema 8.

Errores que te quitan puntos

Lo que más se confunde en este tema, y cómo decirlo bien.

✗ Situar los focos con un arco de radio *b* desde *O*, o con el radio *b* desde *C*.

✓ Los focos están a la distancia *c* de *O*, y se construyen con un arco de **radio *a*** desde *C*: $CF = a$ porque *C* equidista de los focos y $CF + CF' = 2a$.

Apartado 1: Qué es una elipse: definición, ejes, focos y circunferencias principal y focales

✗ Dibujar la curva con cuatro puntos y los vértices, o unir los puntos con segmentos rectos.

✓ Cada punto de división da cuatro puntos: con tres o cuatro divisiones tienes 12-16 puntos. Únelos con una curva suave; Extremadura pidió «al menos 16 puntos de la elipse».

Apartado 2: Construcción por puntos con radios vectores (y el método del jardinero)

✗ En el método de las dos circunferencias, trazar la vertical por *q* y la horizontal por *Q*.

✓ Así sale una elipse con los ejes cambiados (la grande en vertical). La paralela al eje **menor** va por el punto de la circunferencia **grande**, y la paralela al eje mayor, por el de la pequeña.

Apartado 3: Construcción por afinidad: las dos circunferencias y los triángulos semejantes

✗ En los haces proyectivos, numerar las divisiones de *OA* desde *O* y las de *AE* desde *A*.

✓ Las dos series se numeran **desde *A***. Si no, los rayos «del mismo número» no se corresponden y los puntos no están en la elipse.

Apartado 4: Diámetros conjugados y construcción por haces proyectivos

✗ En la construcción de Rytz, medir los semiejes desde *O* (*OS* y *OR*).

✓ Los semiejes son $a = N_1S$ y $b = N_1R$. *OS* y *OR* solo dan las **direcciones** de los ejes.

Apartado 5: Los ejes a partir de dos diámetros conjugados: construcción de Rytz

✗ Trazar la tangente en *P* perpendicular a *OP*, como en la circunferencia.

✓ La tangente es la **bisectriz exterior** de los radios vectores *PF* y *PF'*. Solo en los vértices es perpendicular a *OP*.

Apartado 6: Tangente y normal en un punto de la elipse

✗ Tangentes desde *P* con la circunferencia de centro *P* que pasa por *F* y la focal del **mismo** foco *F*.

✓ La circunferencia de centro *P* pasa por un foco, y la focal es la **del otro** (centro en el otro foco, radio 2a). Sus cortes son los simétricos del primero.

Apartado 7: Tangentes desde un punto exterior y paralelas a una dirección

✗ Dibujar la elipse por puntos y «ver» dónde la corta la recta.

✓ La intersección se construye: por afinidad (recta afín *r'* y circunferencia principal) o por la focal. Madrid pide además «justificar razonadamente».

Apartado 9: Intersección de una recta con la elipse

Conceptos clave

Elipse

Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (los focos) es constante e igual al eje mayor, 2a.

Focos

Los dos puntos fijos *F* y *F'* de la definición. Están en el eje mayor, a la distancia *c* del centro.

Eje mayor

Segmento *AB* de longitud 2a que pasa por los focos. Es un eje de simetría de la curva.

Eje menor

Segmento *CD* de longitud 2b, perpendicular al mayor en su punto medio *O*. Sus extremos distan *a* de cada foco.

Distancia focal

Distancia *FF'* = 2c entre los focos. En la elipse, $a^2 = b^2 + c^2$.

Radios vectores

Segmentos *PF* y *PF'* que unen un punto de la curva con los focos. Suman 2a.

Circunferencia principal

Circunferencia de centro *O* y radio *a*. Contiene los pies de las perpendiculares trazadas desde los focos a las tangentes, y la elipse es su figura afín.

Circunferencia focal

Circunferencia de centro un foco y radio 2a. La de *F'* contiene los simétricos de *F* respecto de todas las tangentes.

Excentricidad

Cociente $e = c/a$. En la elipse está entre 0 (circunferencia) y 1.

Diámetro

Cuerda que pasa por el centro *O*. Los ejes son dos diámetros particulares.

Diámetros conjugados

Par de diámetros tales que cada uno divide en dos partes iguales las cuerdas paralelas al otro. Las tangentes en los extremos de uno son paralelas al otro.

Construcción de Rytz

Construcción que da los ejes a partir de dos diámetros conjugados: giro de 90° de un semidiámetro, punto medio y circunferencia que pasa por el centro.

Haces proyectivos

Dos familias de rectas con vértices en dos puntos de la curva, cuyas parejas correspondientes se cortan en puntos de la cónica. Con divisiones iguales en un semidiámetro y en un lado del paralelogramo, dan la elipse.

Afinidad elipse-circunferencia

La elipse es la figura afín de su circunferencia principal en la afinidad ortogonal de eje *AB* y razón b/a.

Tangente

Recta que toca la elipse en un solo punto *P*. Es la bisectriz exterior del ángulo de los radios vectores de *P*.

Normal

Perpendicular a la tangente en el punto de contacto. Es la bisectriz interior del ángulo *FPF'*.

MODO PAU

Nueve claves que valen puntos

Definición

$PF + PF' = 2a$. Con focos y 2a ya puedes dibujar por **radios vectores**: cuatro puntos por cada división entre *F'* y *O*.

a, b y c

$a^2 = b^2 + c^2$, con el compás: arco de radio *a* desde *C* da los **focos**; desde un foco, los extremos del **eje menor**.

Dos circunferencias

Con los ejes, el método más rápido es la **afinidad**: radio común, vertical por la grande y horizontal por la pequeña.

Conjugados

Las tangentes en los extremos de un diámetro son **paralelas a su conjugado**. Los ejes son el único par perpendicular.

Rytz

Gira 90° un semidiámetro, punto medio *K* y circunferencia por *O*: eje mayor por *S*, $a = N_1S$, $b = N_1R$.

Tangente en P

Bisectriz exterior de *PF* y *PF'*; la normal, bisectriz interior. Si piden justificar, escribe esa frase.

Focal

El **simétrico de un foco** respecto de una tangente está en la focal del otro foco (radio 2a). Resuelve tangentes y problemas inversos.

Puntos de tangencia

Siempre construidos: *T* está en la recta que une el otro foco con el simétrico. Sin *T*, Murcia da 1 punto de 1,5 por recta.

Sin tanteo

Tangentes e intersecciones **sin dibujar la elipse** (en Castilla-La Mancha, luego dibujas también la curva). Cantabria no admite «soluciones obtenidas por tanteo» y Murcia invalida el «cálculo numérico».

Cómo te lo pueden preguntar

- **Tangentes desde un punto exterior**, con sus puntos de tangencia y casi siempre sin dibujar la elipse: Murcia 2026, Cantabria 2025, Asturias 2025, La Rioja 2026 (piscina) y Canarias (2026 ordinaria y modelos 2026 y 2027). En total, la elipse cae en **26 de las 68 convocatorias** de 2025 y 2026, en 14 comunidades.
- **Reconstruir la elipse con focos, tangentes y puntos** (problemas inversos): un foco, una tangente y su punto (Castilla-La Mancha 2026), un foco y tres tangentes (Castilla y León 2026), un foco, una tangente, 2a y 2c (C. Valenciana 2025) o arcos de las focales (Andalucía 2025).
- **Ejes a partir de dos diámetros conjugados** (Murcia 2026, Madrid 2026) y **elipse por diámetros conjugados** (Castilla-La Mancha 2025, con triángulos afines; modelos 2026-2027, método libre).
- **Dibujar la elipse por puntos** con datos sencillos: centro, vértice y 2c (Extremadura 2025, «al menos 16 puntos»), focos y un punto (Galicia 2025), el jardinero (Madrid 2026) o un edificio inscrito en un terreno rectangular (La Rioja 2026).
- **Tangentes paralelas a una dirección**: Aragón 2026 y Madrid 2025. Castilla-La Mancha las excluye en sus directrices.
- **Tangente en un punto de la curva** dentro de un croquis de enlaces (Canarias 2025; en 2026 ordinaria, desde un punto exterior) o en un punto dado (Galicia 2025), con la normal justificada en Castilla-La Mancha 2026.
- **Arco de elipse dentro del contorno de una pieza real** (grifo, cisterna, leva: País Vasco) e **intersección de una recta con la elipse** por afinidad (Madrid, modelo y reserva de 2025; Castilla-La Mancha la excluye).

No lo confundas

- **Circunferencia principal con circunferencia focal:** la principal tiene centro *O* y radio *a* (pies de las perpendiculares desde un foco a las tangentes); la focal tiene centro en un foco y radio 2a (simétricos del otro foco).
- **Eje menor *b* con semidistancia focal *c*:** *b* es la distancia de *O* a *C*; *c*, la de *O* a un foco. La hipotenusa del triángulo *OCF* es *a*: por eso el arco de radio *a* desde *C* da los focos.
- **Diámetros conjugados con ejes:** todos los ejes son diámetros conjugados, pero no al revés. Solo los ejes son perpendiculares, y solo ellos pasan por los vértices.
- **Elipse con óvalo:** la elipse es una cónica ($PF + PF' = 2a$); el óvalo son cuatro arcos de circunferencia (Tema 3). Se parecen, pero no son la misma curva.

Ponte a prueba

PAU Andalucía 2025 (extraordinaria), Ejercicio 1 (obligatorio; 2,5 puntos: apartado 1, 1,25; apartado 2, 1,25). Dados los arcos de circunferencia M y M' correspondientes a las circunferencias focales de una elipse, se pide: 1. Determinar los focos F y F', el centro O, y los extremos del eje mayor AB y menor CD. 2. Dibujar la elipse. [Datos redibujados: dos arcos verticales enfrentados, *M* a la izquierda con la convexidad hacia la izquierda y *M'* a la derecha con la convexidad hacia la derecha, los dos de radio ≈ 114,2 mm y con los centros a ≈ 93,0 mm. Medidas tomadas sobre el PDF oficial.] PDF oficial

Solución: Halla el centro de cada arco con las mediatrices de dos cuerdas: son los **focos** (el arco *M* tiene el centro a la derecha y el *M'*, a la izquierda, porque cada focal rodea al otro foco). El radio común es 2a ≈ 114,2 mm (a ≈ 57,1) y la distancia entre centros, 2c ≈ 93,0 mm. *O* es el punto medio de *FF'*; *A* y *B* están a 57,1 mm de *O*, y *C* y *D* salen con arcos de radio *a* desde los focos: $2b \approx 66{,}2$ mm. Dibuja la curva por radios vectores.

PAU Aragón 2026 (ordinaria), Ejercicio 1, opción B (a elegir entre 1A y 1B; 2,75 puntos). Dada la elipse definida por sus ejes AB y CD: 1) Dibujar las rectas tangentes a la elipse paralelas a la dirección d marcando los puntos de tangencia. 2) Dibujar dos puntos de la elipse distintos a los puntos de tangencia anteriores. Dejar constancia de todas las construcciones realizadas. [Datos redibujados: eje *AB* horizontal de 70 mm y eje *CD* vertical de 50 mm, que se cortan en su punto medio *O*; la dirección *d* es un segmento que baja hacia la derecha formando 48° con la horizontal. Medidas tomadas en el PDF oficial.] PDF oficial

Solución: 1) Focos con el arco de radio 35 mm desde *C*: $c = \sqrt{35^2 - 25^2} = 24{,}5$ mm. Perpendicular a *d* por F_1: corta a la focal de F_2 (radio 70 mm) en G_1 y G_2. Las tangentes son las mediatrices de F_1G_1 y F_1G_2 (paralelas a *d*), y los puntos de tangencia, los cortes con F_2G_1 y F_2G_2. Salen dos tangentes simétricas respecto de *O*, separadas 61,8 mm, que tocan en (±29,4; ±13,5) respecto de *O*. 2) Dos puntos por radios vectores o por afinidad. Criterios: «Focos, CfocalF2 y Perpend.F1: 1 punto»; tangentes con sus puntos, 0,75 («No hallar los 2 puntos de tangencia: -0,15 puntos»); puntos de la elipse, 0,75; exactitud, 0,25.

PAU Asturias 2025 (extraordinaria), Ejercicio 1, opción B (2,5 puntos). Desde el punto P trazar las tangentes a la elipse inscrita en el rectángulo dado. No es necesario dibujar la elipse. [Datos redibujados: rectángulo de 43,9 mm de ancho y 94,0 mm de alto (lados largos verticales); *P* está 15,7

mm por debajo del lado inferior y 8,0 mm a la izquierda del lado derecho. Medidas tomadas en el PDF oficial.] PDF oficial

Solución: La elipse inscrita (la que toca los lados en sus puntos medios) tiene por ejes las medianas del rectángulo: 2a = 94,0 mm (vertical) y 2b = 43,9 mm, así que los focos están en el eje vertical a $c = 41{,}6$ mm de *O* (arco de radio 47 mm desde un extremo del eje menor). Tangentes desde *P* por la focal: circunferencia de centro *P* que pasa por el foco de abajo y focal del de arriba (radio 94 mm); sus cortes *G* dan las tangentes (mediatrices) y los puntos de tangencia. Una tangente es casi vertical (81,8° con la horizontal) y la otra sube hacia la izquierda formando 40,8°. **Coincide con la solución gráfica oficial**, trazada sobre el enunciado en el PDF con criterios. Criterios: «Determinación de los focos de la elipse 1,25 puntos» y «Dibujo de las tangentes a la elipse 1,25 puntos».

PAU Galicia 2025 (extraordinaria), Pregunta 2, opción 2.2 (2,25 puntos). A partir de la recta de referencia y el punto O, resuelva uno de los apartados siguientes: [...] 2.2.- Conocida la distancia focal, F1-F2= 13cm y el punto P de la elipse de centro O, dibuje la elipse y la tangente en P. [Datos redibujados: recta horizontal por *O* (la del eje mayor); *P* está 25,5 mm a la izquierda y 46,7 mm por encima de *O*. Medidas tomadas en el PDF oficial.] PDF oficial

Solución: Focos en la recta, a 65 mm de *O* a cada lado. Mide los radios vectores de *P*: $PF_1 = 61{,}2$ y $PF_2 = 101{,}8$ mm, luego $2a = 163{,}0$ mm. El eje menor sale con arcos de radio $a = 81{,}5$ desde los focos: $2b = 98{,}4$ mm. Dibuja la curva por radios vectores o por afinidad. La tangente en *P* es la bisectriz exterior del ángulo F_1PF_2: sube hacia la derecha formando 11,2° con la horizontal. Criterios (traducidos del gallego): trazados auxiliares 0,25; trazado de la elipse 1,25; trazado de la línea curva 0,25; tangente 0,50.

PAU Castilla y León 2026 (extraordinaria), Ejercicio 1, pregunta A1 (a elegir entre A1 y A2; 2,5 puntos). De una elipse conocemos un foco y tres rectas tangentes r, s y u. Se pide: 1º Determinar los ejes de la cónica. No es necesario dibujar la elipse. 2º Precisar los puntos de tangencia con cada una de las rectas dadas. [Datos redibujados: foco *F*; recta *r* a 31,3 mm de *F*, a su izquierda, que sube hacia la derecha formando 59,7° con la horizontal; recta *s* a 17,3 mm de *F*, a su derecha, que baja hacia la derecha formando 52,4°; recta *u* horizontal, 74,6 mm por debajo de *F*. Medidas tomadas en el PDF oficial.] PDF oficial

Solución: Halla los simétricos de *F* respecto de *r*, *s* y *u*: los tres están en la focal de *F*′, así que *F*′ es el centro de la circunferencia que pasa por ellos (mediatrices) y su radio es $2a = 94{,}4$ mm. *F*′ queda 24,2 mm a la izquierda y 58,0 mm por debajo de *F* ($FF' = 62{,}8$ mm); el eje mayor es la recta *FF*′ y $2b = 70{,}4$ mm. Cada punto de tangencia es el corte de la tangente con la recta que une *F*′ con el simétrico correspondiente: están a 41,7 (*r*), 18,3 (*s*) y 77,2 mm (*u*) de *F*.

PAU Comunidad de Madrid 2026 (extraordinaria), Pregunta 1, opción 1.2 (a elegir entre 1.1 y 1.2; 2,5 puntos). Un jardinero clava dos estacas en los puntos M y N, separados 8m de distancia. A ellas ata los extremos de una cuerda de 10m que mantendrá tensa para trazar el perímetro elíptico de un jardín. Indíquense en la representación hecha a escala 1:100 los puntos principales del perímetro (vértices y focos). [Datos redibujados: *M* y *N* en una recta horizontal, a 80 mm (8 m a escala 1:100).] PDF oficial

Solución: *M* y *N* son los **focos** (2c = 80 mm) y la cuerda es la suma de los radios vectores: 2a = 100 mm. Los vértices *A* y *B* están en la recta *MN*, a 50 mm del punto medio *O*; *C* y *D*, en la mediatriz, con arcos de radio 50 mm desde *M* o *N*: $OC = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30$ mm (3 m reales). La solución oficial lo dice así: «Los puntos M y N dados son los focos de la elipse trazada por el jardinero; siendo 8m la distancia focal (representada ya a la escala 1:100 como 8cm) y 10m la magnitud del eje mayor AB». Criterios: focos 0,40; eje mayor 0,80; eje menor 1,00; trazado 0,30.

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (BOE-A-2022-5521): Dibujo Técnico I y II
2. PAU Región de Murcia 2026, ordinaria: examen, criterios y soluciones de Dibujo Técnico II
3. PAU Castilla-La Mancha 2026, ordinaria: examen de Dibujo Técnico II
4. PAU Castilla-La Mancha 2026, ordinaria: criterios de calificación de Dibujo Técnico II
5. UCLM: Directrices y orientaciones generales para la Prueba de Acceso a la Universidad. Dibujo Técnico II. Curso 2026/2027
6. PAU Cantabria 2025, ordinaria: examen de Dibujo Técnico II
7. PAU Cantabria 2025, ordinaria: criterios de corrección de Dibujo Técnico II
8. Universidad de Cantabria: Dibujo Técnico II. Contenidos y estructura del ejercicio
9. Junta de Andalucía: Directrices y Orientaciones Generales PAU 2026-27, Dibujo Técnico II
10. PAU Andalucía 2025, extraordinaria: examen de Dibujo Técnico II
11. PAU Aragón 2026, ordinaria: examen y criterios de Dibujo Técnico II
12. PAU Asturias 2025, extraordinaria: examen, criterios y soluciones de Dibujo Técnico II
13. PAU Galicia 2025, extraordinaria: examen de Dibujo Técnico II
14. PAU Galicia 2025, extraordinaria: criterios de corrección de Debuxo Técnico II
15. PAU Castilla y León 2026, extraordinaria: examen de Dibujo Técnico II
16. Junta de Castilla y León: Guía de Calificación PAU 2027, Dibujo Técnico II
17. PAU Comunidad de Madrid 2026, extraordinaria: examen, criterios y soluciones de Dibujo Técnico II
18. Universidad de Murcia: Acta de la reunión de coordinación PAU 2025, 313 Dibujo Técnico (saberes básicos y ejercicios propuestos: origen de la lista)
19. Universidad de Murcia: Acta de la reunión de coordinación PAU 2027, Dibujo Técnico II (17-9-2026), vigente: mantiene el formato y el contenido de 2026
20. Universidad Politécnica de Madrid (blogs.upm.es): «Lugares geométricos. Cónicas»

Imágenes: figuras de elaboración propia de Farmeando PAU (Python y matplotlib).

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 22 de noviembre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.