Leyes de Kepler, momento angular y cosmología

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en **farmeandopau.com** ›

Última revisión: 1 de noviembre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

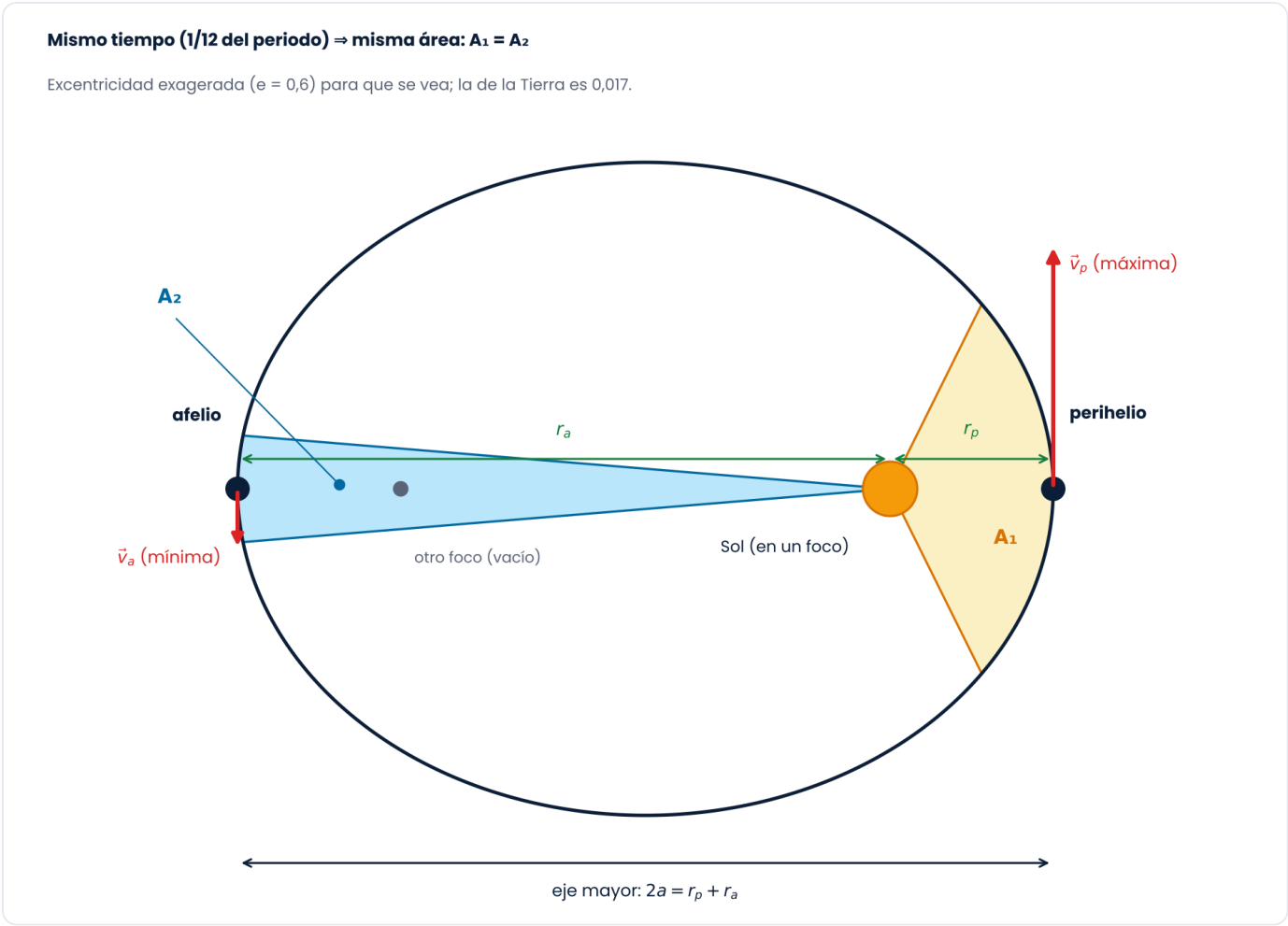
LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

Las **leyes de Kepler** describen el movimiento planetario: órbitas **elípticas** con el Sol en un foco, **áreas iguales en tiempos iguales** y $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$ con el **semieje mayor**. La gravedad es una **fuerza central**, así que el **momento angular** $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ se conserva: la órbita es plana y $r_p v_p = r_a v_a$. El tema sale en **19 de las 68 convocatorias**, en 13 comunidades: la tercera ley en 18 y el momento angular en 8. La **cosmología** (Big Bang, materia y energía oscuras, agujeros negros, exoplanetas) no ha caído en 2025-2026: basta un nivel cualitativo.

1 De Tycho Brahe a Newton: las tres leyes de Kepler

Johannes Kepler analizó durante años las observaciones de Marte que había reunido Tycho Brahe, las más precisas de su época, y encontró tres reglas que cumplen todos los planetas. Publicó las dos primeras en *Astronomia nova* (1609) y la tercera en *Harmonices mundi* (1619). Son leyes **empíricas**: describen cómo se mueven los planetas, pero no por qué. El porqué lo dio Newton en los *Principia* (1687): las tres se deducen de la ley de la gravitación universal (lo ves en el Tema 3).

- **Primera ley (de las órbitas):** los planetas describen **órbitas elípticas** con el Sol en **uno de los focos**. El otro foco está vacío. La circunferencia es el caso particular de elipse con los dos focos juntos.
- **Segunda ley (de las áreas):** el segmento que une el Sol con el planeta (el **radio vector**) **barre áreas iguales en tiempos iguales**. Consecuencia: el planeta va **más deprisa cerca del Sol (perihelio)** y más despacio lejos (afelio).
- **Tercera ley (de los periodos):** el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del **semieje mayor** de la órbita: $T^2 = k\,a^3$. La constante k es la misma para todos los cuerpos que giran alrededor del **mismo** astro central.
- **Vocabulario de la elipse:** el **semieje mayor** a es la mitad del eje mayor; el punto más cercano al astro central es el **pericentro** y el más lejano, el **apocentro**. Se cumple $r_p + r_a = 2a$. Con la **excentricidad** e: $r_p = a(1-e)$ y $r_a = a(1+e)$. La excentricidad no está en el currículo, pero Madrid la define en el enunciado cuando la usa (modelos 2026 y 2027, Pregunta 2.B, Plutón con $e = 0{,}244$).
- **Los nombres cambian con el astro central:** perihelio y afelio (Sol), perigeo y apogeo (Tierra), periastro y apoastro (otra estrella o, como en Madrid 2026, Marte); en general, periapsis y apoapsis. Es lo mismo: punto más cercano y más lejano.
- **Las órbitas de los planetas son casi circunferencias:** la excentricidad de la Tierra es 0,017 y su distancia al Sol varía solo entre 147,1 y 152,1 millones de km (NASA, *Earth Fact Sheet*). Por eso muchos problemas las tratan como circulares; los cometas (Halley) y muchas sondas, no.



Primera y segunda leyes. Órbita con excentricidad exagerada ($e = 0{,}6$): el Sol está en un foco. Los dos sectores se barren en el mismo tiempo (1/12 del periodo, calculado con la ecuación de Kepler) y tienen la misma área; por eso la velocidad en el perihelio es mayor que en el afelio (aquí, cuatro veces).

2 La tercera ley: deducción y cómo se usa

Es la ley que más cae del tema. Muchas comunidades piden **deducirla** y casi todas la usan para calcular una masa, un radio o un periodo. La deducción se hace con una **órbita circular**; Newton demostró que para una elipse vale lo mismo cambiando r por el semieje mayor a.

- **Para el Sol**, con $GM_\odot = 1{,}327 \cdot 10^{20}\ \mathrm{m^3/s^2}$ (NASA, *Sun Fact Sheet*): $k = 4\pi^2/GM_\odot = 2{,}97 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{s^2/m^3}$. En años y unidades astronómicas, $k \approx 1\ \mathrm{año^2/ua^3}$: por eso $T^2 = a^3$ para todos los planetas (tabla).
- **Como cociente, sin G ni M:** para dos cuerpos que giran alrededor del mismo astro, $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$, así que $\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2/3}$. Puedes dejar días y ua o km, siempre que uses **las mismas unidades** en los dos cuerpos. Es lo que pide La Rioja cuando manda resolver «únicamente con los datos del enunciado» (2025, extraordinaria, Mercurio con los datos de la Tierra) o «sin usar los datos de la masa de la Tierra ni de la constante de gravitación universal G» (2026, extraordinaria).
- **Para pesar el astro central:** $M = \frac{4\pi^2 a^3}{G\,T^2}$, con a en metros y T en segundos. Así se miden las masas de Marte (Madrid 2026), de Júpiter con sus lunas (Aragón 2025, modelo) o de estrellas con exoplanetas (Illes Balears 2025 y 2026).
- **Solo dentro del mismo sistema:** la Luna y un satélite artificial comparten constante (giran en torno a la Tierra); la Luna y Marte, no.

- **Si la masa del satélite no es despreciable**, la expresión exacta es $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G(M+m)}a^3$. Illes Balears la dio en 2025 (ordinaria, Problema 1) para que justificaras por qué con $M \gg m$ se recupera la ley de Kepler.

Única fuerza: la gravitatoria, dirigida hacia el centro: $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$.

↓

Movimiento circular uniforme

esa fuerza es la centrípeta, $F = m\dfrac{v^2}{r}$, con $v = \dfrac{2\pi r}{T}$.

↓

Igualas

$G\dfrac{Mm}{r^2} = m\dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2\, r}$. La masa m del satélite se simplifica.

↓

Despejas

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\, r^3$$

La constante $k = 4\pi^2/GM$ solo depende de la masa del **astro central**.

↓

Para una elipse, $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}\, a^3$ con $a = \dfrac{r_p + r_a}{2}$.

Planeta	a (10⁶ km)	T (días)	T^2/a^3 (10⁻¹⁹ s²/m³)
Mercurio	57,9	88,0	2,98
Tierra	149,6	365,2	2,97
Marte	228,0	687,0	2,97
Júpiter	778,5	4331	2,97
Urano	2867,0	30 589	2,96

Semiejes y periodos de la NASA (Planetary Fact Sheet). El cociente es el mismo para todos (diferencias de menos del 0,5 %): la constante de la tercera ley solo depende del Sol.

DEDUCIR LA TERCERA LEY (CANARIAS 2026)

«Deduzca la tercera ley de Kepler. (1 punto)» (PAU Canarias 2026, extraordinaria, Bloque I, pregunta 2, opción a1).

Respuesta modelo

Supongo una órbita circular de radio r alrededor de un astro de masa M. La única fuerza sobre el planeta es la gravitatoria, central, y hace de fuerza centrípeta: $G\dfrac{Mm}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$. En un movimiento circular uniforme $v = 2\pi r/T$. Sustituyendo: $G\dfrac{M}{r^2} = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$, y despejando: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}\, r^3$. El cuadrado del periodo es proporcional al cubo del radio, con una constante que solo depende de la masa del astro central. Para una órbita elíptica se cumple igual con el semieje mayor a.

Por qué puntúa. Di qué supones (órbita circular, solo actúa la gravedad), escribe la segunda ley de Newton con la aceleración centrípeta y termina con una frase que diga lo que significa el resultado.

VERDADERO O FALSO (ANDALUCÍA 2025)

«El periodo de rotación de Júpiter alrededor del Sol es 12 veces mayor que el periodo de rotación de la Tierra alrededor del Sol. Considerando sus órbitas circulares, conteste razonadamente la veracidad de la siguiente afirmación: la distancia de Júpiter al Sol es 3,2 veces mayor que la distancia entre la Tierra y el Sol.» (PAU Andalucía 2025, reserva 3, ejercicio A, apartado a; 1 punto).

Respuesta modelo

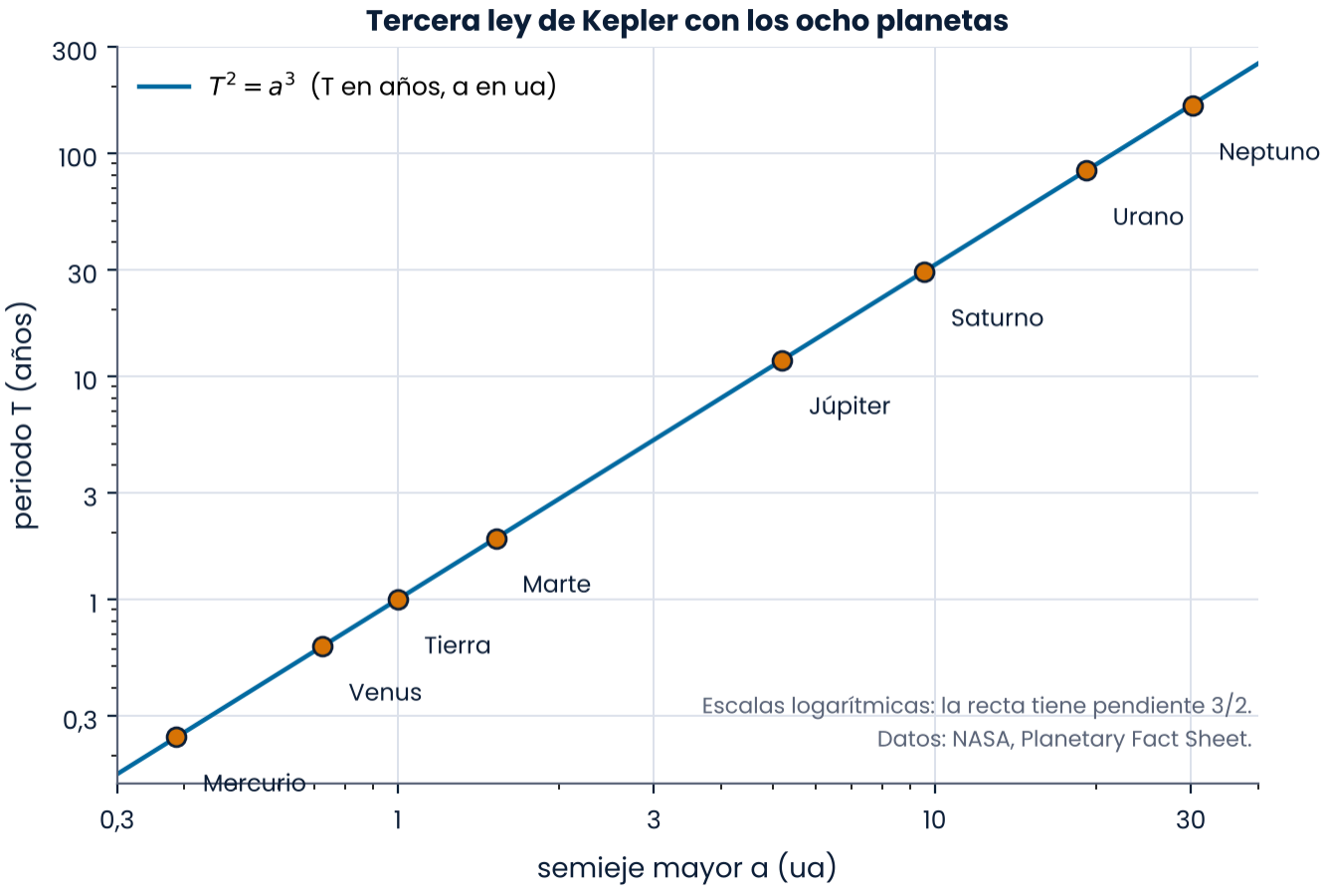
Falsa. Los dos planetas giran alrededor del Sol, así que por la tercera ley (deducida como arriba) $\frac{T_J^2}{r_J^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3}$.

Entonces $\frac{r_J}{r_T} = \left(\frac{T_J}{T_T}\right)^{2/3} = 12^{2/3} = 5{,}24$. Júpiter está unas 5,2 veces más lejos del Sol que la Tierra, no 3,2.

Por qué puntúa. En Andalucía hay que deducir la tercera ley antes de usarla. El dato real coincide: Júpiter está a 5,20 ua.

Deducir no es citar

Andalucía pone la tercera ley de Kepler en su lista oficial de «Expresiones que siempre se deben deducir antes de su aplicación» (Directrices y orientaciones 2026-27). **Cantabria**, en los criterios de junio de 2026: «No será válido el planteamiento de la 3ª ley de Kepler sin aportar explicaciones adicionales, ya que se pide la "deducción" de la expresión». **Cataluña** pide la «Justificació de les lleis de Kepler a partir de la llei de gravitació universal» (Orientacions PAU 2027). **Canarias** lo preguntó tal cual en 2026 (ejemplo de abajo). En cambio, **La Rioja**: «En los problemas de la prueba no se pedirán demostraciones» (guía 2025-26; pendiente de confirmar para 2027), y su matriz concreta la segunda y la tercera ley «para el caso de órbitas circulares».



La tercera ley con datos reales. Periodo frente a semieje mayor de los ocho planetas (NASA) en escalas logarítmicas: caen sobre la recta $T^2 = a^3$ (en años y ua), de pendiente 3/2. Cuando dan una tabla de T y r, comprueba que T^2/r^3 es constante (o linealiza): País Vasco 2026, extraordinaria, pide comprobarlo con cuatro objetos que giran en torno a Marte, encontrar el que no cumple la relación y estimar la masa de Marte.

3 Momento angular de una partícula

El **momento angular** de una partícula de masa m y velocidad $\vec{v}$ respecto a un punto O es el producto vectorial de su vector de posición (desde O) por su momento lineal:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Es al giro lo que el momento lineal es a la traslación. Su unidad en el SI es el **kg·m²/s** (también se escribe J·s).

- **Módulo:** $L = m\,r\,v\,\operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Si son perpendiculares (órbita circular, o perihelio y afelio de una elipse), $L = m\,r\,v$. Si son paralelos, $L = 0$.
- **Dirección:** perpendicular al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$; es decir, **perpendicular al plano de la órbita**. **Sentido:** regla de la mano derecha (dedos de $\vec{r}$ hacia $\vec{v}$, el pulgar marca $\vec{L}$).
- **Depende del punto de referencia.** En gravitación se toma siempre el centro del astro que atrae.
- **Momento de una fuerza** respecto a O: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (en N·m). Derivando $\vec{L}$: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$, porque $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$. Así que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

  Si el momento de la fuerza es nulo, el momento angular se conserva.
- **Ejemplo de la Tierra:** con $m = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $r = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m y $v = 29{,}78$ km/s (NASA), $L \approx m\,r\,v = 2{,}66 \cdot 10^{40}\ \text{kg·m}^2/\text{s}$ respecto al Sol (tomando la órbita como circular).

MOMENTO ANGULAR CON VECTORES

Una partícula de 2 kg está en $\vec{r} = (3\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath})$ m y se mueve con $\vec{v} = (-2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ m/s. Calcula su momento angular respecto al origen.

Respuesta modelo

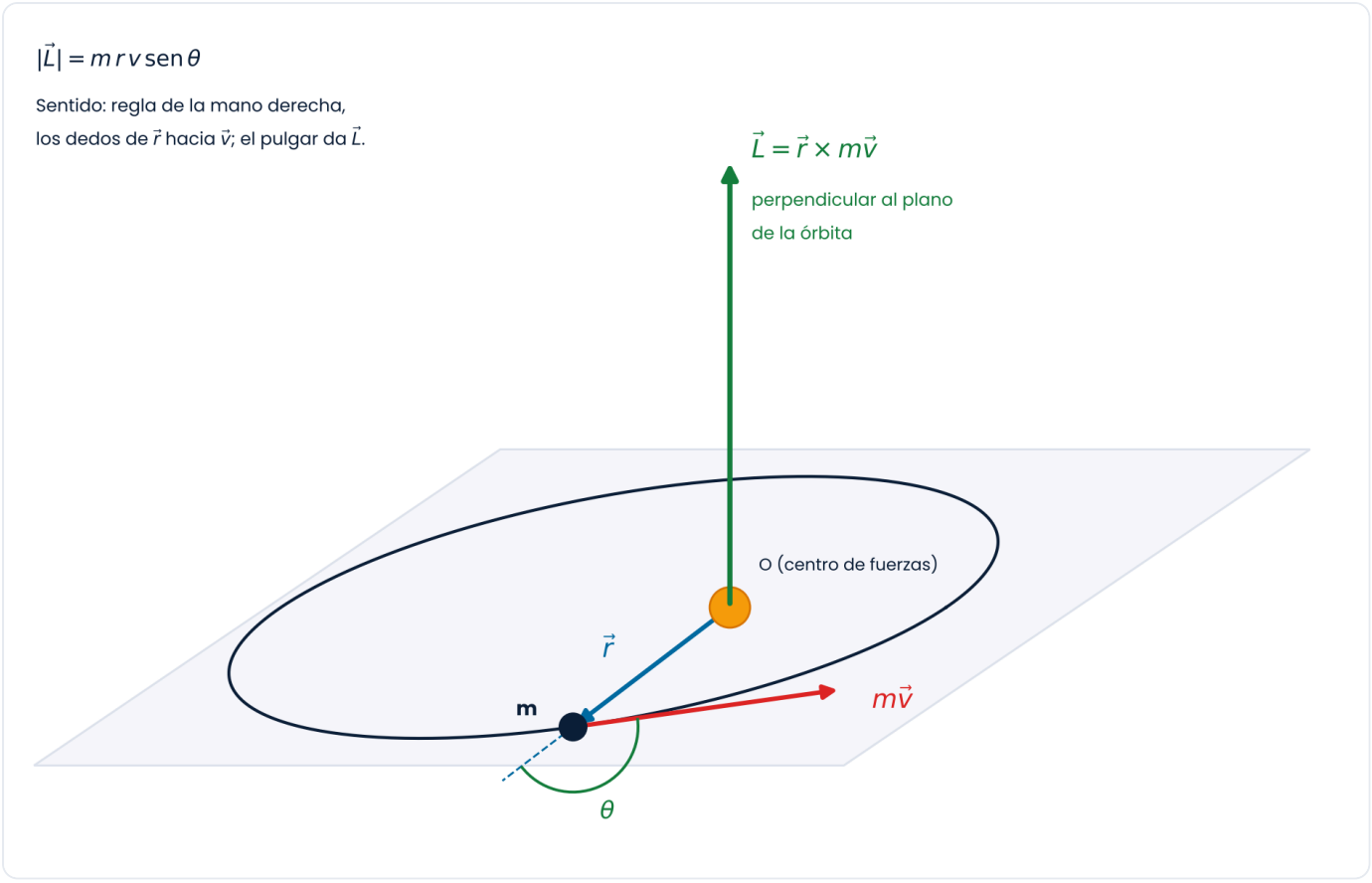
$$\vec{L} = m\,(\vec{r} \times \vec{v}) = 2 \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\,[3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2)]\,\vec{k} = 22\,\vec{k}\ \text{kg·m}^2/\text{s}$$

Comprobación con el módulo: $r = 5$ m, $v = \sqrt{5}$ m/s y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{22}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}} = 0{,}984$, así que $L = m\,r\,v\,\operatorname{sen}\theta = 22\ \text{kg·m}^2/\text{s}$.

Por qué puntúa. El resultado va en $\vec{k}$: perpendicular al plano xy en el que están $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Da el vector, no solo el módulo.

Qué dice cada comunidad del momento angular

Andalucía: «Los problemas de momento angular se limitarán al cálculo del momento angular de una partícula» (Directrices y orientaciones 2026-27). **Canarias:** el Decreto 30/2023 y la matriz de la PAU 2027 no recogen el saber del momento angular (su saber I.2 ocupa el lugar del saber del RD); las leyes de Kepler sí («Formula las Leyes de Kepler y las aplica al movimiento planetario», matriz I.4). **Castilla y León:** la columna de saberes de la matriz de su guía 2026 no lo copia (2025-26; pendiente de confirmar para 2027), pero no lo excluye y el Decreto 40/2022 sí lo recoge. **Murcia** pide «Demostrar que el momento angular se conserva si el campo es central» (Especificaciones 2027, A2 a) y **Asturias**, «Deducir la conservación del momento angular de los planetas que giran alrededor del Sol» (ficha 2025-26).



El momento angular es perpendicular al plano de la órbita. $\vec{r}$ va del centro de fuerzas O a la partícula; $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ tiene módulo $m\,r\,v\,\mathrm{sen}\,\theta$ y su sentido lo da la regla de la mano derecha (aquí la órbita se recorre en sentido antihorario visto desde arriba, y $\vec{L}$ apunta hacia arriba).

4 Fuerzas centrales y conservación del momento angular

Una fuerza es **central** cuando en todo momento apunta hacia un punto fijo (o desde él) y su módulo depende solo de la distancia a ese punto. La gravitatoria que el Sol ejerce sobre un planeta lo es: $\vec{F} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\,\vec{u}_r$, siempre en la dirección de $\vec{r}$.

- **Segunda ley de Kepler a partir de $\vec{L}$:** en un tiempo dt el planeta avanza $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ y el radio vector barre un triángulo de área $dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|\,dt$. Por tanto la **velocidad areolar** es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{r} \times m\vec{v}|}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{constante}$$

  Áreas iguales en tiempos iguales es lo mismo que decir que L se conserva.
- **La segunda ley vale para cualquier fuerza central**, no solo para la gravedad: lo que importa es que la fuerza apunte al centro. La primera y la tercera, en cambio, son propias de una fuerza que va como $1/r^2$.
- **Consecuencia práctica:** todo satélite gira en un plano que contiene el **centro** de la Tierra. Por eso **no puede haber una órbita circular en un plano paralelo al ecuatorial** que no sea el propio ecuador: la fuerza apunta al centro de la Tierra, que no está en ese plano. Castilla y León lo preguntó en 2026 (extraordinaria, C.1) y su criterio da el punto por el «razonamiento correcto de la respuesta negativa».
- **Lo que se conserva y lo que no:** en la órbita se conservan $\vec{L}$ (la única fuerza, la gravitatoria, es central) y la energía mecánica (esa fuerza es conservativa). **No** se conservan el momento lineal $m\vec{v}$ (cambia de dirección a cada instante), ni la energía cinética ni la potencial por separado (salvo en la órbita circular).

Fuerza central ⇒ $\vec{F}$ es paralela a $\vec{r}$.

⇒ el momento de la fuerza respecto al centro es nulo: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$.

↓

⇒ $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$: $\vec{L}$ **es constante** en módulo, dirección y sentido.

↓

⇒ **Dirección constante:** la órbita está siempre en el mismo plano, el perpendicular a $\vec{L}$ que pasa por el centro de fuerzas.

↓

⇒ **Módulo constante:** el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales (segunda ley de Kepler).

5 Velocidades en el perihelio y en el afelio

Es el problema típico del momento angular: te dan las distancias mínima y máxima (o una de ellas y una velocidad) y te piden las velocidades. La clave es que **en el perihelio y en el afelio $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares**, así que $L = m\,r\,v$ en los dos puntos.

- **Conservación de L entre los dos puntos:** $m\,r_p\,v_p = m\,r_a\,v_a$ ⇒

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p}$$

  La masa del satélite se simplifica. **En cualquier otro punto** no vale $L = mrv$: hay que poner $\operatorname{sen}\theta$.

- **Dónde es máxima la velocidad:** en el perihelio, el punto más cercano. Se justifica con la **segunda ley de Kepler** (para barrer la misma área cerca del Sol hay que recorrer más arco) o con la **conservación de la energía** ($E_m = \frac{1}{2}mv^2 - GMm/r$ constante: si r es mínimo, E_c es máxima). La mínima, en el afelio.

- **Si solo te dan las distancias**, una ecuación no basta: combina L y la energía. Con $r_p v_p = r_a v_a$ y $\frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM}{r_p} = \frac{1}{2}v_a^2 - \frac{GM}{r_a}$ sale

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM\,r_a}{r_p\,(r_p + r_a)}} \qquad v_a = \sqrt{\frac{2GM\,r_p}{r_a\,(r_p + r_a)}}$$

  No hace falta memorizarlas: plantea las dos conservaciones y resuelve el sistema.

- **La Tierra:** $v_p/v_a = r_a/r_p = 152{,}100/147{,}095 = 1{,}034$ (distancias en millones de km, NASA); la NASA da 30,29 km/s en el perihelio (a primeros de enero) y 29,29 km/s en el afelio (a primeros de julio), que están en esa misma proporción.

En el perihelio	En el afelio	Igual en los dos
r mínima	r máxima	$\vec{L}$ (y $L = mrv$)
v máxima, E_c máxima	v mínima, E_c mínima	$E_m = -GMm/2a$
E_p mínima (más negativa)	E_p máxima (menos negativa)	$\vec{r} \perp \vec{v}$

En los puntos intermedios $\vec{r}$ y $\vec{v}$ no son perpendiculares.

Cuidado con la fórmula de la órbita circular

En una elipse **no** uses $v = \sqrt{GM/r}$: solo vale para órbitas circulares. **Galicia** lo deja escrito en sus criterios de 2026 (ordinaria, 1.2): «nunha órbita elíptica a velocidade do satélite non vai a ser constante, polo que NON é válido usar a expresión de velocidade orbital circular seguinte para xustificar a resposta» (en una órbita elíptica la velocidad del satélite no va a ser constante, por lo que NO es válido usar la expresión de la velocidad orbital circular para justificar la respuesta; traducido del gallego). **Cataluña** puntúa solo en parte (0,5 de 0,75) a quien justifica dónde es máxima la velocidad solo con $L = m\,r\,v\operatorname{sen}\theta$ constante, porque eso dice que $v\operatorname{sen}\theta$ es máxima, no que lo sea v (pauta de 2026 ordinaria, 1B); acepta entera la segunda ley de Kepler o la energía.

6 Energía en órbitas elípticas y tipo de trayectoria

En una órbita elíptica la energía cinética y la potencial cambian de un punto a otro, pero su suma es constante. Se demuestra (con las dos conservaciones de la sección anterior) que

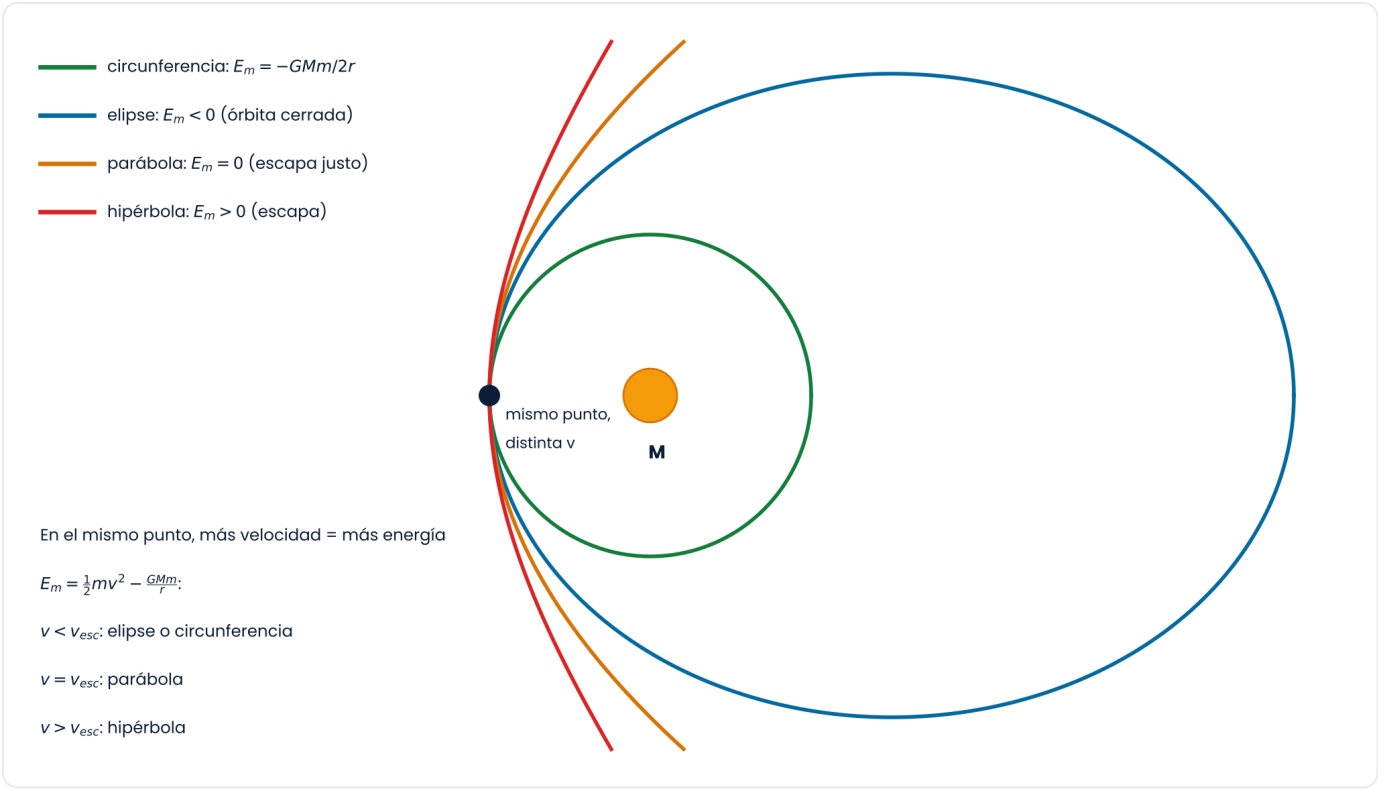
$$E_m = -\frac{GMm}{2a}$$

la misma expresión que en la circular (Tema 5), con el semieje mayor a en lugar del radio. Madrid la da escrita en el enunciado cuando la necesita (2025, ordinaria, Pregunta 1).

- **Dos caminos para la energía:** $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ en un punto donde conozcas r y v (perihelio o afelio), o $E_m = -\frac{GMm}{2a}$ si conoces el semieje. Si te sobran datos, haz los dos: es una buena comprobación.
- **El signo de E_m dice el tipo de trayectoria** (Cataluña lo pide expresamente en sus Orientacions PAU 2027: «El tipus d'òrbita segons l'energia mecànica sigui positiva, negativa o nul·la»; la Comunitat Valenciana, «Tipos de trayectorias en base a la energía mecánica total: abiertas y cerradas (elíptica y circular)» en su documento de orientación 2026-27): $E_m < 0$, órbita **cerrada** (elipse o circunferencia), el cuerpo está ligado; $E_m = 0$, **parábola**, escapa justo con velocidad nula en el infinito; $E_m > 0$, **hipérbola**, escapa con velocidad sobrante (lo de la velocidad de escape está en el Tema 4).
- **Un mismo punto, distintas órbitas:** si en un punto a distancia r lanzas el cuerpo perpendicular a $\vec{r}$, con $v = \sqrt{GM/r}$ describe una circunferencia; con v algo mayor, una elipse cuyo **perihelio** es ese punto; con v algo menor, una elipse cuyo **afelio** es ese punto; con $v = \sqrt{2GM/r}$, una parábola.
- **El trabajo de la gravedad entre perihelio y afelio** es $W = -\Delta E_p = E_{p,p} - E_{p,a} < 0$: al alejarse, la fuerza gravitatoria frena al cuerpo. Es lo que preguntó Cantabria en 2025 (Sicorax, en «Ponte a prueba»).

Un dato que no cuadra (Comunitat Valenciana)

En la extraordinaria de 2025 (Pregunta 1, opción B, repetida en el modelo 2026) un nanosatélite de 1 kg tiene $L = 5{,}6 \cdot 10^{10}$ kg·m²/s en el **apogeo**, a 7000 km del centro de la Tierra, y sale $v = L/(m\,r) = 8{,}0 \cdot 10^{3}$ m/s. Pero la velocidad circular a esa distancia (con los datos del examen, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ y $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg) es $\sqrt{GM_T/r} = 7{,}56 \cdot 10^{3}$ m/s: si va más deprisa que eso con $\vec{v} \perp \vec{r}$, ese punto es el **perigeo**, no el apogeo (el semieje sale $a = 7{,}95 \cdot 10^{3}$ km, mayor que 7000 km). El examen y sus criterios de corrección (que solo reparten la puntuación) dicen «apogeo»; las cuentas que se piden ($E_c = 3{,}2 \cdot 10^{7}$ J, $E_p = -5{,}7 \cdot 10^{7}$ J, $E_m = -2{,}5 \cdot 10^{7}$ J) no cambian. Si un dato te sale así, dilo en una frase: también puntúa saber interpretar.



Tipo de órbita según la energía. Cuatro trayectorias que pasan por el mismo punto con velocidad perpendicular al radio y distinto módulo (dibujadas con $r = p/(1 + e\cos\theta)$): circunferencia ($e = 0$), elipse ($e = 0{,}6$), parábola ($e = 1$) e hipérbola ($e = 1{,}6$). Solo las de energía negativa son cerradas.

7 Astrofísica: estrellas, agujeros negros y exoplanetas

El RD 243/2022 cierra el bloque A con una «Introducción a la cosmología y la astrofísica como aplicación del campo gravitatorio». No ha caído en ninguna de las 68 convocatorias de 2025-2026, pero está en el currículo de casi todas las comunidades. Basta con entender las ideas y **saber aplicar lo del tema** (Kepler, energía, velocidad de escape) a objetos astronómicos.

- **Agujero negro:** región de la que nada escapa, ni la luz. Una cuenta de PAU da el orden de magnitud: si la velocidad de escape $\sqrt{2GM/R}$ igualase a c, $R_S = \dfrac{2GM}{c^2}$ (**radio de Schwarzschild**). Para el Sol saldría 2,95 km y para la Tierra 8,9 mm. Es un razonamiento newtoniano que por casualidad da la expresión correcta de la relatividad general; dilo así si lo usas.
- **El agujero negro del centro de la Vía Láctea se pesa con Kepler.** La estrella S2 gira a su alrededor con $T = 16{,}05$ años y un semieje de 1031 ua (colaboración GRAVITY, 2020). Con $T^2 = a^3/M$ (años, ua y masas solares): $M = 1031^3/16{,}05^2 \approx 4{,}25 \cdot 10^6$ masas solares (con los valores sin redondear, $4{,}26 \cdot 10^6$, el resultado de GRAVITY), concentradas dentro de la órbita de S2, que se le acerca a solo unas 120 ua. Genzel y Ghez recibieron por ello el Nobel de 2020; el Event Horizon Telescope publicó su imagen en 2022 (la de M87*, en 2019).
- **Exoplanetas:** planetas de otras estrellas. El primero alrededor de una estrella como el Sol, 51 Pegasi b, lo descubrieron Mayor y Queloz en 1995 (Nobel 2019). El NASA Exoplanet Archive tenía **6451** confirmados a 1 de noviembre de 2026. Se detectan sobre todo por **tránsito** (el planeta tapa un poco la estrella cada periodo) y por **velocidad radial** (la estrella se bambolea; Doppler, Tema 14). Con el periodo y la tercera ley se obtiene el semieje o la masa de la estrella: es el problema de TRAPPIST-1 de Illes Balears 2026.
- **Ondas gravitacionales:** ondulaciones del espacio-tiempo que predice la relatividad general de Einstein. LIGO detectó la primera el 14 de septiembre de 2015 (anunciada en febrero de 2016), producida por la fusión de dos agujeros negros; Nobel de 2017. El Grupo de Relatividad y Gravitación de la Universitat de les Illes Balears forma parte de la colaboración LIGO. La ESA prepara **LISA**, un detector en el espacio.

Nube de gas y polvo (sobre todo hidrógeno) que se contrae por su propia gravedad y se calienta: **protoestrella**.

↓

Secuencia principal

en el núcleo se funde hidrógeno en helio; la presión del gas caliente equilibra la gravedad. El Sol lleva así unos 4600 millones de años.

↓

Gigante roja

se agota el hidrógeno del núcleo, este se contrae y las capas externas se hinchan; empiezan otras fusiones (helio en carbono y oxígeno…).

↓

Final de una estrella como el Sol

expulsa sus capas (nebulosa planetaria) y queda una **enana blanca**, del tamaño de la Tierra, que se enfría poco a poco (masa máxima: el límite de Chandrasekhar, unas 1,4 masas solares).

↓

Final de una estrella de más de unas 8 masas solares

el núcleo colapsa y estalla una **supernova**; queda una **estrella de neutrones** o, en las más masivas, un **agujero negro**.

RADIO DE SCHWARZSCHILD

¿Hasta qué radio habría que comprimir el Sol ($GM_\odot = 1{,}327 \cdot 10^{20}\ \mathrm{m^3/s^2}$) para que su velocidad de escape fuese la de la luz?

Respuesta modelo

Igualo la velocidad de escape (Tema 4) a c: $\sqrt{2GM/R} = c \Rightarrow R = \dfrac{2GM}{c^2} = \dfrac{2 \cdot 1{,}327 \cdot 10^{20}}{(3{,}00 \cdot 10^8)^2} = 2{,}95 \cdot 10^3$ m, unos 3 km (hoy su radio es de unos 696 000 km).

Por qué puntúa. Es una estimación: el tratamiento correcto es relativista, pero el resultado coincide.

Cosmología y astrofísica: qué dice cada comunidad

Canarias: la matriz de la PAU 2027 recoge los saberes I.1–I.4 del bloque de gravitación, pero no el I.5 del currículo, que es la cosmología. **Castilla-La Mancha:** «se preguntará solo sobre el criterio a. No se preguntará por la implicación de la física en la evolución de objetos astronómicos, el conocimiento del universo o la repercusión de la investigación…» (orientación Crue 2025-26 publicada por la UCLM, A5; pendiente de confirmar para 2027); el criterio a es «Describir la teoría del Big Bang, la expansión del universo, la materia y la energía oscuras». **Murcia:** «Describir cualitativamente el modelo del Big Bang, la expansión del universo, la materia y la energía oscuras» (Especificaciones 2027, A5 a). **Comunitat Valenciana:** el bloque 1 del Decreto 108/2022 no recoge la cosmología, pero el documento de orientación 2026-27 recoge el saber del RD y pone de ejemplo «Identifica la hipótesis de la existencia de materia oscura a partir de los datos de rotación de galaxias y la masa del agujero negro central». **Illes Balears** añade las aportaciones de sus observatorios e instituciones (Decret 43/2025), **Asturias** el «caso asturiano» (ficha 2025-26) y **Aragón** sugiere introducir la relatividad general y las ondas gravitacionales (orientaciones del currículo, Orden ECD/1173/2022). **Andalucía** no la cita en sus orientaciones 2026-27, pero tampoco la excluye.

8 Cosmología: el universo en expansión, la materia oscura y las misiones

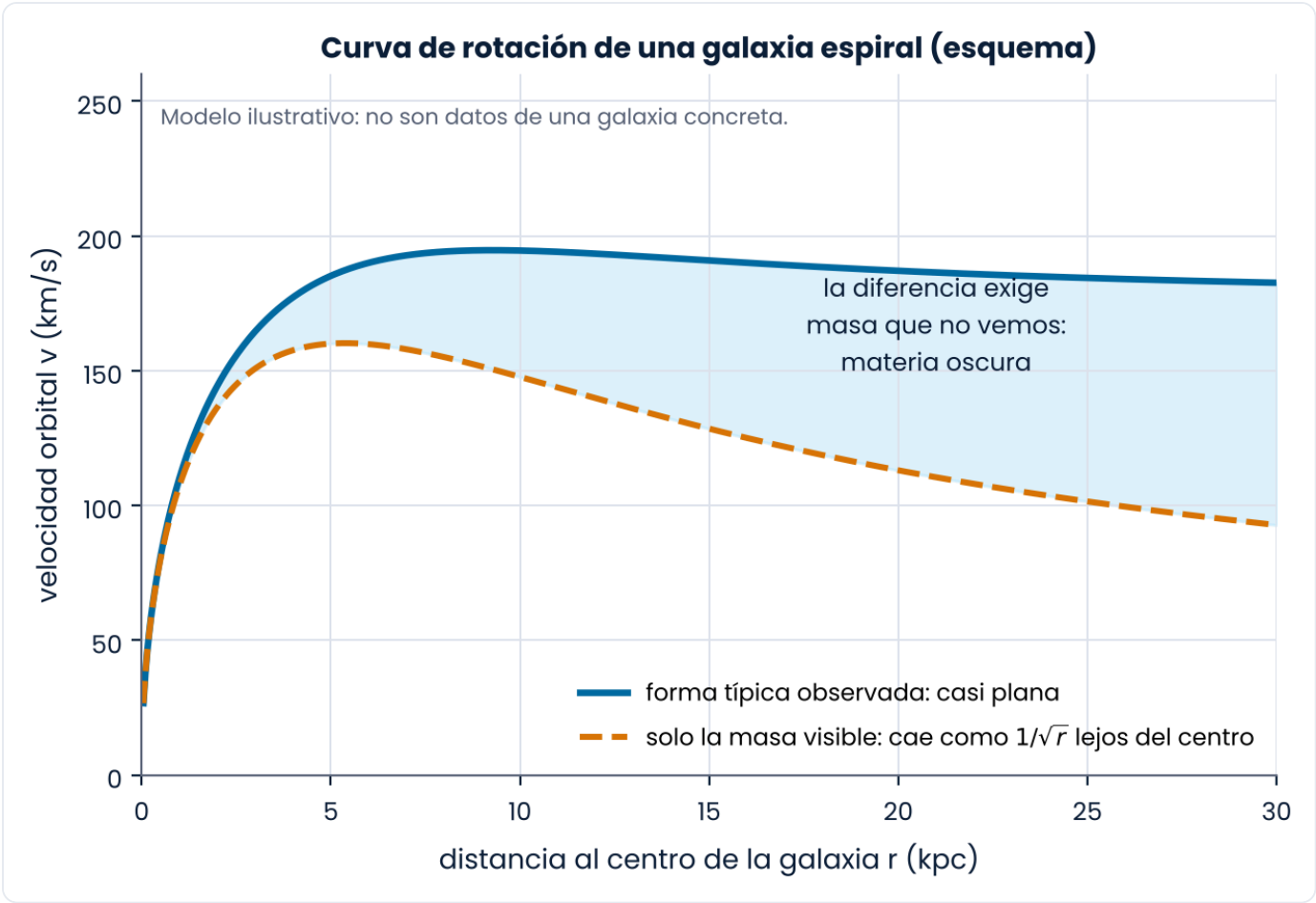
La **cosmología** estudia el universo en conjunto: su origen, su evolución y de qué está hecho. El modelo aceptado es el del **Big Bang**: el universo empezó hace unos **13 800 millones de años** en un estado muy

denso y caliente y desde entonces **se expande** y se enfría. No fue una explosión en un punto del espacio: es el propio espacio el que se estira.

- **Ley de Hubble-Lemaître:** las galaxias lejanas se alejan con una velocidad proporcional a su distancia, $v = H_0\, d$ (Lemaître, 1927; Hubble, 1929; la Unión Astronómica Internacional recomendó este nombre en 2018). Con $H_0 = 67{,}4$ km/s/Mpc (satélite Planck, ESA), una galaxia a 100 Mpc se aleja a unos 6740 km/s. El inverso $1/H_0$ da una edad aproximada: 14 500 millones de años. Otras medidas dan cerca de 73 km/s/Mpc; esa discrepancia (la «tensión de Hubble») sigue abierta.
- **Pruebas del Big Bang:** la expansión (corrimiento al rojo de las galaxias, Tema 14), la **radiación de fondo de microondas** (el «eco» del universo joven, descubierta por Penzias y Wilson en 1965; hoy a 2,725 K) y las proporciones de hidrógeno y helio del universo.
- **Materia oscura:** en las galaxias espirales las estrellas lejanas del centro giran casi a la misma velocidad que las cercanas (curva de rotación plana). Con $v^2 = GM(r)/r$, si v no cambia, $M(r)$ crece proporcional a r: hay mucha más masa que la que brilla. Ya lo había sugerido Zwicky en 1933 con los cúmulos de galaxias, y Vera Rubin lo midió en los años setenta. No emite ni absorbe luz; solo se nota por su gravedad.
- **Energía oscura:** en 1998 dos equipos descubrieron, con supernovas lejanas, que la expansión **se acelera** (Nobel 2011). Lo que la acelera se llama energía oscura. No confundirla con la materia oscura: la materia oscura atrae y frena; la energía oscura acelera.
- **De qué está hecho el universo** (Planck 2018): materia ordinaria (la de los átomos), ≈ 4,9 %; materia oscura, ≈ 26,4 %; energía oscura, ≈ 68,5 %. Todo lo que vemos es menos del 5 %.

Misión u observatorio	Qué hace	Relación con España
ESAC (ESA)	Acoge los centros de operaciones científicas y los archivos de las misiones de astronomía y ciencias planetarias de la ESA (los satélites se controlan desde el ESOC, en Darmstadt)	Está en Villanueva de la Cañada (Madrid)
Euclid (ESA, 2023)	Cartografía miles de millones de galaxias para estudiar la materia y la energía oscuras	Su centro de operaciones científicas está en el ESAC
Proba-3 (ESA, 2024)	Dos satélites en formación que crean eclipses de Sol artificiales para estudiar la corona	Sener (España) fue el contratista principal; Galicia la usó de contexto en 2026
LIGO y LISA	Detectores de ondas gravitacionales (LISA, de la ESA, en el espacio)	La Universitat de les Illes Balears participa en LIGO
Gran Telescopio Canarias	Telescopio óptico e infrarrojo de 10,4 m	Observatorio del Roque de los Muchachos (La Palma)

Para la PAU basta con saber citar alguna misión o instalación y para qué sirve; no se piden fechas ni cifras de las misiones.



Por qué se habla de materia oscura. Si solo existiera la masa que vemos, lejos del centro la velocidad caería como $1/\sqrt{r}$, igual que en el sistema solar (línea discontinua). Lo que se mide se parece a la línea continua, casi plana. Modelo ilustrativo (disco visible y halo), no datos de una galaxia concreta.

9 Ejercicio resuelto: masa de Marte, velocidades y energía de la sonda Hope (Madrid 2026)

PAU COMUNIDAD DE MADRID 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA, EXAMEN COINCIDENTE (RESERVA 1) · PREGUNTA 1 (BLOQUE CAMPO GRAVITATORIO, SIN OPCIONALIDAD; 2,5 PUNTOS)

El satélite *Hope*, que está en órbita elíptica alrededor del planeta Marte, fue enviado por la agencia de los Emiratos Árabes Unidos en el año 2020. La misión de este satélite es recoger datos sobre el clima marciano, las tormentas de polvo, así como analizar la presencia de vapor de agua para estimar si Marte fue un lugar habitable en el pasado. La sonda cuenta con una cámara digital de alta resolución y dos espectrómetros, uno infrarrojo y otro ultravioleta. El periodo de su órbita es de 53 horas, la distancia más corta con respecto al centro de Marte (periastro) es de 23000 km y la más larga (apoastro) de 45000 km. La masa del satélite es de 1350 kg y el módulo del momento angular del satélite en la órbita es $4{,}86 \cdot 10^{13}$ kg m² s⁻¹. Determine: (Dato: Constante de la Gravitación Universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻².)

a) La masa del planeta Marte. (1 punto)

b) La velocidad del satélite en el apoastro y en el periastro. (1 punto)

c) La energía del satélite en la órbita. (0,5 puntos)

Apartado a)

1. **La idea:** conoces el periodo y la órbita de un satélite, así que la **tercera ley de Kepler** te da la masa del astro central. Como la órbita es elíptica, se usa el **semieje mayor** a, no el periastro ni el apoastro.
2. Semieje mayor: el eje mayor es la suma de las distancias mínima y máxima al foco, $2a = r_p + r_a$ ⇒ $a = \dfrac{2{,}3 \cdot 10^7 + 4{,}5 \cdot 10^7}{2} = 3{,}4 \cdot 10^7$ m.
3. Periodo en segundos: $T = 53 \cdot 3600 = 1{,}908 \cdot 10^5$ s.
4. Tercera ley (para la circunferencia se deduce igualando la fuerza gravitatoria a la centrípeta; para la elipse vale con a): $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} a^3$ ⇒

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{G\,T^2} = \frac{4\pi^2\,(3{,}4 \cdot 10^7)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,(1{,}908 \cdot 10^5)^2} = 6{,}39 \cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

SOLUCIÓN $M_{\text{Marte}} = 6{,}39 \cdot 10^{23}$ kg, igual que la solución oficial. El valor de la NASA es $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg: el método funciona.

Apartado b)

1. **La idea:** la fuerza gravitatoria es **central** (apunta siempre al centro de Marte), su momento respecto a ese punto es nulo y el **momento angular se conserva**. Ya te dan su módulo.
2. En el periastro y en el apoastro $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son **perpendiculares** ($\operatorname{sen} 90^\circ = 1$), así que $L = m\,r\,v$ en los dos puntos.
3. Apoastro: $v_a = \dfrac{L}{m\,r_a} = \dfrac{4{,}86 \cdot 10^{13}}{1350 \cdot 4{,}5 \cdot 10^7} = 800$ m/s.
4. Periastro: $v_p = \dfrac{L}{m\,r_p} = \dfrac{4{,}86 \cdot 10^{13}}{1350 \cdot 2{,}3 \cdot 10^7} = 1{,}57 \cdot 10^3$ m/s.
5. Comprobación: $v_p / v_a = r_a / r_p = 45\,000 / 23\,000 = 1{,}96$. Es más rápido donde está más cerca, como dice la segunda ley de Kepler.

SOLUCIÓN $v_a = 800$ m/s en el apoastro y $v_p = 1{,}57 \cdot 10^3$ m/s en el periastro.

Apartado c)

1. **La idea:** la energía mecánica se conserva y se puede calcular en un punto donde conozcas r y v, o con la expresión de la órbita elíptica.
2. Con el semieje: $E_m = -\dfrac{GMm}{2a} = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}39 \cdot 10^{23} \cdot 1350}{2 \cdot 3{,}4 \cdot 10^7} = -8{,}46 \cdot 10^8$ J.
3. Comprobación en el periastro: $E_m = \frac{1}{2} m v_p^2 - \dfrac{GMm}{r_p} = 1{,}65 \cdot 10^9 - 2{,}50 \cdot 10^9 = -8{,}48 \cdot 10^8$ J. La diferencia (un 0,2 %) viene de que L y T están dados con tres cifras y no son exactamente coherentes entre sí; la solución oficial escribe $-8{,}46 \cdot 10^8$ J por los dos caminos. Cualquiera de los dos resultados es correcto con tres cifras.

SOLUCIÓN $E_m \approx -8{,}5 \cdot 10^8$ J ($-8{,}46 \cdot 10^8$ J con el semieje). Es negativa: el satélite está ligado a Marte en una órbita cerrada.

Lo que puntúa. Madrid no publica reparto por pasos para esta pregunta, solo sus criterios generales: «valorándose positivamente la identificación de los principios y leyes físicas involucradas» (aquí, nombrar la tercera ley de Kepler y la conservación del momento angular por ser una fuerza central), «Se valorará la destreza en la obtención de resultados numéricos y el uso correcto de las unidades en el Sistema Internacional» y la nota de cada apartado va «desglosada en múltiplos de 0,1 puntos». La solución oficial («Documento de trabajo orientativo») sigue exactamente estos pasos.

Error típico que te quita puntos. Usar el periastro o el apoastro como si fuera el radio en la tercera ley (con $r = 2{,}3 \cdot 10^7$ m saldría una masa de Marte 3,2 veces menor), o calcular las velocidades con $v = \sqrt{GM/r}$, que solo vale en órbitas circulares (daría $1{,}36 \cdot 10^3$ m/s en el periastro en lugar de $1{,}57 \cdot 10^3$ m/s). Y no pasar las horas a segundos y los km a metros.

10 Ejercicio resuelto: semieje, periodo y velocidad en el perihelio del cometa Halley (Cataluña 2026)

PAU CATALUÑA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 1, OPCIÓN B (A ELEGIR ENTRE A Y B; 2,5 PUNTOS; VERSIÓN EN CASTELLANO PUBLICADA POR LA COMISIÓN)

Edmond Halley (1656-1742) estudió los registros históricos de observaciones de cometas de los siglos XVI y XVII, y llegó a la conclusión de que varias de estas observaciones correspondían al mismo objeto. Se trataba de un cometa periódico grande y brillante que orbitaba alrededor del Sol y que había sido observado por última vez en 1682. Hoy en día, este cometa se conoce como el cometa Halley. Datos: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m² kg⁻². Masa del Sol: $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg. Distancia del perihelio al centro del Sol: $r_P = 0{,}575$ ua. Velocidad en el afelio: $v_A = 896$ m s⁻¹. Distancia del afelio al centro del Sol: $r_A = 35{,}3$ ua. 1 ua $= 1{,}50 \times 10^{11}$ m.

1.1) Haga un dibujo esquemático de la órbita elíptica del cometa Halley, indicando el perihelio y el afelio. Calcule el semieje mayor de la elipse y el periodo orbital del cometa. Razone si Edmond Halley pudo observar el cometa que lleva su nombre más de una vez. (1,25 puntos)

1.2) Razone en qué punto de su órbita el cometa alcanza la velocidad máxima. A partir de los datos proporcionados, calcule la velocidad del cometa Halley cuando pasa por el perihelio de su órbita, indicando claramente los principios físicos empleados. (1,25 puntos)

Apartado 1.1)

1. **La idea:** primera ley de Kepler para el dibujo, $2a = r_P + r_A$ para el semieje y tercera ley para el periodo.
2. **Dibujo:** una elipse muy alargada con el Sol en uno de los focos (no en el centro). El **perihelio** es el punto de la elipse sobre el eje mayor más cercano al Sol y el **afelio**, el más alejado, en el otro extremo del eje mayor.
3. Semieje mayor: $a = \dfrac{r_P + r_A}{2} = \dfrac{0{,}575 + 35{,}3}{2} = 17{,}94$ ua $= 2{,}69 \cdot 10^{12}$ m.
4. Tercera ley: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_S}\, a^3$, con $\dfrac{4\pi^2}{GM_S} = \dfrac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}} = 2{,}97 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{s^2/m^3}$. Entonces $T = \sqrt{2{,}97 \cdot 10^{-19} \cdot (2{,}69 \cdot 10^{12})^3} = 2{,}41 \cdot 10^9$ s, unos 76 años.
5. Atajo que acepta la pauta: para el Sol, $T^2 = a^3$ con T en años y a en ua, así que $T = 17{,}94^{3/2} = 76{,}0$ años. (Con los datos de G, M_S y la ua del enunciado la constante sale 1,008 años²/ua³ y $2{,}41 \cdot 10^9$ s son 76,3 años de 365,25 días; la diferencia es menor del 0,5 %.)

6. **¿Lo vio dos veces?** Halley vivió de 1656 a 1742 y vio el cometa en 1682. La vuelta siguiente fue unos 76 años después, en 1758 (pasó por el perihelio en marzo de 1759), cuando ya había muerto; la anterior, hacia 1607, fue antes de que naciera. Solo pudo verlo una vez.

SOLUCIÓN $a = 17{,}94$ ua $= 2{,}69 \cdot 10^{12}$ m; $T = 2{,}41 \cdot 10^{9}$ s ≈ 76 años. Halley solo pudo observarlo una vez, en 1682.

Apartado 1.2)

1. **Dónde es máxima:** en el **perihelio**. Por la segunda ley de Kepler, el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales; cerca del Sol el radio es corto, así que para barrer la misma área el cometa tiene que recorrer más arco en el mismo tiempo: va más deprisa. (También con la energía: $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - GM_Sm/r$ es constante, así que v es máxima donde r es mínima.)
2. **Principio:** la fuerza gravitatoria del Sol es central, su momento respecto al Sol es nulo y el **momento angular se conserva**. En el perihelio y en el afelio $\vec{r} \perp \vec{v}$, así que $m\,r_P\,v_P = m\,r_A\,v_A$.
3. $v_P = v_A\,\dfrac{r_A}{r_P} = 896 \cdot \dfrac{35{,}3}{0{,}575} = 5{,}50 \cdot 10^{4}$ m/s. Las ua se cancelan en el cociente: no hace falta pasarlas a metros.
4. Comprobación por energía: $v_P = \sqrt{v_A^2 + 2GM_S\left(\dfrac{1}{r_P} - \dfrac{1}{r_A}\right)}$ con las distancias en metros da también $5{,}50 \cdot 10^{4}$ m/s.

SOLUCIÓN La velocidad es máxima en el perihelio: $v_P = 5{,}5 \cdot 10^{4}$ m/s (55 km/s), unas 61 veces mayor que en el afelio.

Lo que puntúa. La pauta oficial (en catalán) reparte 1.1 así: 0,25 por el dibujo («Cal dibuixar una el·lipse amb el Sol en un dels focus»: hay que dibujar una elipse con el Sol en uno de los focos), 0,25 por el semieje, 0,5 por el periodo con la tercera ley («Es considerarà correcte tant si l'estudiant calcula la constant com si dona directament el seu valor»: vale tanto calcular la constante como dar su valor) y 0,25 por razonar que Halley solo lo vio en 1682. En 1.2, 0,75 por razonar dónde es máxima la velocidad (con la segunda ley o con la energía; con el momento angular solo, 0,5, «atès que al periheli sinθ és màxim per tant no podem garantir que la velocitat sigui màxima») y 0,5 por el cálculo; «no es penalitzarà el fet que l'estudiant utilitzi directament l'expressió L = m r v sense justificar-la». Además, cualquier error u olvido de unidades resta 0,25 en el problema y dar resultados con 6 o más cifras significativas, o con solo 1, resta 0,1.

Error típico que te quita puntos. Justificar la velocidad máxima solo con «L es constante, así que si r es mínimo v es máxima»: la pauta lo puntúa solo en parte, porque $L = m\,r\,v\,\operatorname{sen}\theta$ y el ángulo cambia a lo largo de la órbita. Y poner el Sol en el centro de la elipse en el dibujo.

11 Ejercicio resuelto: semieje, masa de la estrella y ley de las áreas en TRAPPIST-1 (Illes Balears 2026)

PAU ILLES BALEARS 2026 · CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA (JULIO) · PREGUNTA 1 (OBLIGATORIA; 2 PUNTOS; TRADUCIDO DEL CATALÁN)

Entre 2015 y 2017 se identificaron siete planetas alrededor de la estrella TRAPPIST-1. El planeta más próximo a la estrella tiene un periodo orbital de 1,51 días y la longitud del semieje mayor de su órbita es de 0,01154 ua. Responded a, b y c. (Del formulario del examen: $G \approx 6{,}6743 \times 10^{-11}$ N m² kg⁻²; 1 ua $= 149\,597\,870\,700$ m.)

a) El segundo planeta más cercano a la estrella tiene un periodo orbital de 2,42 días. Determinad la longitud del semieje mayor de la órbita usando una de las leyes de Kepler. (0,75 puntos)

b) El cociente de la tercera ley de Kepler que incluye los valores del periodo orbital y la longitud del semieje mayor es igual a $4\pi^2/(G\,M_{\text{estrella}})$. Determinad la masa de TRAPPIST-1, en kilogramos, y el cociente de esta masa respecto a la masa del Sol ($1{,}99 \times 10^{30}$ kg). (0,75 puntos)

c) El área barrida por el segmento entre la estrella TRAPPIST-1 y uno de los planetas durante un tiempo t_1 después de que el planeta pase por el periastro es A_1. ¿El tiempo necesario para que el área barrida después de que el planeta pase por el apoastro sea también A_1 será menor, igual o mayor que t_1? Justificad la respuesta. (0,5 puntos)

Apartado a)

1. **La idea:** los dos planetas giran alrededor de la **misma estrella**, así que tienen la misma constante de la tercera ley: $\dfrac{T_1^2}{a_1^3} = \dfrac{T_2^2}{a_2^3}$. Se puede trabajar en días y ua sin pasar a unidades del SI.
2. $a_2 = a_1 \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^{2/3} = 0{,}01154 \cdot \left(\dfrac{2{,}42}{1{,}51}\right)^{2/3} = 0{,}01154 \cdot 1{,}369 = 0{,}0158$ ua.
3. En metros: $0{,}0158 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} = 2{,}36 \cdot 10^9$ m.

SOLUCIÓN $a_2 = 0{,}0158$ ua $= 2{,}36 \cdot 10^9$ m. Tiene sentido: más periodo, órbita mayor.

Apartado b)

1. **La idea:** ahora sí hay que pasar al SI, porque G está en N m² kg⁻². Con los datos del primer planeta: $a_1 = 0{,}01154 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} = 1{,}726 \cdot 10^9$ m y $T_1 = 1{,}51 \cdot 86\,400 = 1{,}305 \cdot 10^5$ s.
2. De $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$:

$$M = \frac{4\pi^2 a_1^3}{G\,T_1^2} = \frac{4\pi^2\,(1{,}726 \cdot 10^9)^3}{6{,}6743 \cdot 10^{-11}\,(1{,}305 \cdot 10^5)^2} = 1{,}79 \cdot 10^{29}\ \text{kg}$$

3. Cociente con el Sol: $\dfrac{M}{M_\odot} = \dfrac{1{,}79 \cdot 10^{29}}{1{,}99 \cdot 10^{30}} = 0{,}090$.

SOLUCIÓN $M = 1{,}79 \cdot 10^{29}$ kg ($1{,}788 \cdot 10^{29}$ kg en la solución oficial), unas 0,090 veces la masa del Sol: TRAPPIST-1 es una estrella enana roja, mucho menor que el Sol.

Apartado c)

1. **Segunda ley de Kepler (ley de las áreas):** el segmento que une la estrella con el planeta barre **áreas iguales en tiempos iguales**, en cualquier tramo de la órbita.
2. Su origen es la conservación del momento angular (la fuerza es central): la velocidad areolar $dA/dt = L/2m$ es constante.
3. Si el área es la misma (A_1), el tiempo también: en el apoastro el planeta va más despacio, pero el radio vector es más largo y la «cuña» que barre es más estrecha y más larga, con la misma área.

SOLUCIÓN El tiempo es **igual** a t_1.

Lo que puntúa. Los criterios oficiales (UIB, julio de 2026, en catalán) dan en a) +0,2 por escribir la tercera ley como T^2/a^3 constante, +0,2 por plantear la igualdad con los datos y +0,35 por el resultado, y añaden que «Substituir els valors numèrics dins l'expressió de la tercera llei de Kepler sense unitats, no es considera error d'unitats» (sustituir

sin unidades en la tercera ley no se considera error de unidades); en b) +0,2 por la expresión, +0,3 por la masa y +0,25 por el cociente; en c) +0,2 por enunciar la segunda ley, +0,2 por aplicarla y +0,1 por la respuesta, que solo suma si se ha puntuado alguno de los dos primeros. En toda la prueba, un resultado que difiere en una potencia de 10 o que va sin unidades (o con unidades incorrectas) resta 0,1.

Error típico que te quita puntos. En c), contestar «mayor» porque en el apoastro va más despacio: la ley habla de áreas, no de arcos. En b), meter el periodo en días o el semieje en ua junto con G del SI (el resultado sale con muchas potencias de 10 de error).

Conceptos clave

Primera ley de Kepler

Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos.

Segunda ley de Kepler

El radio vector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Equivale a la conservación del momento angular y vale para cualquier fuerza central.

Tercera ley de Kepler

El cuadrado del periodo es proporcional al cubo del semieje mayor: $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$, con una constante que solo depende de la masa del astro central.

Semieje mayor

Mitad del eje mayor de la elipse: $a = (r_p + r_a)/2$. En una circunferencia es el radio.

Perihelio y afelio

Puntos de la órbita más cercano y más lejano al Sol (perigeo y apogeo si es la Tierra; periastro y apoastro si es otra estrella). En ellos $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

Excentricidad

Número entre 0 y 1 que mide lo alargada que es una elipse: $r_p = a(1-e)$, $r_a = a(1+e)$. La de la Tierra es 0,017.

Momento angular

De una partícula respecto a un punto: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, de módulo $m\,r\,v\,\operatorname{sen}\theta$, perpendicular al plano de $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Unidad: kg·m²/s.

Momento de una fuerza

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$; es la variación del momento angular por unidad de tiempo: $d\vec{L}/dt = \vec{M}$.

Fuerza central

Fuerza dirigida siempre hacia un punto fijo y cuyo módulo depende solo de la distancia a él. Su momento respecto a ese punto es nulo, así que conserva el momento angular.

Velocidad areolar

Área barrida por el radio vector por unidad de tiempo: $dA/dt = L/2m$, constante en un campo central.

Unidad astronómica (ua)

Unidad de longitud igual a 149 597 870 700 m (definición exacta de la Unión Astronómica Internacional, 2012), aproximadamente la distancia media Tierra-Sol.

Radio de Schwarzschild

$R_S = 2GM/c^2$: si una masa M (sin rotación) se concentra en una esfera de radio menor que R_S, es un agujero negro. Para el Sol, unos 3 km.

Exoplaneta

Planeta que gira alrededor de una estrella distinta del Sol. Se detectan sobre todo por tránsito y por velocidad radial.

Ley de Hubble-Lemaître

Las galaxias lejanas se alejan con una velocidad proporcional a su distancia, $v = H_0 d$, con $H_0 \approx 67{,}4$ km/s/Mpc (Planck 2018). Es la prueba de que el universo se expande.

Radiación de fondo de microondas

Radiación que llena todo el universo, emitida cuando este tenía unos 380 000 años; hoy está a 2,725 K. Es una de las pruebas del Big Bang.

Materia oscura

Materia que no emite ni absorbe luz y solo se detecta por su gravedad (curvas de rotación de las galaxias, cúmulos). Es ≈ 26 % del contenido del universo.

Energía oscura

Lo que hace que la expansión del universo se acelere (descubierto en 1998). Es ≈ 68,5 % del contenido del universo.

Onda gravitacional

Perturbación del espacio-tiempo que viaja a la velocidad de la luz, predicha por la relatividad general; LIGO detectó la primera en 2015.

MODO PAU

Siete claves que valen puntos

Deduce Kepler III

Fuerza gravitatoria = fuerza centrípeta con $v = 2\pi r/T \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$. **Andalucía** exige deducirla antes de aplicarla; en **Cantabria**, si piden deducirla, citarla sin explicaciones no vale.

Semieje mayor

En una elipse, en la tercera ley y en la energía va $a = (r_p + r_a)/2$, **nunca** r_p ni r_a.

Cociente sin G

Si dos cuerpos giran alrededor del **mismo** astro, $T_1^2/a_1^3 = T_2^2/a_2^3$: puedes dejar días y ua. Con G, todo en **metros y segundos**.

L en los extremos

Fuerza **central** ⇒ $\vec{L}$ constante. En perihelio y afelio $\vec{r} \perp \vec{v}$: $r_p v_p = r_a v_a$. Nombra el principio.

Dónde va más rápido

En el perihelio. Justifícalo con la **segunda ley** o con la **energía**; con solo L Cataluña da puntuación parcial.

Nada de √(GM/r)

En órbitas elípticas **no vale** la velocidad circular: Galicia lo dice en sus criterios de 2026.

Energía y tipo de órbita

$E_m = -GMm/2a$: negativa, órbita cerrada; cero, parábola; positiva, hipérbola.

Cómo te lo pueden preguntar

- El tema (leyes de Kepler o momento angular) sale en **19 de las 68** convocatorias ordinarias y extraordinarias de 2025 y 2026, en **13 comunidades**. No ha caído en esas convocatorias de Andalucía, Asturias, Castilla-La Mancha ni Extremadura (Andalucía sí lo puso en reservas de 2025, y Asturias en su modelo de 2025).
- Tercera ley de Kepler: deducirla, calcular la masa del astro central (Marte, Júpiter, una estrella con exoplanetas), el semieje o el periodo de otro cuerpo, o la distancia con un cociente sin G ni la masa: sale en **18 de las 68** convocatorias, en **12 comunidades** (Aragón, Illes Balears, Canarias, Cantabria, Cataluña, Comunitat Valenciana, Galicia, La Rioja, Madrid, Murcia, Navarra y País Vasco).
- Momento angular y segunda ley: en qué punto de la órbita la velocidad es máxima o mínima, velocidad en el perihelio a partir de la del afelio (o al revés), momento angular de un satélite o por qué una fuerza central obliga a una órbita plana (Castilla y León 2026): sale en **8 de las 68** convocatorias, en **7 comunidades** (Cantabria, Castilla y León, Cataluña, Comunitat Valenciana, Galicia, Murcia y Navarra).
- Energía en una órbita elíptica (con $E_m = -GMm/2a$ o en un punto con r y v) y tipo de órbita según su signo: acompaña a menudo a las dos anteriores (Madrid, Cantabria, Comunitat Valenciana); el cálculo de energías en órbita se cuenta en el Tema 5.

- Cosmología y astrofísica: **0 de las 68** convocatorias de 2025-2026. Lo más parecido es el modelo de 2027 de Castilla-La Mancha (Pregunta 4B b, 0,5 puntos): «Comparar el resultado con la edad del universo (~1.4·10¹⁰ años) e interpreta el resultado», y los contextos de exoplanetas (Illes Balears) y misiones (Galicia, Madrid).

No lo confundas

- Semieje mayor con distancia en el perihelio o en el afelio: en la tercera ley y en $E_m = -GMm/2a$ va el semieje, $a = (r_p + r_a)/2$.
- Momento angular ($\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, en kg·m²/s) con momento lineal ($m\vec{v}$, en kg·m/s) y con momento de una fuerza ($\vec{r} \times \vec{F}$, en N·m). En una órbita se conserva $\vec{L}$, no $m\vec{v}$.
- Áreas iguales en tiempos iguales con arcos iguales en tiempos iguales: cerca del Sol el arco recorrido es mayor.
- $L = m\,r\,v$ con $L = m\,r\,v\,\operatorname{sen}\theta$: la primera solo vale cuando $\vec{r} \perp \vec{v}$ (órbita circular, perihelio y afelio).
- Constante de la tercera ley de un sistema con la de otro: la Luna y los satélites artificiales comparten la de la Tierra, no la del Sol.
- Materia oscura con energía oscura: la primera atrae y explica la rotación de las galaxias; la segunda acelera la expansión del universo.
- Big Bang con una explosión en un punto del espacio: es el propio espacio el que se expande, y las galaxias se alejan unas de otras en todas direcciones.

Ponte a prueba

PAU Navarra 2026 (extraordinaria), Pregunta 1.B (a elegir entre 1.A y 1.B; 2,5 puntos). El 12 de agosto de 2026, Navarra será testigo de un eclipse total de sol. En este evento, la Luna se interpone exactamente entre la Tierra y el Sol. Consideramos que la órbita lunar es elíptica, con un apogeo de 405.000 km y un perigeo de 363.300 km, siendo su velocidad mínima v = 3.470 km/h. a) (0,75 puntos) Calcular la fuerza neta que actúa sobre la Luna debido a la atracción del Sol y la Tierra en el momento del eclipse (Luna en perigeo). b) (0,75 puntos) ¿En qué punto de la órbita se da la mínima velocidad? Justificar la respuesta. c) (1 punto) Calcular la velocidad máxima. Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ Nm² kg⁻²; $M_{\text{Tierra}} = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $R_{\text{Tierra}} = 6{,}371 \cdot 10^{6}$ m; $M_{\text{Luna}} = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; $M_{\text{Sol}} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg; $d_{\text{Tierra-Sol}} = 1{,}5 \cdot 10^{8}$ km.

Solución: a) La Luna está entre la Tierra y el Sol, alineada: las dos fuerzas tienen la misma dirección y sentidos opuestos. Tierra: $F_T = G\dfrac{M_T M_L}{r_p^2} = \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{(3{,}633 \cdot 10^{8})^2} = 2{,}22 \cdot 10^{20}$ N, hacia la Tierra. Sol, a $d = 1{,}5 \cdot 10^{11} - 3{,}633 \cdot 10^{8} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m: $F_S = G\dfrac{M_S M_L}{d^2} = 4{,}36 \cdot 10^{20}$ N, hacia el Sol. Fuerza neta: $F = 4{,}36 \cdot 10^{20} - 2{,}22 \cdot 10^{20} = 2{,}14 \cdot 10^{20}$ N **hacia el Sol** (si tomas 1,5·10¹¹ m como distancia Sol-Luna sale 2,12·10²⁰ N). El Sol tira de la Luna con el doble de fuerza que la Tierra. **b)** En el **apogeo**: la fuerza de la Tierra es central, así que el momento angular se conserva; en apogeo y perigeo $\vec{r} \perp \vec{v}$ y $r_a v_a = r_p v_p$: donde r es máximo, v es mínima (también por la segunda ley de Kepler). **c)** En el perigeo: $v_p = v_a \dfrac{r_a}{r_p} = 3470 \cdot \dfrac{405\,000}{363\,300} = 3{,}87 \cdot 10^{3}$ km/h $= 1{,}07 \cdot 10^{3}$ m/s.

PAU La Rioja 2026 (extraordinaria), Problema 1.2 (a elegir entre 1.1 y 1.2 del Grupo 1; 2 puntos; el enunciado no reparte los puntos entre a y b). Un estudiante de 2º de Bachillerato sabe que un satélite geostacionario en órbita circular alrededor de la Tierra tiene un periodo orbital aproximado de un día. También sabe que el radio de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra supuesta circular es $R_L \approx 3.8 \times 10^5$ km y que su periodo orbital es aproximadamente de 28 días. Sin embargo, no dispone de los datos de la masa de la Tierra ni de la constante de gravitación universal. a) Con los datos del enunciado (es decir, sin usar los datos de la masa de la Tierra ni de la constante de gravitación universal G), calcular el radio R_S de la órbita de un satélite geostacionario en órbita circular alrededor de la Tierra. b) Con los datos del enunciado (es decir, sin usar los datos de la masa de la Tierra ni de la constante de gravitación universal G) calcular la energía mecánica total de un satélite geoestacionario de 100 kg de masa.

Solución: a) La Luna y el satélite giran alrededor de la Tierra: tercera ley de Kepler como cociente, $\frac{T_S^2}{R_S^3} = \frac{T_L^2}{R_L^3} \Rightarrow R_S = R_L \left(\frac{T_S}{T_L}\right)^{2/3} = 3{,}8 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1}{28}\right)^{2/3} = 4{,}1 \cdot 10^4$ km (el valor real es 42 164 km; la diferencia viene de redondear el mes a 28 días y el día a 24 h). **b)** En órbita circular $E_m = -\frac{GM_T m}{2R_S}$, y de la tercera ley $GM_T = \frac{4\pi^2 R_S^3}{T_S^2}$ (no hace falta conocer G ni M_T por separado). Entonces $E_m = -\frac{2\pi^2 m R_S^2}{T_S^2} = -\frac{2\pi^2 \cdot 100 \cdot (4{,}12 \cdot 10^7)^2}{(86\,400)^2} = -4{,}5 \cdot 10^8$ J. Es negativa: el satélite está ligado a la Tierra.

PAU Cantabria 2025 (ordinaria), Pregunta 1 (a elegir entre las dos del Apartado 1; 2,5 puntos). Sicorax es un satélite de Urano. La distancia entre ambos oscila entre 5,8 y 18,5 millones de km. a) [1 PUNTO]. Calcular el trabajo realizado por el campo gravitatorio en el tránsito del punto más cercano al más alejado de la órbita del satélite alrededor del planeta. b) [0,5 PUNTOS]. ¿En qué punto de la trayectoria del satélite alrededor de Urano será mínima la velocidad orbital? c) [1 PUNTO]. Calcular la velocidad orbital mínima referida en el apartado b), sabiendo que la energía mecánica del satélite es -4,8 · 10²³ J. Datos: Masa de Urano: $M_U = 8{,}7 \cdot 10^{25}$ kg. Masa de Sicorax: $M_S = 2 \cdot 10^{18}$ kg. (Constante del examen: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻².)

Solución: a) La fuerza gravitatoria es conservativa: $W = -\Delta E_p = E_{p,\text{cerca}} - E_{p,\text{lejos}} = GM_U M_S \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right)$. Con $GM_U M_S = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 8{,}7 \cdot 10^{25} \cdot 2 \cdot 10^{18} = 1{,}16 \cdot 10^{34}$ N·m², $r_p = 5{,}8 \cdot 10^9$ m y $r_a = 1{,}85 \cdot 10^{10}$ m: $W = 1{,}16 \cdot 10^{34} \left(\frac{1}{1{,}85 \cdot 10^{10}} - \frac{1}{5{,}8 \cdot 10^9}\right) = -1{,}4 \cdot 10^{24}$ J. Es negativo: al alejarse, la fuerza de Urano frena al satélite y su energía cinética disminuye en esa cantidad. **b)** En el punto más alejado (apoapsis): el momento angular se conserva (fuerza central) y en los extremos $r_p v_p = r_a v_a$, así que donde r es máximo v es mínima. **c)** $E_m = \frac{1}{2} M_S v_a^2 - \frac{GM_U M_S}{r_a} \Rightarrow v_a = \sqrt{\frac{2}{M_S}\left(E_m + \frac{GM_U M_S}{r_a}\right)} = \sqrt{\frac{2\,(-4{,}8 \cdot 10^{23} + 6{,}27 \cdot 10^{23})}{2 \cdot 10^{18}}} = 3{,}8 \cdot 10^2$ m/s. Comprobación: $-GM_U M_S/2a$ con $a = 1{,}215 \cdot 10^{10}$ m da $-4{,}8 \cdot 10^{23}$ J, el dato del enunciado.

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (Física, bloque A «Campo gravitatorio»)
2. PAU Comunidad de Madrid 2026, ordinaria (examen coincidente): examen de Física con criterios y soluciones
3. PAU Cataluña 2026, ordinaria: examen de Física (castellano)

4. PAU Cataluña 2026, ordinaria: criterios específicos de evaluación de Física (catalán)
5. PAU Illes Balears 2026, extraordinaria: examen de Física (catalán)
6. PAU Illes Balears 2026, extraordinaria: criterios de corrección de Física (catalán)
7. PAU Navarra 2026, extraordinaria: examen de Física
8. PAU La Rioja 2026, extraordinaria: examen y criterios de Física
9. PAU Cantabria 2025, ordinaria: examen de Física
10. PAU Cantabria 2025, ordinaria: criterios de corrección de Física
11. PAU Andalucía 2025, reserva 3: examen de Física
12. PAU Canarias 2026, extraordinaria: examen de Física
13. PAU Galicia 2026, ordinaria: criterios de corrección de Física (gallego)
14. PAU Comunitat Valenciana 2025, extraordinaria: examen de Física
15. Junta de Andalucía: Directrices y orientaciones generales PAU 2026-27, Física
16. Generalitat de Catalunya: Orientacions per a l'examen de Física, PAU 2027
17. Gobierno de Canarias: Matriz de especificaciones de Física, PAU 2027
18. UCLM: Orientaciones de la materia Física (propuesta Crue), curso 2025/2026
19. Universidad de Murcia: Especificaciones para el ejercicio de Física, PAU 2027
20. Universitat de València: Documento de orientación de Física (PAU), Comunitat Valenciana 2026-27
21. Universidad de Oviedo: Información sobre la PAU 2025/2026, Física
22. NASA NSSDCA: Planetary Fact Sheet (semiejes, periodos y masas de los planetas)
23. NASA NSSDCA: Earth Fact Sheet (perihelio, afelio y velocidades orbitales de la Tierra)
24. NASA NSSDCA: Sun Fact Sheet (masa y GM del Sol)
25. Planck Collaboration (ESA): Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters (Astronomy & Astrophysics 641, A6, 2020)
26. GRAVITY Collaboration: Detection of the Schwarzschild precession in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole (Astronomy & Astrophysics 636, L5, 2020)
27. NASA Exoplanet Archive (Caltech/IPAC): recuento de exoplanetas confirmados
28. ESA: Proba-3
29. Universitat de les Illes Balears: Grupo de Relatividad y Gravitación (LIGO@UIB)
30. PAU Comunidad de Madrid 2025, ordinaria: examen de Física con criterios y soluciones (Eris; $E_m = -Gm_1m_2/2a$ dada en el enunciado)
31. PAU Comunidad de Madrid, modelo 2026: examen de Física con criterios y soluciones (Plutón, Pregunta 2.B)
32. PAU Comunidad de Madrid, modelo 2027: examen de Física con criterios y soluciones (Plutón, Pregunta 2.B)
33. PAU Illes Balears 2025, ordinaria: examen de Física (catalán; Problema 1, α-Centauri B)
34. PAU La Rioja 2025, extraordinaria: examen y criterios de Física (Problema 1.1)
35. PAU Aragón, modelo 2025: examen de Física (lunas de Júpiter)
36. PAU País Vasco 2026, extraordinaria: examen de Física (tabla de órbitas en torno a Marte)
37. PAU Castilla y León 2026, extraordinaria: examen de Física (C.1)
38. PAU Castilla y León 2026, extraordinaria: criterios de corrección de Física
39. PAU Galicia 2026, ordinaria: examen de Física (castellano; misión Proba-3)
40. PAU Cantabria 2026, ordinaria: criterios de corrección de Física (deducir la 3.ª ley de Kepler)
41. PAU Comunitat Valenciana 2025, extraordinaria: criterios de corrección de Física
42. PAU Comunitat Valenciana, modelo 2026: examen y criterios de Física
43. PAU Castilla-La Mancha, modelo 2027: examen de Física (Pregunta 4B)
44. ESA: Establishments and facilities (ESAC, Villanueva de la Cañada)
45. ESA: Euclid, mission operations (Science Operations Centre en el ESAC)
46. ESA España: Proba-3 finalizado (SENER, contratista principal)

Imágenes: Farmeando PAU: Farmeando PAU, esquema de elaboración propia (Python y matplotlib). · Farmeando PAU: Farmeando PAU, esquema de elaboración propia (Python y matplotlib). · Farmeando PAU: Farmeando PAU, esquema de elaboración propia (Python y matplotlib). · Farmeando PAU: Farmeando PAU, esquema de elaboración propia (Python y matplotlib). · Farmeando PAU: Farmeando PAU, esquema de elaboración propia (Python y matplotlib).

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 1 de noviembre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.