

Matrices

Más temas y apuntes en farmeandopau.com

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

Una matriz es una tabla de números con la que se opera **fila por columna**. En la PAU te piden sobre todo tres cosas: **despejar una matriz X** en una ecuación (multiplicando por la inversa, por el lado correcto), **calcular potencias** A^n buscando el patrón y **estudiar el rango** (a menudo con un parámetro). La regla de oro: el producto de matrices, **en general, no es conmutativo**, así que respeta siempre el orden.

1 Qué es una matriz

Una **matriz** de dimensión $m \times n$ es una tabla de números con m filas y n columnas. El elemento a_{ij} es el que está en la fila i y la columna j .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ es una matriz } 2 \times 3.$$

- Dos matrices son **iguales** si tienen la misma dimensión y los mismos elementos en las mismas posiciones. Así se plantean muchos ejercicios: igualar elemento a elemento da un sistema de ecuaciones.
- **Para modelizar:** con matrices se ordenan datos (tablas de precios o de producción), se describen grafos (matriz de adyacencia: un 1 si hay conexión entre dos nodos) y evoluciones paso a paso, como las poblaciones del ejercicio de Aragón 2026: el vector de cada mes es una matriz por el del mes anterior.
- Notación de los libros españoles: matrices con **paréntesis**, A^t para la traspuesta, A^{-1} para la inversa, I (o I_n) para la identidad y $\text{rg } A$ para el rango.

Tipo	Qué la caracteriza	Ejemplo
Fila / columna	Una sola fila ($1 \times n$) / una sola columna ($m \times 1$)	$(1 \ 2 \ 3), \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Cuadrada de orden n	Tantas filas como columnas. La diagonal principal son los a_{ii}	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
Nula	Todos sus elementos son 0	$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Diagonal	Cuadrada con ceros fuera de la diagonal principal	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Identidad I	Matriz diagonal con unos en la diagonal principal: $A \cdot I = I \cdot A = A$	$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Triangular	Cuadrada con ceros por debajo (superior) o por encima (inferior) de la diagonal	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
Simétrica	Cuadrada con $A^t = A$: $a_{ij} = a_{ji}$	$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

Tipo	Qué la caracteriza	Ejemplo
Antisimétrica	Cuadrada con $A^t = -A$: ceros en la diagonal y $a_{ij} = -a_{ji}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

2 Operaciones con matrices

- **Suma y resta:** solo entre matrices de la **misma dimensión**, elemento a elemento.
- **Producto por un número:** se multiplica cada elemento. $2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.
- **Producto de matrices $A \cdot B$:** solo si **las columnas de A son tantas como las filas de B** . Si A es $m \times n$ y B es $n \times p$, el resultado es $m \times p$. Cada elemento c_{ij} es **la fila i de A por la columna j de B** , término a término, y sumando.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

- **Propiedades del producto:** es asociativo, $A(BC) = (AB)C$, y distributivo por los dos lados, $A(B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$. Pero **no es conmutativo**: en general $AB \neq BA$ (y a veces uno de los dos productos ni siquiera existe).

Lo que con números funciona y con matrices no

Como $AB \neq BA$, las identidades notables cambian: $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, que solo es $A^2 + 2AB + B^2$ si A y B conmutan. Y $AB = O$ **no** obliga a que $A = O$ o $B = O$: por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O.$$

3 La matriz traspuesta

La **traspuesta** A^t se obtiene cambiando **filas por columnas**: la primera fila de A es la primera columna de A^t . Si A es $m \times n$, A^t es $n \times m$.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Propiedades:** $(A^t)^t = A$; $(A + B)^t = A^t + B^t$; $(kA)^t = kA^t$; y la que más cae: $(AB)^t = B^t A^t$ (**cambia el orden**).
- Una matriz es **simétrica** si $A^t = A$ y **antisimétrica** si $A^t = -A$.

4 Potencias de una matriz

Para una matriz cuadrada, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, y así sucesivamente. Cuando piden A^n o A^{100} , nadie multiplica cien veces: se busca el **patrón**.

- **Atajos que salen en la PAU:** si al calcular sale $A^2 = I$, las potencias se repiten: $A^n = I$ si n es par y $A^n = A$ si n es impar. Si $A^2 = A$, entonces $A^n = A$; si $A^2 = kA$, entonces $A^n = k^{n-1}A$. Y si sale $A^k = O$, todas las siguientes son nulas.

Calcula las primeras potencias

A^2 y A^3 (a veces A^4), siempre **fila por columna**.

Localiza lo que cambia

→ Qué elementos se mueven y cómo dependen del exponente: un 2, un 3 ... o a^2 , a^3 ...

Escribe la fórmula con n

→ Y justifícala: multiplica A por tu fórmula de A^n y comprueba que sale la fórmula con $n + 1$.

Error típico que te quita puntos

Elevar cada elemento a la potencia. A^2 **no** es la matriz de los cuadrados: es $A \cdot A$, fila por columna. Y quedarse en A^2 y A^3 sin dar la fórmula general puntúa menos: en Aragón 2026, por ejemplo, valía la mitad (0,4 de 0,8).

5 La matriz inversa

La **inversa** de una matriz cuadrada A es la matriz A^{-1} que cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Si existe, A es **regular** (o invertible); si no, es **singular**.

- **Cuándo existe:** si y solo si A , de orden n , tiene **rango n** (en el Tema 2 verás que equivale a $|A| \neq 0$). En la PAU hay que **justificarlo** antes de usar A^{-1} : los criterios de Aragón 2026 dan como falta de rigor «No justificar que una matriz es regular para usar su inversa».
- **Atajo para 2×2 :**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{si } ad - bc \neq 0.$$

Se intercambian los de la diagonal principal, se cambian de signo los otros dos y se divide entre $ad - bc$.

- **Cálculo por Gauss-Jordan** (para matrices 3×3 , o cuando no se usa el atajo): los tres pasos de abajo.
- **Propiedades:** $(A^{-1})^{-1} = A$; $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$; y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (otra vez, **cambia el orden**).

Escribe $(A | I)$

La matriz y, a su derecha, la identidad del mismo orden.

Opera por filas

Con las operaciones de Gauss (sumar a una fila un múltiplo de otra, multiplicar una fila por un número distinto de cero, intercambiar filas) en las dos partes a la vez.

Llega a $(I | A^{-1})$

Cuando a la izquierda queda la identidad, lo de la derecha es la inversa. Si a la izquierda sale una fila de ceros, A no tiene inversa.

6 El rango de una matriz

El **rango** de una matriz, $\text{rg } A$, es el **número máximo de filas linealmente independientes**, que siempre coincide con el número máximo de columnas linealmente independientes.

- **Cómo se calcula (método de Gauss):** se escalona la matriz con operaciones de fila, que no cambian el rango, y se **cuentan las filas que no son todo ceros**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg } A = 2$$

- **Con un parámetro:** escalona sin dividir ni multiplicar una fila por expresiones que puedan valer cero (los criterios de Aragón 2026 lo dan como falta de rigor). Al final, mira para qué valores del parámetro se anula algún **pivote**. Cada valor «especial» es un caso aparte: sustitúyelo en la matriz y vuelve a escalonar.
- En el Tema 2 lo calcularás también **por menores** (determinantes), que es el otro método que aceptan los criterios.

Justifica siempre el rango

Los criterios de calificación de Canarias 2026 lo dicen así (criterio H): «Los rangos de las matrices hay que justificarlos (puede hacerse por la técnica de menores orlados o reduciendo la matriz a una escalonada por filas equivalentes)». Y los de Aragón 2026: «En ningún caso se otorgará la calificación máxima cuando únicamente se dé el resultado sin aportar ningún cálculo ni explicación».

7 Ecuaciones y sistemas matriciales

Con matrices **no se divide**. Para «quitar» una matriz que multiplica a la incógnita X , se multiplica por su inversa **por el mismo lado** en los dos miembros, porque $A^{-1}A = I$ e $IX = X$.

- **Sistemas de ecuaciones matriciales** (por ejemplo, $2X + 3Y = A$, $X - 2Y = B$): se resuelven **por reducción**, igual que con números. Al final sí se puede dividir, pero solo **entre un número**, nunca entre una matriz.

Junta las X

Todos los términos con X a un lado, como en una ecuación normal.

Saca factor común por el lado correcto

Si la X está a la derecha en todos los términos, factor común por la derecha. Los números que acompañan a la X se convierten en múltiplos de I . Si la X no queda en el mismo lado ($AX + XB = C$), no se puede sacar factor común: se plantea con las incógnitas de X .

Justifica la inversa

Rango igual al orden (o $ad - bc \neq 0$ en una 2×2).

Multiplica por la inversa por ese lado

Y opera sin cambiar el orden de los productos.

Ecuación	Se multiplica por...	Solución
$AX = B$	A^{-1} por la izquierda	$X = A^{-1}B$
$XA = B$	A^{-1} por la derecha	$X = BA^{-1}$
$AXB = C$	A^{-1} por la izquierda y B^{-1} por la derecha	$X = A^{-1}CB^{-1}$
$AX + BX = C$	factor común por la derecha: $(A + B)X = C$	$X = (A + B)^{-1}C$
$AX + kX = C$	$kX = kIX$, así que $(A + kI)X = C$	$X = (A + kI)^{-1}C$

En cada caso hay que justificar que la matriz que se invierte tiene inversa.

Errores típicos que te quitan puntos

Escribir $(A + 2)X$ en lugar de $(A + 2I)X$: no se puede sumar un número a una matriz. Multiplicar por la inversa por el lado equivocado ($X = BA^{-1}$ cuando era $X = A^{-1}B$). Y «simplificar» A y A^{-1} cuando no están juntas: de $AXA^{-1} = C$ no sale $X = C$, sino $X = A^{-1}CA$.

8 Ejercicio resuelto: potencias de una matriz (Aragón 2026)

PAU ARAGÓN 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 1 (OBLIGATORIA, 2 PUNTOS)

En un ecosistema interactúan tres especies que llamaremos A, B y C. La población de cada especie en el mes k viene dada por a_k , b_k y c_k , respectivamente. La evolución de sus poblaciones puede modelizarse mediante la relación existente entre las poblaciones en un mes $k + 1$ y en el mes anterior, k :

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$$

con

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si en el instante inicial ($k = 0$) hay 100 ejemplares de la especie A, 124 de la especie B y 234 de la especie C, ¿cuántos ejemplares hay de cada especie dos meses después? (0,5 puntos)

b) Razona (sin calcular M^k) que se cumple la siguiente relación $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$, donde a_0 , b_0 y c_0 son el número de ejemplares de cada especie en el instante inicial. (0,5 puntos)

c) Calcula M^k con $k \in \mathbb{N}$. ¿Qué ocurrirá con el número de ejemplares de cada una de las especies con el paso del tiempo? (1 punto)

Apartado a)

1. Llamamos $v_k = (a_k, b_k, c_k)^t$. Cada mes se multiplica M por el vector del mes anterior, fila por columna:

$$v_1 = Mv_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 124 \\ 234 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 224 \\ 334 \end{pmatrix}.$$

2. Lectura de M : la especie A no cambia, y B y C ganan cada mes tantos ejemplares como haya de A.

3.
$$v_2 = Mv_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 224 \\ 334 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 324 \\ 434 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN Dos meses después hay **100** ejemplares de A, **324** de B y **434** de C.

Apartado b)

1. $v_1 = Mv_0$; $v_2 = Mv_1 = M(Mv_0) = M^2v_0$; $v_3 = Mv_2 = M(M^2v_0) = M^3v_0$. Cada mes añade otra M (el producto es asociativo).

2. Los criterios de Aragón: «No se pretende que demuestren la propiedad por inducción. Se obtendrá la puntuación máxima si observan que se cumple para algunos valores de k y deducen el resultado».

SOLUCIÓN $v_k = M^k v_0$.

Apartado c)

1. $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (por ejemplo, fila 2 por columna 1: $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2$) y $M^3 =$
 $M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Solo cambian los dos elementos de la primera columna bajo la diagonal, que valen el exponente.

Comprobación: $M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ k+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la fórmula con $k+1$.

3. Con el tiempo: $v_k = M^k v_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 124 + 100k \\ 234 + 100k \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN $M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A se mantiene en 100 ejemplares; B y C crecen sin límite, 100 ejemplares más cada mes.

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Aragón: a) si solo se plantean los cálculos sin obtener los valores, 0,2. c) Hallar M^k : 0,8 (si solo se calculan M^2 y M^3 , 0,4); explicar lo que ocurrirá: 0,2.

Error típico que te quita puntos. Elevar cada elemento de M al cuadrado: aquí daría otra vez M , y $M^2 \neq M$.

9 Ejercicio resuelto: ecuación y sistema matriciales (Extremadura 2026)

PAU EXTREMADURA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 1.B (2,5 PUNTOS)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B^t - 2X$, donde B^t es la traspuesta de la matriz B . (1,25 puntos)

b) Resolver el sistema matricial de ecuaciones: $2X + 3Y = A$, $X - 2Y = B$. (1,25 puntos)

Apartado a)

1. $B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ (filas por columnas).

2. Juntamos las X y sacamos factor común por la derecha, con la identidad: $AX + 2X = B^t \Rightarrow (A + 2I)X = B^t$.

3. $C = A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, con $ad - bc = 0 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 3 \neq 0$: tiene inversa, $C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Multiplicando por C^{-1} por la izquierda: $X = C^{-1}B^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN $X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Apartado b)

1. Por reducción. Restando a la primera ecuación el doble de la segunda: $7Y = A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Sumando el doble de la primera y el triple de la segunda: $7X = 2A + 3B = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$.

3. Comprobación en la segunda ecuación: $X - 2Y = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & -21 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} = B$.

SOLUCIÓN $X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ e $Y = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Lo que puntúa. El examen no trae criterios específicos. Los generales de Extremadura piden expresar de forma razonada el proceso, con rigor y la notación adecuada (hasta 0,25 puntos por ejercicio).

Error típico que te quita puntos. Escribir $(A + 2)X$ en vez de $(A + 2I)X$, o calcular $X = B^t C^{-1}$ (multiplicar por la inversa por el lado equivocado).

10 Ejercicio resuelto: rango, la potencia 100 y una ecuación con inversas (Cantabria 2026)

PAU CANTABRIA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · APARTADO 1, TAREA 1A (2,5 PUNTOS)

Considera la matriz presentada a continuación,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Estudia el rango de A en función del valor del parámetro a . (0,5 puntos)

b) Calcula A^{100} en función del parámetro a . (1 punto)

c) Para $a = -1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple: $AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ (1 punto)

Apartado a)

1. A ya está escalonada: los pivotes 1, 1 y a están en columnas distintas. Las dos primeras filas nunca se anulan.

2. Si $a \neq 0$, hay tres filas no nulas; si $a = 0$, la tercera fila es $(0 \ 0 \ 0)$.

SOLUCIÓN $\text{rg } A = 3$ si $a \neq 0$; $\text{rg } A = 2$ si $a = 0$.

Apartado b)

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$: arriba se suma a cada vez y en la esquina se multiplica por a .

2. Fórmula: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$. Se justifica con $A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1}$.

SOLUCIÓN $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{100} \end{pmatrix}$.

Apartado c)

1. Con $a = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3: es regular y **sí es posible**. Llamamos C a la matriz del enunciado.

2. Multiplicando por A^{-1} por la izquierda y por A por la derecha: $A^{-1}(AXA^{-1})A = A^{-1}CA$, es decir, $X = A^{-1}CA$.

3. Por Gauss-Jordan ($F_1 \rightarrow F_1 + F_2$, $F_3 \rightarrow -F_3$): $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $CA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $X = A^{-1}(CA)$.

SOLUCIÓN $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (comprobación: $AXA^{-1} = C$).

Lo que puntúa. El examen no trae criterios específicos; sus indicaciones dicen que debe exponerse con claridad el planteamiento o el método y que todas las respuestas deben ser razonadas.

Error típico que te quita puntos. Pensar que A y A^{-1} se simplifican y que $X = C$: solo se simplifican si están juntas, y aquí la X está en medio.

Conceptos clave

Matriz traspuesta

La que se obtiene cambiando filas por columnas, A^t .
Cumple $(AB)^t = B^t A^t$.

Matriz antisimétrica

Matriz cuadrada que cumple $A^t = -A$; tiene ceros en la diagonal principal.

Matriz inversa

La matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Existe si y solo si A es cuadrada y su rango es igual a su orden.

Rango de una matriz

Número máximo de filas (o de columnas) linealmente independientes. Se calcula escalonando por Gauss o por menores.

Ecuación matricial

Ecuación cuya incógnita es una matriz X ; se despeja multiplicando por inversas, respetando el lado.

Matriz simétrica

Matriz cuadrada que coincide con su traspuesta ($A^t = A$)

Matriz identidad

Matriz cuadrada I con unos en la diagonal principal y ceros fuera; es el neutro del producto: $AI = IA = A$.

Matriz regular

Matriz cuadrada que tiene inversa (también se dice invertible). Si no la tiene, es singular.

Método de Gauss-Jordan

Cálculo de la inversa operando por filas en $(A | I)$ hasta llegar a $(I | A^{-1})$.

Siete reglas que valen puntos

Producto

Fila por columna. Solo si columnas de A = filas de B .

Orden

En general $AB \neq BA$: el lado importa siempre.

Traspuesta

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Inversa

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; existe si y solo si el rango es igual al orden.

Inversa 2 × 2

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Factor común

$$AX + kX = (A + kI)X, \text{ nunca } (A + k)X.$$

Potencias

Calcula A^2, A^3 , busca el patrón y da la fórmula de A^n .

Cómo te lo pueden preguntar

- Despeja X en una ecuación matricial y calcúlala (a menudo con la traspuesta de por medio).
- Resuelve un sistema de dos ecuaciones matriciales con dos incógnitas X e Y .
- Calcula A^n o A^{100} , a veces con un parámetro, o usa $A^2 = I$ para simplificar potencias.
- Estudia el rango de una matriz según los valores de un parámetro.
- Halla los parámetros para que se cumpla una igualdad ($AB = I, A^2 = A, A$ simétrica...).
- Halla las matrices que conmutan con A ($AX = XA$): se plantea con las incógnitas de X .

No lo confundas

- $X = A^{-1}B$ (de $AX = B$) con $X = BA^{-1}$ (de $XA = B$): no son iguales.
- A^2 (producto $A \cdot A$) con la matriz de los cuadrados de los elementos.
- $(AB)^t = B^t A^t$ con $A^t B^t$, que en general es otra matriz.
- Rango (número de filas independientes) con orden (número de filas de una matriz cuadrada).

Ponte a prueba

PAU Castilla-La Mancha 2026, Pregunta 3. a) [1 punto] Determina los valores de a y b para que las matrices A y B cumplan que $A \cdot B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) [1 punto] Resuelve razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución: a) $AB = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2-b & 0 & b-1 \end{pmatrix}$; igualando a I : $a = 1$ y $b = 2$. b) Restando a la segunda ecuación el doble de la primera: $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, y entonces $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

PAU Galicia 2026, Pregunta 2.1 (2 puntos). Considérese la igualdad matricial $A(X - I)B = C$, donde X es cuadrada e I es la matriz identidad. 2.1.1. Despeje X suponiendo que A y B son cuadradas e invertibles. 2.1.2. ¿Qué dimensiones tienen X y B si A y C son matrices 1×2 ? Obtenga X , simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución: 2.1.1. Multiplicando por A^{-1} por la izquierda y por B^{-1} por la derecha: $X - I = A^{-1}CB^{-1}$, así que $X = A^{-1}CB^{-1} + I$. 2.1.2. Para que $A(X - I)$ exista, X tiene 2 filas; como es cuadrada, es 2×2 ; y para que $A(X - I)B$ sea 1×2 , B es 2×2 . Con $X = \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$:
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}(X - I) = \begin{pmatrix} p+q-1 & q-p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego $q = 1$, $p = 0$ y $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

PAU Madrid 2026, Pregunta 1 (2 puntos). Dada la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide: a) (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ . b) (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución: a) Escalonando: $F_3 \rightarrow F_3 - F_1$ da $\begin{pmatrix} 0 & 2-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$, y $F_3 \rightarrow F_3 - (2-\lambda)F_2$ da $\begin{pmatrix} 0 & 0 & (1-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}$. Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$, $\text{rg } A = 3$; si $\lambda = 1$ o $\lambda = 3$, $\text{rg } A = 2$ (las dos primeras filas no se anulan nunca). b) Con $\lambda = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3 (por el apartado a), así

que tiene inversa. De $AX = A^2 - I$, multiplicando por A^{-1} por la izquierda: $X = A - A^{-1}$. Por

Gauss-Jordan, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, y $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Fuentes

1. [Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato \(Matemáticas II\)](#)
2. [Examen PAU Matemáticas II Aragón 2026 \(ordinaria\), con criterios específicos de corrección](#)
3. [Examen PAU Matemáticas II Extremadura 2026 \(ordinaria\)](#)
4. [Examen PAU Matemáticas II Cantabria 2026 \(ordinaria\)](#)
5. [Examen PAU Matemáticas II Canarias 2026 \(ordinaria\), con criterios generales de corrección](#)
6. [Exámenes PAU Matemáticas II Castilla-La Mancha, Galicia y Madrid 2026 \(ordinaria\)](#)

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios. ¿Un error? contacto@farmeandopau.com.