Representación de funciones

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en **farmeandopau.com** ›

Última revisión: 8 de noviembre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

Representar una función es **juntar todo lo anterior** en un dibujo: el dominio, las simetrías y los cortes con los ejes; las **asíntotas**, que salen de los límites (Tema 7); y la monotonía, los extremos y la curvatura, que salen de las derivadas (Tema 9). El orden importa: primero lo que dibuja el «esqueleto» (dominio y asíntotas) y después los puntos. Las asíntotas salieron en **9 de las 28** convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en 7 comunidades, a veces con un parámetro; y en 6 de esas 9 convocatorias van en el mismo ejercicio que la monotonía y los extremos. Ojo si te examinas en **Murcia**: el acta de coordinación de 16-09-2026 dice que en 2027 no se evaluarán las asíntotas, la concavidad y convexidad ni la representación de funciones; allí, de este tema, solo te hace falta lo que ya está en el Tema 9 (crecimiento, puntos críticos y extremos).

1 Dominio, simetrías y puntos de corte

El **dominio** es el conjunto de valores de x para los que $f(x)$ existe. Todo el estudio se hace dentro de él. Los casos que dan problemas son tres: los denominadores, las raíces de índice par y los logaritmos (en la tabla de abajo).

- **Simetrías.** f es **par** si $f(-x) = f(x)$: su gráfica es simétrica respecto del eje Y (como x^2 o $\cos x$). Es **impar** si $f(-x) = -f(x)$: simétrica respecto del origen (como x^3 o $\operatorname{sen} x$). Si es par o impar, basta estudiar $x \geq 0$ y copiar. Ejemplo: $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^2-4}$ (Navarra 2025, C2) cumple $f(-x) = \dfrac{-3x^3}{x^2-4} = -f(x)$: es impar.
- **Cortes con los ejes.** Con el eje Y: el punto $(0, f(0))$, si 0 es del dominio. Con el eje X: las soluciones de $f(x) = 0$. En Cataluña 2025 (Ejercicio 1), $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$ corta en $(0,0)$ y en $(2,0)$.
- **El dominio tiene que ser simétrico.** Si x está en el dominio y $-x$ no, la función no es par ni impar. Con $f(x) = \sqrt{x^2+3x}$ (Madrid 2025, reserva 1, 2.1 b) el dominio es $(-\infty,-3] \cup [0,+\infty)$: 1 está y -1 no, así que no es ni par ni impar, aunque x^2 sea par.
- **La simetría ahorra integrales** (Tema 12). Si f es **impar** en $[-a,a]$, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$; si es **par**, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$. Así se hacen Andalucía 2026 (reserva 1: $\frac{x}{|x|+1}$ en $[-2,2]$, impar, integral 0; reserva 3: $x^2\cos x$ en $[-\pi,\pi]$, par) y los modelos de 2026 y 2027 ($\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}$, impar). La paridad se comprueba con $f(-x)$, y con $|x|$ también: $|-x| = |x|$.
- **Signo de f.** Con los ceros de f y los puntos fuera del dominio, se sabe en qué zonas va la gráfica por encima o por debajo del eje X. Ayuda mucho a dibujar y a comprobar el dibujo.

Tipo de función	Dominio	Ejemplo
Polinómica, e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$	$\mathbb{R}$	$x^3 - 3x$: $\mathbb{R}$
Cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$\mathbb{R}$ menos los ceros de Q	$\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
Raíz de índice par $\sqrt{g(x)}$	$g(x) \geq 0$	$\sqrt{5x-1}$: $\left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$
Logaritmo $\ln g(x)$	$g(x) > 0$	$\ln(x^2+x-5)$: $x^2+x-5>0$

La mayoría de las funciones no son pares ni impares

Para que sea par o impar hay que comprobarlo con $f(-x)$, no a ojo. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ no es ni par ni impar: $f(-x) = \dfrac{-x+1}{x^2+1}$ no es ni $f(x)$ ni $-f(x)$. Dilo así y sigue.

2 Asíntotas verticales

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de f si, al acercarse x a a (por la izquierda, por la derecha o por los dos lados), $f(x)$ se hace tan grande como se quiera, positiva o negativa: $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$. La gráfica se pega a la recta sin cruzarla.

- **Ejemplo:** $f(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$. En $x = 2$ el numerador vale 4 y el denominador 0: asíntota vertical $x = 2$. Por la izquierda, $x - 2 \to 0^-$ y $f \to -\infty$; por la derecha, $x - 2 \to 0^+$ y $f \to +\infty$.
- **Cómo saber el signo:** mira el signo del numerador cerca de a y el del denominador a cada lado. En Cataluña 2025, $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$: cerca de $x = 1$ el numerador vale casi -1, así que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.
- **Logaritmos:** $\ln x$ tiene la asíntota vertical $x = 0$ solo por la derecha, porque a la izquierda no está definida: $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$. Lo mismo $\dfrac{\ln x}{x}$ y $\dfrac{\ln x}{x^2}$.
- **Las funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ no tienen asíntotas verticales:** $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ (el denominador no se anula), $2x\,e^{-2x^2}$, $\dfrac{1}{1+e^x}$... Dilo con esa razón.
- **Funciones a trozos:** cada fórmula solo vale en su intervalo. Con $\ln(x^2-9)$ para $x > 3$ (Cantabria 2025, modelo), cuando $x \to 3^+$, $x^2 - 9 \to 0^+$ y $f \to -\infty$: asíntota vertical $x = 3$ **solo por la derecha**; $x = -3$ no cuenta, porque ese trozo no llega ahí. Y con valor absoluto, como $\frac{1}{x|x|}$ (Andalucía 2023, reserva 1, ejercicio 2), escríbela a trozos y estudia cada lado: es $\frac{1}{x^2}$ si $x > 0$ y $-\frac{1}{x^2}$ si $x < 0$.
- **El parámetro que quita la asíntota vertical:** si numerador y denominador se anulan a la vez, el límite puede ser finito. Con $f(x) = \dfrac{x^2-1}{3x-a}$ (Madrid 2026, reserva 2, 5.1 b), el candidato es $x = \frac{a}{3}$; si es raíz del numerador ($\frac{a}{3} = \pm 1$, es decir, $a = \pm 3$), queda un hueco y no hay asíntota vertical. Con $a = 3$, $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)} = \frac{2}{3}$.

Candidatos

Los puntos que anulan un denominador y los bordes del dominio de un logaritmo ($g(x) \to 0^+$ en $\ln g(x)$).

→

Límite en cada candidato

Si da $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$, hay asíntota. Si da $\frac{0}{0}$, simplifica: puede ser solo un «hueco».

→

Límites laterales

El signo de $\pm\infty$ a cada lado dice cómo se acerca la gráfica: hacia arriba o hacia abajo.

Error típico: un cero del denominador no siempre es asíntota

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en $x=1$, pero $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$: la gráfica es la recta $y=x+1$ con un **hueco** en $(1,2)$. Es una discontinuidad evitable (Tema 7), no una asíntota. Calcula siempre el límite antes de decir «asíntota vertical».

3 Asíntotas horizontales y oblicuas

Cuando $x\to+\infty$ o $x\to-\infty$, la gráfica puede acercarse a una recta. Si es horizontal, $y=L$, es una **asíntota horizontal**; si está inclinada, $y=mx+n$ con $m\neq 0$, es una **asíntota oblicua**. Se estudian **por separado** en $+\infty$ y en $-\infty$: pueden ser distintas. Cómo se calculan, en la tabla de abajo.

- **Oblicua dividiendo:** $x^2-2x+4=x\,(x-2)+4$, así que $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}=x+\dfrac{4}{x-2}$. Cuando $x\to\pm\infty$, $\dfrac{4}{x-2}\to 0$: la asíntota oblicua es $y=x$ (Extremadura 2026, resuelto más abajo). Con las fórmulas: $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2x+4}{x^2-2x}=1$ y $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-2}=0$.
- **Posición respecto de la asíntota:** el signo de $f(x)-(mx+n)$. Aquí $\dfrac{4}{x-2}$ es positivo cuando $x\to+\infty$ (la gráfica va **por encima**) y negativo cuando $x\to-\infty$ (va **por debajo**).
- **Dos horizontales distintas (Castilla y León 2026, 2B):** $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$. Cuando $x\to-\infty$, $e^x\to 0$ y $f\to 1$; cuando $x\to+\infty$, $e^x\to+\infty$ y $f\to 0$. Asíntotas $y=1$ (por la izquierda) e $y=0$ (por la derecha).
- **Con parámetro (Cantabria 2026, 2A):** para $f(x)=\dfrac{x^2+ax+1}{x+a^2}$ sale $m=1$ y $n=a-a^2$. Que la oblicua sea $y=x-6$ obliga a $a-a^2=-6$: $a=3$ o $a=-2$. Está en «Ponte a prueba».
- **En los problemas con contexto**, la asíntota horizontal es «el valor a largo plazo». En Canarias 2026 (Bloque 1), la mancha de ceniza $f(t)=\dfrac{10t+5}{2t^2+4}+5$ tiende a 5 km² cuando $t\to+\infty$: no desaparece.
- **Oblicua con parámetros:** iguala m y n a los de la recta. Con $f(x)=\dfrac{ax^3+x-1}{x^2+bx-3}$ y la oblicua $y=x-2$ (Andalucía 2024, reserva 4, ejercicio 2 a): $m=\lim\frac{f(x)}{x}=a=1$ y, con $a=1$, $n=\lim\big(f(x)-x\big)=-b=-2$, así que $b=2$.
- **Rama parabólica:** si $f\to\pm\infty$ cuando $x\to\pm\infty$ pero $\frac{f(x)}{x}\to\pm\infty$ (o m es finito y n no lo es), no hay oblicua: la gráfica se va hacia arriba o hacia abajo como una parábola. Pasa con los polinomios de grado 2 o más, con $\frac{e^x}{x}$ cuando $x\to+\infty$ o con x^2e^{1-x} cuando $x\to-\infty$ (Canarias 2026, extraordinaria). Los criterios de Aragón 2023 (ordinaria) dan 0,2 puntos por comprobar que no hay oblicua y otros 0,2 por comprobar que no hay rama parabólica.

Asíntota	Condición	Cómo se calcula
Horizontal $y=L$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=L$ (un número)	El límite. En un cociente de polinomios: $L=0$ si el grado de arriba es menor, y el cociente de los coeficientes principales si los grados son iguales
Oblicua $y=mx+n$	$m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ finito y $\neq 0$, y n (a la derecha) también finito	$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-mx\big)$. En un cociente de polinomios, solo si el grado de arriba es uno más que el de abajo: divide y el cociente es $mx+n$

Hacia un mismo lado ($+\infty$ o $-\infty$) no puede haber a la vez asíntota horizontal y oblicua.

La gráfica sí puede cortar a una asíntota horizontal u oblicua

Cerca del origen puede cruzarla. En una racional solo la corta en un número finito de puntos, así que a lo lejos ya no la corta y solo se acerca. (Hay funciones, como $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, que cortan a su asíntota infinitas veces.) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ tiene la asíntota $y = 0$ y la corta en $(-1, 0)$. Con una asíntota vertical $x = a$ es distinto: la gráfica no la cruza, y solo puede tener un punto sobre ella si $f(a)$ está definida (una función a trozos).

4 Monotonía, extremos y curvatura en el estudio completo

Con el dominio y las asíntotas ya se ve la forma general. La derivada (Tema 9) da dónde sube y dónde baja, y los extremos; la segunda derivada, la curvatura. En una función racional, la asíntota vertical **parte los intervalos** aunque no sea un cero de f'.

- **Ejemplo (Extremadura 2026):** $f(x) = x + \frac{4}{x-2}$ tiene $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$. El denominador es positivo, así que el signo es el de $x(x-4)$: crece en $(-\infty, 0)$ y en $(4, +\infty)$; decrece en $(0, 2)$ y en $(2, 4)$.
- **Extremos:** máximo relativo en $(0, -2)$ y mínimo relativo en $(4, 6)$. Que el máximo valga menos que el mínimo no es un error: están en ramas distintas, a cada lado de la asíntota $x = 2$.
- **Curvatura:** $f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$, negativa si $x < 2$ (cóncava, $\cap$) y positiva si $x > 2$ (convexa, $\cup$). Cambia en $x = 2$, pero no hay punto de inflexión: $x = 2$ no es del dominio.
- **Una tabla de variación** resume todo en una fila: los puntos clave (incluida la asíntota), el signo de f' y de f'', y las flechas. Con ella el dibujo sale casi solo.

Error típico que te quita puntos

Escribir «decrece en $(0, 4)$» cuando $x = 2$ no es del dominio. Hay que separar: «decrece en $(0, 2)$ y en $(2, 4)$». Y no se puede escribir un extremo en un punto que no es del dominio.

5 El estudio completo, paso a paso

Cuando te piden «estudia y representa», sigue siempre el mismo orden. Cada paso deja algo dibujado en los ejes, y lo último que se dibuja es la curva.

- **Comprueba con un par de valores.** Si dudas por dónde va una rama, calcula f en un punto cómodo. En Extremadura 2026, $f(3) = 7$ y $f(1) = -3$: encajan con la rama de arriba y la de abajo.
- **El dibujo tiene que ser coherente con las cuentas,** no perfecto. Extremadura 2026 da 0,5 puntos «Por la representación aproximada de la gráfica de la función».
- **Leer la gráfica de f o de f'** (lo nombran las listas de Andalucía y del País Vasco). Donde la gráfica de f' está **por encima** del eje, f crece; por debajo, decrece; donde **corta** al eje cambiando de signo, f tiene un extremo; y donde f' tiene un máximo o un mínimo, f tiene un punto de inflexión. Al revés, de la gráfica de f se leen el signo de f' (sube o baja) y el de f'' ($\cup$ o $\cap$). Así se resuelven Asturias 2026 (extraordinaria: reconocer tres gráficas cerca de $x = 0$), Cataluña 2026 (reserva: la tangente con la gráfica de f') y Galicia 2026 (extraordinaria: dibujar una f con f, f' y f'' del mismo signo en un intervalo).

1 Dominio y continuidad
Qué valores de x valen y dónde puede haber saltos.

2 Simetrías
Par, impar o ninguna, comprobándolo con $f(-x)$.

3 Cortes y signo
Puntos de corte con los ejes y zonas donde $f > 0$ o $f < 0$.

4 Asíntotas
Verticales (con los laterales), horizontales y oblicuas en $\pm\infty$, y la posición de la curva. Dibújalas discontinuas.

5 Monotonía y extremos
Signo de f'; máximos y mínimos como puntos.

6 Curvatura e inflexión
Signo de f'', si te lo piden o si ayuda.

7 Dibujo
Marca los puntos, sigue las flechas y pega la curva a las asíntotas. Si algo no encaja (un máximo por encima de la asíntota donde la curva debería ir por debajo), revisa.

No dejes la gráfica en blanco

Aunque falle una cuenta, el dibujo de lo que hayas obtenido (asíntotas y extremos) puntúa si es coherente. Los criterios de Andalucía (2025 y 2026) y de Castilla y León 2026, por ejemplo, no vuelven a penalizar un error arrastrado en los apartados siguientes si no los simplifica.

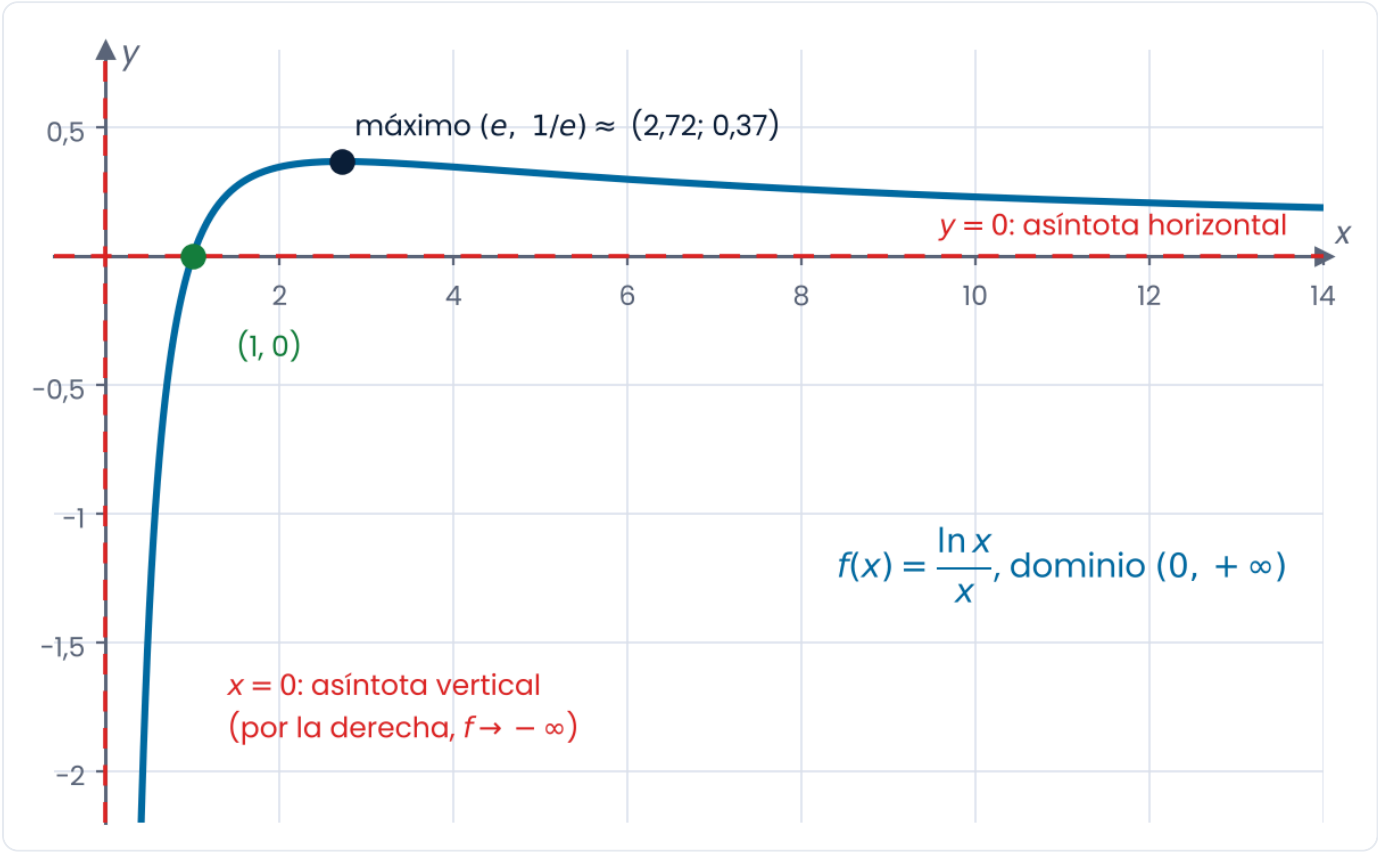
6 Gráficas de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas

Cada familia tiene su forma típica. Saberla te dice qué esperar antes de calcular y te avisa si una cuenta está mal.

- **Ejemplo logarítmico:** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, con dominio $(0, +\infty)$. Asíntota vertical $x = 0$ por la derecha ($\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$) y horizontal $y = 0$. $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ se anula en $x = e$: máximo en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$. Corta al eje en $(1, 0)$.
- **Ejemplo exponencial (Castilla y León 2025):** $f(x) = 2x\,e^{-2x^2}$ es impar, continua en $\mathbb{R}$ y tiende a 0 en $\pm\infty$ porque la exponencial manda. Está resuelto más abajo.
- **Con un parámetro en la asíntota horizontal (Andalucía 2025, Ejercicio 3):** en $f(x) = a + \dfrac{\ln x}{x^2}$, como $\frac{\ln x}{x^2} \to 0$, la horizontal es $y = a$. Para que sea $y = 1$, $a = 1$.
- **Para dibujar un recinto entre dos curvas** (antes de calcular su área, Tema 12): resuelve $f(x) = g(x)$ para los **puntos de corte**, con sus dos coordenadas, y dibuja cada curva por lo que sabes de ella: una parábola $y = ax^2 + bx + c$, por su vértice $x = -\frac{b}{2a}$, sus cortes con los ejes y hacia dónde abre; una recta, con dos puntos. En País Vasco 2025 (ordinaria), con $y = (x-1)^2$, $y = (x+1)^2$ e $y = 7 - 3x$ en el primer cuadrante, los cortes dos a dos son $(0, 1)$, $(1, 4)$ y $(2, 1)$ (las otras soluciones, $x = -6$ y $x = -3$, no están en el primer cuadrante), y el recinto es el «triángulo» curvo que tiene esos tres vértices.

Familia	Asíntotas	Lo que la caracteriza
Polinómica	Ninguna	Continua en $\mathbb{R}$. En $\pm\infty$ manda el término de mayor grado: $x^3 - 3x \to \pm\infty$ como x^3. Tiene como mucho $n-1$ extremos si es de grado n
Racional $\frac{P}{Q}$	Verticales en los ceros de Q (si no son huecos); horizontal u oblicua según los grados	Grado de P menor que el de Q: $y=0$. Iguales: $y=$ cociente de coeficientes principales. Uno más: oblicua. Dos o más: ninguna
Exponencial (e^x, $x\,e^{-x}$…)	e^x: $y=0$ cuando $x \to -\infty$	$e^x > 0$ siempre: un factor $e^{g(x)}$ no cambia el signo. Manda sobre cualquier potencia: $x^n e^{-x} \to 0$ cuando $x \to +\infty$
Logarítmica ($\ln x$, $\frac{\ln x}{x}$…)	$\ln x$: vertical $x=0$ (por la derecha)	Dominio $x>0$ (o $g(x)>0$). Crece más despacio que cualquier potencia: $\frac{\ln x}{x^n} \to 0$ cuando $x \to +\infty$

Órdenes de infinito cuando $x \to +\infty$: $\ln x$ crece menos que x^n ($n>0$), y x^n menos que e^x. Sirven para los límites rápidos; en el examen, justifícalos con L'Hôpital (Tema 8) si te lo piden.



Una logarítmica típica: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Solo existe para $x>0$; tiene la asíntota vertical $x=0$ (por la derecha baja a $-\infty$) y la horizontal $y=0$, porque $\ln x$ crece más despacio que x. Corta al eje en $(1,0)$ y tiene un máximo en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

7 Ejercicio resuelto: asíntotas, extremos y gráfica de una función racional (Extremadura 2026)

PAU EXTREMADURA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 2.A (2,5 PUNTOS; A ELEGIR ENTRE 2.A Y 2.B)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Dada la función

$$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}$$

a) Estudiar y obtener las asíntotas de la función f. (1 punto)

b) Determinar los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (1 punto)

c) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$. (0,5 puntos)

Apartado a)

1. Dominio: el denominador se anula en $x = 2$, así que $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. **Vertical.** En $x = 2$ el numerador vale $4 - 4 + 4 = 4 \neq 0$:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty.$$

   Asíntota vertical $x = 2$.
3. **Horizontal.** El grado de arriba (2) es mayor que el de abajo (1): $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. No hay asíntota horizontal.
4. **Oblicua.** $m = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 2x} = 1$ y $n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{4}{x - 2} = 0$. O dividiendo: $f(x) = x + \dfrac{4}{x - 2}$.
5. Posición: $f(x) - x = \dfrac{4}{x - 2}$ es positivo si $x > 2$ (la gráfica va por encima de $y = x$) y negativo si $x < 2$ (por debajo).

SOLUCIÓN Asíntota vertical $x = 2$ y asíntota oblicua $y = x$ (en $+\infty$ y en $-\infty$). No tiene asíntotas horizontales.

Apartado b)

1. Derivada de un cociente:

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 2) - (x^2 - 2x + 4)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2} = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}.$$

2. Se anula en $x = 0$ y $x = 4$. El denominador es un cuadrado, positivo en todo el dominio, y $x = 2$ separa intervalos aunque no sea un cero de f'.
3. Signo de $x(x - 4)$: positivo en $(-\infty, 0)$, negativo en $(0, 2)$ y en $(2, 4)$, positivo en $(4, +\infty)$.
4. En $x = 0$ pasa de crecer a decrecer: máximo relativo en $(0, f(0)) = (0, -2)$. En $x = 4$ pasa de decrecer a crecer: mínimo relativo en $(4, f(4)) = (4, 6)$.

SOLUCIÓN Crece en $(-\infty, 0)$ y en $(4, +\infty)$; decrece en $(0, 2)$ y en $(2, 4)$. Máximo relativo en $(0, -2)$ y mínimo relativo en $(4, 6)$.

Apartado c)

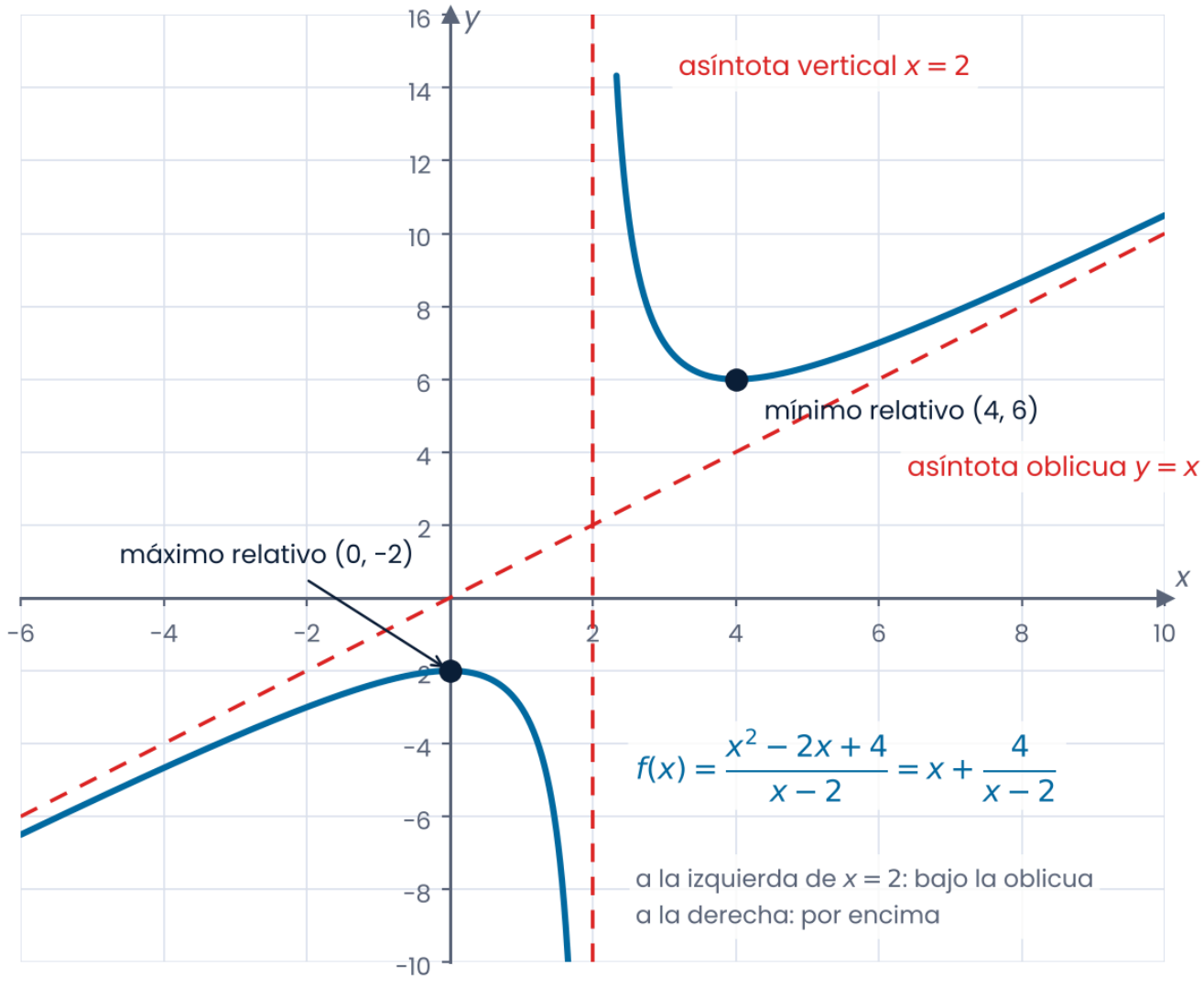
1. Cortes: con el eje Y, $(0, -2)$, que es el máximo. Con el eje X, $x^2 - 2x + 4 = 0$ no tiene solución real (discriminante $4 - 16 < 0$): no corta.
2. Dibuja la vertical $x = 2$ y la oblicua $y = x$ discontinuas. Rama izquierda: sube pegada a $y = x$ por debajo, llega al máximo $(0, -2)$ y cae a $-\infty$ junto a $x = 2$. Rama derecha: baja desde $+\infty$ junto a $x = 2$, llega al mínimo $(4, 6)$ y sube pegada a $y = x$ por encima.

3. Comprobación con dos valores: $f(1) = -3$ y $f(3) = 7$.

SOLUCIÓN La gráfica es la de la figura de abajo: dos ramas, una a cada lado de $x = 2$, que se pegan a la oblicua $y = x$.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Extremadura 2026. a) «1 punto. Por cualquier planteamiento correcto y el cálculo de la ecuación de las asíntotas.» b) «0,5 puntos por el cálculo de los extremos y 0,5 por el estudio de la monotonía.» c) «0,5 puntos. Por la representación aproximada de la gráfica de la función.» El examen recuerda que el rigor y la notación se valoran con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio (en los criterios de 2026-27, con preguntas de 2 puntos, 0,20), y descuenta 0,10 por cada falta de ortografía a partir de la tercera (hasta 1 punto). El dibujo tiene su propio medio punto: hazlo aunque sea a mano alzada, con las asíntotas y los dos extremos.

Error típico que te quita puntos. Escribir «decrece en $(0, 4)$» olvidando que $x = 2$ no es del dominio, o pensar que algo está mal porque el máximo (-2) vale menos que el mínimo (6): están en ramas distintas. Y buscar una asíntota horizontal: con el grado de arriba mayor, el límite en $\pm\infty$ es infinito.



Solución gráfica del apartado c). Las dos ramas de $f(x) = x + \frac{4}{x-2}$, separadas por la asíntota vertical $x = 2$; las dos se pegan a la oblicua $y = x$. Máximo relativo en $(0, -2)$ y mínimo relativo en $(4, 6)$.

8 Ejercicio resuelto: asíntota horizontal y extremos absolutos (Comunidad Valenciana 2026)

PAU COMUNIDAD VALENCIANA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 4, APARTADO 4.1 (A ELEGIR ENTRE 4.1 Y 4.2; 2,5 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Consideremos la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. Se pide:

4.1.1) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f. (0,5 puntos)

4.1.2) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f. (0,5 puntos)

4.1.3) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f. (1 punto)

4.1.4) Representar la función f. (0,5 puntos)

Apartado 4.1.1)

1. El denominador x^2+1 vale al menos 1: no se anula nunca.
2. f es un cociente de polinomios con denominador distinto de cero en todo punto, así que es continua en todo su dominio.

SOLUCIÓN $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$ y f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Apartado 4.1.2)

1. **Verticales:** no hay, porque f es continua en $\mathbb{R}$.
2. **Horizontal:** el grado de arriba (1) es menor que el de abajo (2): $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{x^2+1} = 0$. Asíntota $y=0$ a los dos lados, y por eso no hay oblicua.
3. Derivada:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - (x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

4. $-x^2-2x+1=0 \iff x^2+2x-1=0 \iff x=-1\pm\sqrt{2}$, es decir, $x\approx -2{,}414$ y $x\approx 0{,}414$. El denominador es positivo; el numerador es una parábola hacia abajo: negativo fuera de las raíces y positivo entre ellas.

SOLUCIÓN Asíntota horizontal $y=0$ (no hay verticales ni oblicuas). Decrece en $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ y en $(-1+\sqrt{2}, +\infty)$; crece en $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$.

Apartado 4.1.3)

1. En $x=-1-\sqrt{2}$ pasa de decrecer a crecer: mínimo relativo. Su valor: $f(-1-\sqrt{2}) = \dfrac{-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}207$.

2. En $x = -1 + \sqrt{2}$ pasa de crecer a decrecer: máximo relativo, de valor $f(-1+\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}207$.
3. ¿Son absolutos? A la izquierda del mínimo, f decrece desde valores cercanos a 0 (el límite en $-\infty$), así que ahí f es mayor que el mínimo. A la derecha del máximo, decrece desde el máximo hacia 0. Entre los dos, f va del mínimo al máximo. Ningún valor queda fuera de $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

SOLUCIÓN Mínimo relativo y absoluto en $\left(-1-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \approx (-2{,}414;\ -0{,}207)$. Máximo relativo y absoluto en $\left(-1+\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) \approx (0{,}414;\ 1{,}207)$.

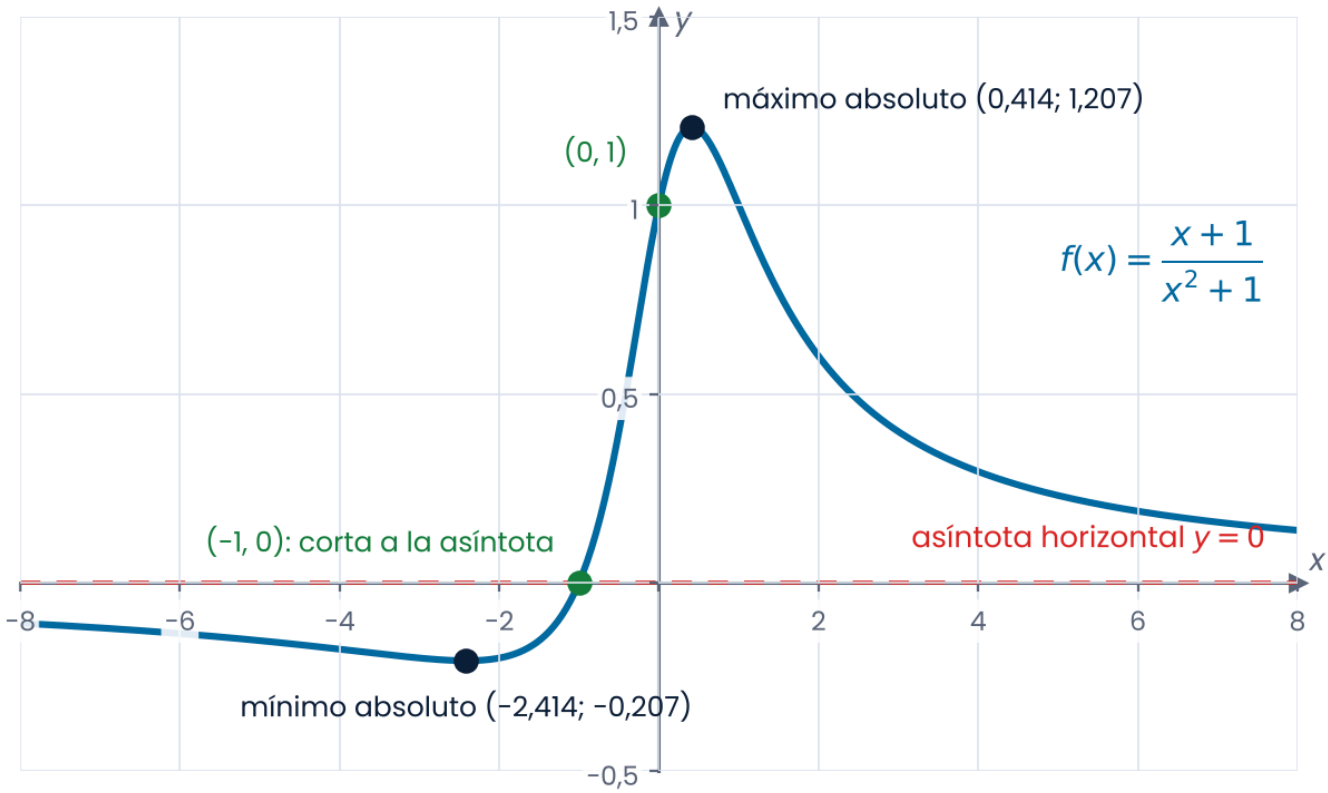
Apartado 4.1.4)

1. Cortes: $f(0) = 1$, punto $(0, 1)$; $f(x) = 0 \iff x = -1$, punto $(-1, 0)$.
2. Signo: $f < 0$ si $x < -1$ (la curva va por debajo de la asíntota $y = 0$) y $f > 0$ si $x > -1$ (por encima). La curva **corta a su asíntota** en $(-1, 0)$.
3. Dibujo: desde $-\infty$, pegada al eje por debajo, baja al mínimo, sube cruzando el eje en $x = -1$ y el eje Y en 1, llega al máximo y baja hacia el eje por encima.

SOLUCIÓN La gráfica es la de la figura de abajo.

Lo que puntúa. Los criterios de la Comunidad Valenciana 2026 no reparten la puntuación por pasos: dan las soluciones (dominio $\mathbb{R}$, asíntota $y = 0$, los intervalos con $-1 \pm \sqrt{2}$ y los extremos absolutos con $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, también en decimales) y avisan: «En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado». El examen añade que los resultados «deberán estar siempre debidamente justificados», que a partir de la tercera falta de ortografía se deducen 0,10 puntos (hasta un máximo de un punto) y que por la redacción y la presentación se puede deducir hasta medio punto. En el 4.1.3 piden también los **absolutos**: justifícalos con los límites, no basta con los relativos.

Error típico que te quita puntos. Decir que los extremos son absolutos sin justificarlo, o al revés, no mirarlo. Y pensar que la curva no puede cortar a su asíntota horizontal: aquí la corta en $(-1, 0)$.



Solución gráfica del 4.1.4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ se pega a la asíntota $y = 0$ en los dos extremos, la corta en $(-1, 0)$ y tiene su mínimo absoluto en $x = -1 - \sqrt{2}$ y su máximo absoluto en $x = -1 + \sqrt{2}$.

9 Ejercicio resuelto: monotonía y asíntotas de una función exponencial impar (Castilla y León 2025)

PAU CASTILLA Y LEÓN 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · APARTADO 2, PROBLEMA 2 (OBLIGATORIO, 2,5 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Se considera la función $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. (1,5 puntos)

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$. (1 punto)

Apartado a)

1. **Dominio:** $\mathbb{R}$ (producto de un polinomio y una exponencial). Además es **impar**: $f(-x) = -2x\,e^{-2x^2} = -f(x)$. Lo que pase en $x > 0$ se repite, cambiado de signo, en $x < 0$.
2. **Derivada** (producto y regla de la cadena: la derivada de $-2x^2$ es $-4x$):

$$f'(x) = 2e^{-2x^2} + 2x \cdot (-4x)\, e^{-2x^2} = 2e^{-2x^2}\,(1 - 4x^2).$$

3. Como $e^{-2x^2} > 0$, el signo es el de $1 - 4x^2 = (1 - 2x)(1 + 2x)$, que se anula en $x = \pm\frac{1}{2}$: negativo en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, positivo en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y negativo en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

4. **Extremos:** mínimo relativo en $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, -e^{-1/2}\right)$ y máximo relativo en $\left(\frac{1}{2}, e^{-1/2}\right)$, con $e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}607$. Son simétricos respecto del origen, como tenía que ser.
5. **Asíntotas:** no hay verticales (f es continua en $\mathbb{R}$). Horizontal: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x^2}}$ es $\frac{\infty}{\infty}$, y por L'Hôpital (Tema 8) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{4x\,e^{2x^2}} = 0$; por ser impar, también tiende a 0 en $-\infty$. Asíntota $y = 0$ a los dos lados, y por tanto no hay oblicua.

SOLUCIÓN $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$. Decrece en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; crece en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Mínimo relativo en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y máximo relativo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. Asíntota horizontal $y = 0$; no tiene verticales ni oblicuas.

Apartado b)

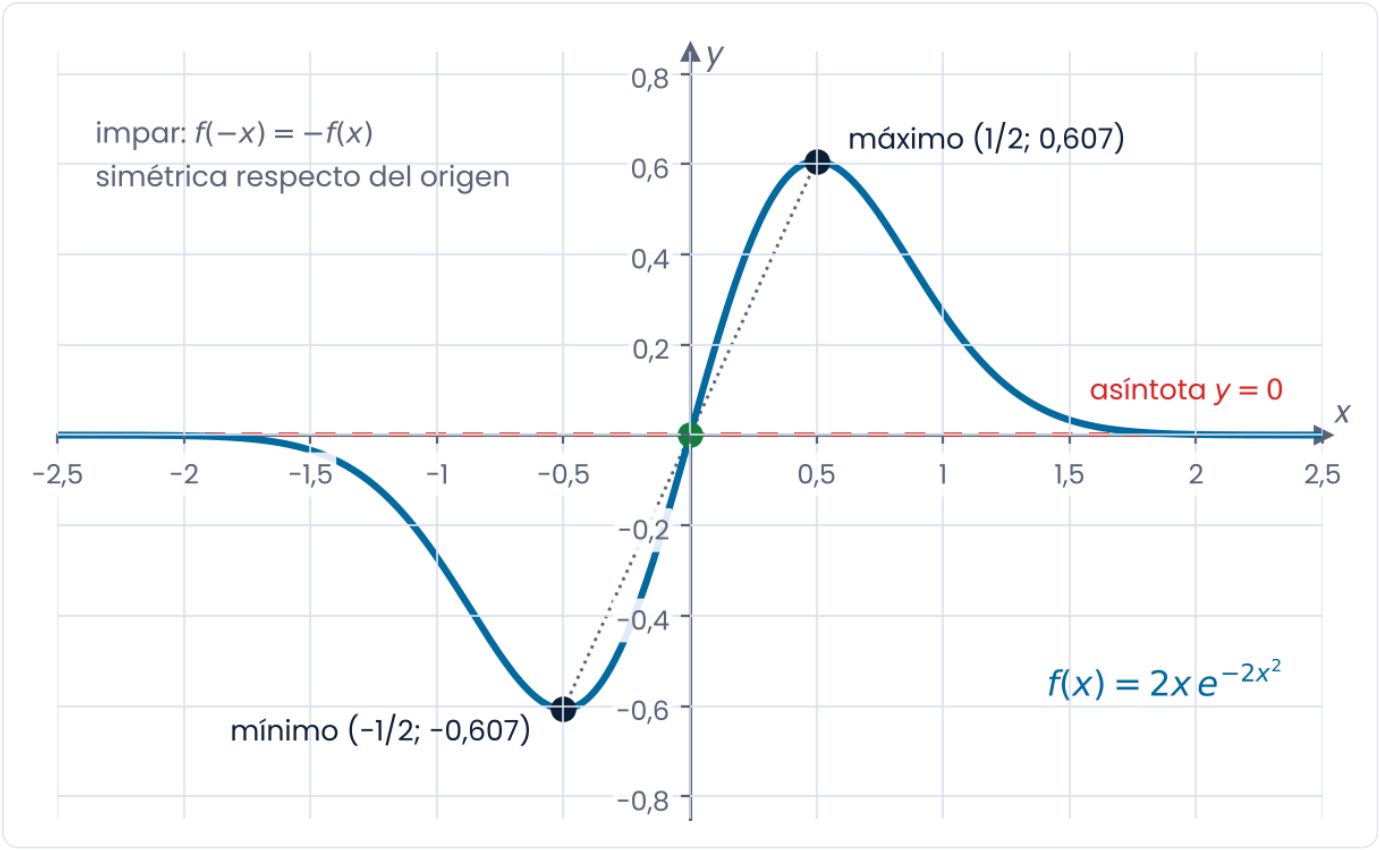
1. Es de áreas (Tema 12, donde están los criterios de este apartado); aquí, breve. En $[0, 2]$, $f \geq 0$ ($2x \geq 0$ y la exponencial es positiva), así que el área es la integral. Una primitiva es $-\frac{1}{2}\,e^{-2x^2}$ (la derivada del exponente, $-4x$, casi está en la función), y por Barrow:

$$\int_0^2 2x\,e^{-2x^2}\,dx = \left[-\tfrac{1}{2}\,e^{-2x^2}\right]_0^2 = -\tfrac{1}{2}\,e^{-8} + \tfrac{1}{2}.$$

SOLUCIÓN Área $= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-8}\right) \approx 0{,}4998$ u².

Lo que puntúa. Criterios específicos de Castilla y León 2025 (Problema 2, apartado a): «Hasta 0,2 puntos por el dominio. Hasta 0,8 puntos por los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y la determinación de los extremos. Hasta 0,5 puntos por determinar las asíntotas.» Los criterios generales exigen que «Deberán figurar explícitamente las operaciones no triviales» y penalizaban los errores de cálculo en razonamientos correctos con hasta el 40 % del apartado (en la guía de 2026, hasta el 25 % de la pregunta). Las asíntotas valen 0,5: aunque no haya verticales, dilo y da la razón.

Error típico que te quita puntos. Olvidar la regla de la cadena: derivar e^{-2x^2} como e^{-2x^2} en lugar de $-4x\,e^{-2x^2}$. Sale $f'(x) = 2e^{-2x^2}(1 + x)$, con un solo extremo, y se pierde la simetría. Y decir «no tiene asíntotas» porque no hay denominador: $y = 0$ es asíntota horizontal.



$f(x) = 2x\,e^{-2x^2}$, **una función impar.** Su gráfica es simétrica respecto del origen: el mínimo $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y el máximo $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ son simétricos, y la curva se pega a la asíntota $y = 0$ en los dos extremos porque la exponencial manda sobre $2x$.

COMPARATIVA FINAL

Qué buscar según el tipo de función

Función	Dominio	Asíntotas que puede tener	Lo que cambia en tu comunidad
Polinómica	$\mathbb{R}$	Ninguna: ramas parabólicas en $\pm\infty$ (grado 2 o más)	Igual en todas
Racional $\frac{P}{Q}$	Sin los ceros de Q	Verticales (o huecos); horizontal si $\operatorname{gr} P \leq \operatorname{gr} Q$; oblicua si $\operatorname{gr} P = \operatorname{gr} Q + 1$	La que más cae; la lista de Cataluña pide el «cálculo de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas» de las racionales
Con raíz $\sqrt{u}$	$u \geq 0$ ($u > 0$ si está en un denominador)	Horizontales u oblicuas, distintas en $+\infty$ y en $-\infty$: $\sqrt{x^2+3x}$ tiene $y = x + \frac{3}{2}$ y $y = -x - \frac{3}{2}$	Aragón 2023: asíntotas y ramas parabólicas de $\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$
Con $\ln u$	$u > 0$	Vertical donde $u \to 0^+$, por un lado o por los dos ($\ln x^2$ en $x = 0$)	Baleares 2025: comportamiento en los extremos del dominio de $\frac{\ln(2x)}{x}$
Con e^u	$\mathbb{R}$ (salvo denominadores)	Horizontal en un lado y rama parabólica en el otro (x^2e^{-x}), o una horizontal distinta en cada lado ($\frac{1}{1+e^x}$: $y = 1$ e $y = 0$)	Castilla y León: en sus cuatro convocatorias de 2025-2026 (x^2e^{-x}, $\frac{1}{1+e^x}$…)
A trozos o con $\lvert u \rvert$	La unión de los intervalos de cada trozo	Las de cada trozo, solo en su intervalo	Cantabria: con un $\ln$ en un trozo en 2024, 2025 (modelo) y 2026

Función	Dominio	Asíntotas que puede tener	Lo que cambia en tu comunidad
Trigonométrica	$\mathbb{R}$ (tg: sin $\frac{\pi}{2} + k\pi$)	Periódica: sin horizontales; verticales en tg	Las listas de Andalucía y del País Vasco las nombran
Representar cualquiera	El estudio completo, en orden	Todas las anteriores	Murcia: no entra en 2027 (ni asíntotas ni representación, acta del 16-09-2026); Baleares: nunca con tabla de valores (salvo las lineales)

Lo que cambia en cada comunidad sale de su documento oficial de 2026-27 (o de 2025-26 si aún no hay otro): está en la página de tu comunidad, en «Qué entra en Matemáticas II». Que una lista no nombre una familia de funciones no quiere decir que no entre.

Errores que te quitan puntos

Lo que más se confunde en este tema, y cómo decirlo bien.

✗ «$f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$: el dominio es donde $x^2 - x - 2 \geq 0$».

✓ La raíz está en el **denominador**, así que tampoco puede ser 0: $x^2 - x - 2 > 0$, dominio $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. Es Aragón 2023 (ordinaria, ejercicio 4 a), cuyos criterios descuentan «hasta 0,2 puntos» de 0,75 por errores leves en el dominio.

Apartado 1: Dominio, simetrías y puntos de corte

✗ «$\sqrt{x^2+3x}$ es par, porque x^2 es par».

✓ Primero, el dominio tiene que ser simétrico: aquí es $(-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$, y $f(1) = 2$ mientras que $f(-1)$ no existe. Así que no es par ni impar. Lo pide Madrid 2025 (reserva 1, 2.1 a): «determinar su dominio y estudiar su paridad». Para decir que sí es par o impar, comprueba $f(-x)$ con la x genérica, no con un número.

Apartado 1: Dominio, simetrías y puntos de corte

✗ «$f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$ es impar, así que $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{2} f(x)\,dx$».

✓ Eso es para las **pares**. Si es **impar**, las áreas de los dos lados se compensan y $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$. Andalucía 2026 (reserva 1, 3.2 b) pide justo eso: «estudia la simetría de la función f y deduce de ella el valor de $\int_{-2}^{2}$…». Comprueba antes la paridad: $f(-x) = \frac{-x}{|x|+1} = -f(x)$.

Apartado 1: Dominio, simetrías y puntos de corte

✗ «$f(x) = \ln(x^2 - 9)$ si $x > 3$: asíntotas verticales $x = 3$ y $x = -3$».

✓ En una función a trozos, cada fórmula solo vale en su intervalo. Ese trozo no llega a $x = -3$: solo hay asíntota en $x = 3$, y **por la derecha** ($\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$). En el otro trozo, un polinomio, no hay ninguna. Es Cantabria 2025 (modelo, 2A); en 2024 (extraordinaria, ejercicio 2) cae lo mismo con $\ln(x^2 - 25)$ si $x > 5$.

Apartado 2: Asíntotas verticales

✗ «$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, así que no hay asíntota horizontal» (y se para ahí).

✓ Falta mirar si hay **oblicua** ($m = \lim \frac{f}{x}$ finito y no nulo, y n finito) o **rama parabólica**. Y míralo en $+\infty$ y en $-\infty$ por separado. Los criterios de Aragón 2023 (ordinaria, 4 b) puntúan así el estudio completo: además de las verticales y la horizontal, 0,2 puntos por la «comprobación de no oblicua» y 0,2 por la «comprobación de no rama parabólica».

Apartado 3: Asíntotas horizontales y oblicuas

✗ «El dibujo, con las curvas bien, pero sin las asíntotas ni los puntos marcados, ni nombre en los ejes».

✓ Dibuja las asíntotas (discontinuas), marca los extremos, los cortes y la inflexión con sus coordenadas y pon nombre a los ejes. Las especificaciones de Baleares para 2027 penalizan como error leve (20-50 % del apartado) «No indicar quina variable correspon a cada un dels eixos en les representacions», y en Extremadura 2026 (ordinaria, 2.A c) se dan 0,5 puntos «por la representación aproximada de la gráfica de la función»: la que sale de lo que has calculado.

Apartado 5: El estudio completo, paso a paso

✗ «Para representarla, hago una tabla con $x = -2, -1, 0, 1, 2$ y uno los puntos».

✓ La gráfica tiene que salir del **estudio**: dominio, cortes, asíntotas, monotonía, extremos y, si te la piden, curvatura. Las especificaciones de Baleares para 2027 cuentan como error grave, que se penaliza con el 100 % del apartado, «Fer la gràfica d'una funció en base a una taula de valors (excepte per funcions lineals)», y los criterios de Canarias para 2026-27 dicen que la representación «deberá basarse en características importantes de la misma, que deberá obtener previamente, aunque en el enunciado de la pregunta esto no se haya pedido». Un par de valores sirven solo para comprobar.

Apartado 5: El estudio completo, paso a paso

✗ «Las dos curvas se cortan en $x = 0$ y $x = 1$» (en el dibujo de un recinto, sin más).

✓ Da cada punto de corte con sus **dos coordenadas** y dibuja la región pedida. Los criterios de Canarias para 2026-27 lo exigen: al representar una región «habrá que calcular los puntos de corte entre ambas gráficas, si dichos puntos están relacionados con la región pedida», y se dará «cada uno de esos puntos con sus dos coordenadas, aunque no se pida explícitamente».

Apartado 6: Gráficas de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas

Conceptos clave

Dominio

Conjunto de valores de x para los que existe $f(x)$. Se excluyen los ceros de los denominadores, los radicandos negativos de las raíces pares y los argumentos no positivos de los logaritmos.

Función par

Cumple $f(-x) = f(x)$ en todo el dominio. Su gráfica es simétrica respecto del eje Y.

Función impar

Cumple $f(-x) = -f(x)$ en todo el dominio. Su gráfica es simétrica respecto del origen.

Asíntota vertical

Recta $x = a$ tal que $\lim_{x\to a^-} f(x)$ o $\lim_{x\to a^+} f(x)$ es $+\infty$ o $-\infty$.

Asíntota horizontal

Recta $y = L$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Asíntota oblicua

Recta $y = mx + n$, con $m \neq 0$, a la que se acerca la gráfica en $+\infty$ o en $-\infty$: $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big)$.

Posición respecto de una asíntota

Por encima o por debajo de $y = mx + n$ según el signo de $f(x) - (mx + n)$; junto a una vertical, hacia arriba o hacia abajo según el signo de los límites laterales.

Discontinuidad evitable (hueco)

Punto a en el que el límite existe y es finito, pero $f(a)$ no existe (un **hueco**, como $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ en $x = 1$) o vale otra cosa. No es una asíntota.

Rama parabólica

Lo que hace la gráfica en $\pm\infty$ cuando $f \to \pm\infty$ y no hay asíntota oblicua (por ejemplo, un polinomio de grado 2 o más).

Órdenes de infinito

Cuando $x \to +\infty$, $\ln x$ crece más despacio que cualquier potencia x^n ($n > 0$), y cualquier potencia más despacio que e^x.

Puntos de corte con los ejes

Con el eje Y, $(0, f(0))$ si 0 es del dominio; con el eje X, los puntos $(a, 0)$ con $f(a) = 0$.

Signo de una función

Dónde es $f > 0$ (la gráfica va por encima del eje X) y dónde $f < 0$; cambia solo en los ceros de f y en los puntos fuera del dominio o de discontinuidad.

Tabla de variación

Una tabla con los puntos clave (ceros de f' y de f'', asíntotas verticales), el signo de f' y de f'' en cada intervalo y las flechas: resume el estudio para dibujar.

Función periódica

La que se repite cada T: $f(x + T) = f(x)$ para todo x. $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tienen período 2π; basta con estudiarlas en un período.

MODO PAU

Nueve reglas que valen puntos

Dominio

Lo primero, siempre. Todo lo demás se estudia dentro de él.

Vertical

Calcula el límite en cada cero del denominador: $\frac{k}{0}$ es asíntota; $\frac{0}{0}$, simplifica (puede ser un hueco).

Laterales

Da $\lim_{x \to a^-}$ y $\lim_{x \to a^+}$ con su signo: es la «aproximación» a la asíntota.

Horizontal u oblicua

Por separado en $+\infty$ y en $-\infty$. Oblicua: $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$, o divide.

Posición

Signo de $f(x) - (mx + n)$: por encima o por debajo.

Intervalos

La asíntota vertical parte los intervalos de monotonía y de curvatura.

Dibujo

Asíntotas discontinuas, puntos clave y curva coherente con las flechas.

Sin tabla de valores

La gráfica sale del estudio: asíntotas, extremos, cortes. Con valores, solo comprueba.

Simetría e integral

Impar en $[-a, a]$: la integral vale 0. Par: dos veces la de $[0, a]$.

Cómo te lo pueden preguntar

- Halla las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una función: salieron en 9 de las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en 7 comunidades.
- Calcula un parámetro para que la función tenga una asíntota dada (horizontal u oblicua).
- Estudia dominio, monotonía, extremos y asíntotas, y representa la gráfica de forma aproximada.
- Estudia las simetrías y la aproximación (los límites laterales) de la función a sus asíntotas verticales.
- Halla los extremos absolutos de una función definida en todo $\mathbb{R}$ comparando con los límites en $\pm\infty$.

- Interpreta una asíntota horizontal en un contexto: el valor «a largo plazo» de un precio, una concentración o una superficie.

No lo confundas

- Un cero del denominador (candidato) con una asíntota vertical: si el límite es finito, es un hueco.
- La asíntota horizontal en $+\infty$ con la de $-\infty$: pueden ser distintas, como en $\frac{1}{1+e^x}$.
- «La gráfica nunca corta a la asíntota»: a una horizontal u oblicua sí puede cortarla (a una vertical, no la cruza).
- Asíntota oblicua ($m \neq 0$) con horizontal ($m = 0$): si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, mira si hay horizontal.
- «Decrece en $(0, 4)$» con «decrece en $(0, 2)$ y en $(2, 4)$» cuando $x = 2$ no es del dominio.
- Máximo relativo con «el valor más alto de la gráfica»: con asíntotas, un máximo relativo puede valer menos que un mínimo relativo.

Ponte a prueba

PAU Cantabria 2026, Apartado 2, tarea 2A (Bloque B; a elegir entre 2A y 2B; 2,5 puntos). Considera la función presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x + a^2}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Responde a las siguientes cuestiones: a) [1 punto] Calcula los valores de a para los que $f(x)$ tiene como asíntota oblicua a la recta: $y = x - 6$. b) [1 punto] Considera $a = -2$, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. c) [0,5 puntos] Considera $a = -2$, halla la expresión de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.

Solución: a) $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + a^2 x} = 1$ y $n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(a - a^2)\,x + 1}{x + a^2} = a - a^2$. Con $a - a^2 = -6$: $a^2 - a - 6 = 0$, así que $a = 3$ o $a = -2$ (los dos valen). b) Con $a = -2$, $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+4}$, dominio $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$, y $f'(x) = \frac{(x-1)(x+9)}{(x+4)^2}$: crece en $(-\infty, -9)$ y en $(1, +\infty)$; decrece en $(-9, -4)$ y en $(-4, 1)$. c) $f(-1) = \frac{4}{3}$ y $f'(-1) = -\frac{16}{9}$: $y - \frac{4}{3} = -\frac{16}{9}(x + 1)$, es decir, $y = -\frac{16}{9}x - \frac{4}{9}$ (tangente: Tema 8). Los criterios dan 0,6 puntos al cálculo de la oblicua en función de a y 0,4 a imponer la condición.

PAU Navarra 2025, Pregunta C2 (bloque C, a elegir entre C1 y C2; 2,5 puntos). Se considera la función $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^2-4}$. Estudia sus asíntotas y simetrías. Estudia la aproximación de la función a sus asíntotas verticales.

Solución: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. **Impar:** $f(-x) = \dfrac{-3x^3}{x^2-4} = -f(x)$, simétrica respecto del origen. **Verticales** $x = 2$ y $x = -2$ (el numerador vale 24 y -24): $\lim\limits_{x \to 2^-} f = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^-} f = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} f = +\infty$. **Oblicua:** dividiendo, $f(x) = 3x + \dfrac{12x}{x^2-4}$, así que $y = 3x$ en $\pm\infty$ (no hay horizontal). Posición: $\dfrac{12x}{x^2-4}$ es positivo cuando $x \to +\infty$ (por encima) y negativo cuando $x \to -\infty$ (por debajo). El examen no trae los criterios de corrección: remite a la web de la Universidad Pública de Navarra.

PAU Andalucía 2025, Ejercicio 3 (bloque con optatividad 1, a elegir entre los ejercicios 2 y 3; 2,5 puntos). Sea la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + \dfrac{\ln(x)}{x^2}$. a) [1 punto] Calcula a para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de f. b) [1,5 puntos] Para $a = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Estudia y halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$ es $\frac{\infty}{\infty}$; por L'Hôpital, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1/x}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x^2} = 0$. Así que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, y la asíntota es $y = 1$ si $a = 1$. b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$. Con $x > 0$, el signo es el de $1 - 2\ln x$, que se anula en $x = \sqrt{e}$: crece en $(0, \sqrt{e})$ y decrece en $(\sqrt{e}, +\infty)$. Máximo relativo en $x = \sqrt{e} \approx 1{,}649$, donde vale $f(\sqrt{e}) = \dfrac{1/2}{e} = \dfrac{1}{2e} \approx 0{,}184$; no hay mínimos relativos. (Criterios: hasta 0,5 puntos por el planteamiento del a) y hasta 0,5 por los intervalos del b).)

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (Matemáticas II)
2. Examen PAU Matemáticas II Extremadura 2026 (ordinaria)
3. Criterios de corrección PAU Matemáticas II Extremadura 2026 (ordinaria)
4. Examen PAU Matemáticas II Comunidad Valenciana 2026 (ordinaria)
5. Criterios de corrección PAU Matemáticas II Comunidad Valenciana 2026 (ordinaria)
6. Examen PAU Matemáticas II Castilla y León 2025 (ordinaria)
7. Criterios de corrección PAU Matemáticas II Castilla y León 2025 (ordinaria)
8. Examen PAU Matemáticas II Castilla y León 2026 (ordinaria)
9. Criterios de corrección PAU Matemáticas II Castilla y León 2026 (ordinaria)
10. Examen PAU Matemáticas II Cantabria 2026 (ordinaria)
11. Criterios de corrección PAU Matemáticas II Cantabria 2026 (ordinaria)
12. Examen PAU Matemáticas II Navarra 2025 (ordinaria)
13. Matemáticas II, Andalucía 2025: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
14. Examen PAU Matemáticas II Cataluña 2025 (ordinaria)
15. Examen PAU Matemáticas II Canarias 2026 (ordinaria)
16. Matemáticas II, Aragón 2023 (ordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Zaragoza – Comisión Organizadora de la PAU de Aragón)
17. Matemáticas II, Madrid 2025 (reserva 1): examen y criterios de corrección (Universidad Complutense de Madrid)
18. Matemáticas II, Andalucía 2026: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)

19. Matemáticas II, Andalucía 2026 (modelo): examen y criterios de corrección (Distrito Único Andaluz)
20. Matemáticas II, Andalucía 2027 (modelo): examen y criterios de corrección (Distrito Único Andaluz)
21. Matemáticas II, Cantabria 2025 (modelo): examen (Universidad de Cantabria)
22. Matemáticas II, Cantabria 2024 (extraordinaria): examen (Universidad de Cantabria)
23. Matemáticas II, Andalucía 2023: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
24. Matemáticas II, Madrid 2026 (reserva 2): examen y criterios de corrección (Universidad Complutense de Madrid)
25. Matemáticas II, Andalucía 2024: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
26. Matemáticas II, Canarias 2026 (extraordinaria): examen (Consejería de Educación del Gobierno de Canarias)
27. Matemáticas II, Asturias 2026 (extraordinaria): examen (Universidad de Oviedo)
28. Matemáticas II, Asturias 2026 (extraordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Oviedo)
29. Matemáticas II, Cataluña 2026 (reserva): examen (Generalitat de Catalunya (Dept. de Recerca i Universitats) / Oficina d'Accés a la Universitat)
30. Matemáticas II, Cataluña 2026 (reserva): criterios de corrección (Generalitat de Catalunya (Dept. de Recerca i Universitats) / Oficina d'Accés a la Universitat)
31. Matemáticas II, Galicia 2026 (extraordinaria): examen (CiUG)
32. Matemáticas II, Galicia 2026 (extraordinaria): criterios de corrección (CiUG)
33. Matemáticas II, País Vasco 2025 (ordinaria): examen (Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea)
34. Matemáticas II, País Vasco 2025 (ordinaria): criterios de corrección (Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea)
35. Matemáticas II, Baleares 2025 (ordinaria): examen (Universitat de les Illes Balears (UIB) – Servei d'Alumnes / Àrea d'Accés)
36. Matemáticas II, Baleares 2025 (ordinaria): criterios de corrección (Universitat de les Illes Balears (UIB) – Servei d'Alumnes / Àrea d'Accés)
37. Matemàtiques II · Especificacions dels criteris de correcció 2027 (UIB, 13-10-2026; en catalán)
38. Criterios de calificación de Matemáticas II, curso 2026-2027 (PAU Canarias)
39. Acta de la reunión de coordinación de Matemáticas II para PAU2027 (Universidad de Murcia, 16-09-2026)
40. Matemáticas: estructura del examen y saberes de la materia (Generalitat de Catalunya, versión en castellano)
41. Real Decreto 534/2024, de 11 de junio, requisitos de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado y características básicas de la prueba de acceso (BOE, texto consolidado)

Imágenes: Una función logarítmica: Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · Estudio completo (Extremadura 2026): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · Asíntota horizontal y extremos absolutos (Comunidad Valenciana 2026): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · Función impar (Castilla y León 2025): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta.

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 8 de noviembre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.