Integrales indefinidas

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en farmeandopau.com ›

Última revisión: 9 de noviembre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

Integrar es **deshacer una derivada**: buscas una función F cuya derivada sea f. Si encuentras una, tienes todas: $F(x) + C$. Para llegar a ella hay cuatro herramientas que conviene reconocer a primera vista: la **tabla de inmediatas** (con la regla de la cadena al revés), el **cambio de variable**, la **integración por partes** y las **integrales racionales**. No entran igual en todas partes: Cataluña solo pide «primitivas inmediatas y casi inmediatas»; Canarias, inmediatas, «1 solo cambio» de variable y partes «con una iteración», y no nombra las racionales; la Comunidad Valenciana no exige las que «requieran cambios de variable» (propuesta para 2023; pendiente de confirmar para 2027); y en Castilla-La Mancha (2026-27) y Asturias (acta de 2025-26), si toca un cambio de variable, te lo dan. Y una ventaja que no tienen otros temas: el resultado **se comprueba derivando**. El cálculo de integrales pedido directamente (indefinidas o definidas) salió en **10 de las 28** convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en 9 comunidades, y la primitiva que cumple una condición, en **7 de las 28**. Además, todas las áreas del Tema 12 empiezan por una primitiva.

1 Primitiva e integral indefinida

Una función F es una **primitiva** de f en un intervalo si $F'(x) = f(x)$ en todo él. Por ejemplo, x^2, $x^2 + 2$ y $x^2 - 7$ son primitivas de $f(x) = 2x$, porque las tres tienen derivada $2x$. La **integral indefinida** es el conjunto de todas las primitivas:

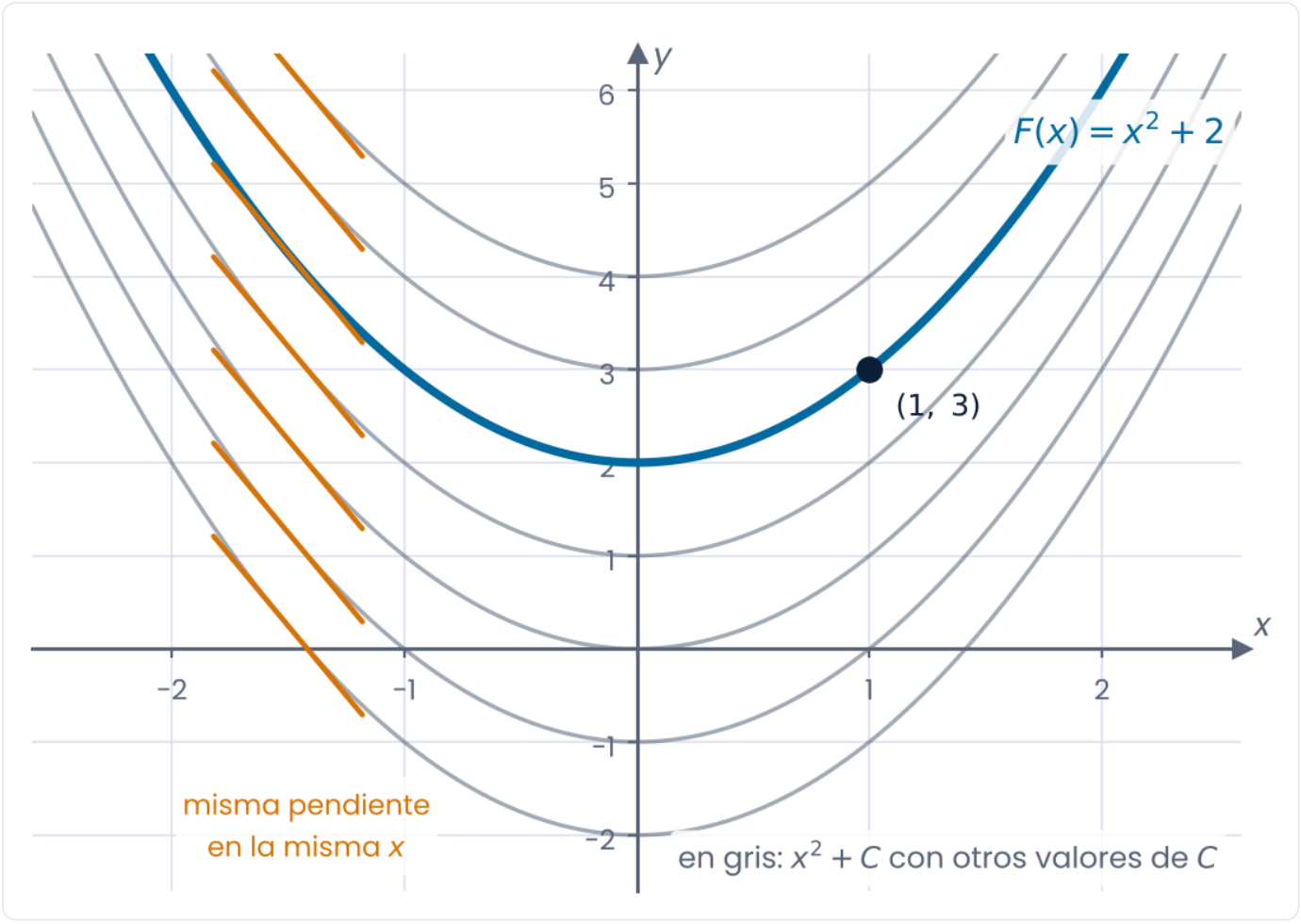
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

A f se le llama **integrando**, y el dx indica cuál es la variable.

- **Por qué $+C$:** la derivada de una constante es 0, así que sumar una constante no cambia la derivada. Y al revés: dos primitivas de la misma función en un intervalo se diferencian solo en una constante (es una consecuencia del teorema de Lagrange, Tema 9). En la gráfica son la **misma curva desplazada en vertical** (figura de abajo).
- **Linealidad:** $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ y $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ si k es un número. Así, $\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx = x^3 - 2x^2 + 5x + C$.
- **No hay regla del producto ni del cociente:** $\int x \cdot x\,dx = \frac{x^3}{3} + C$, que no es $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$. Para productos y cocientes están el cambio de variable, las partes y las racionales.
- **Comprobación:** deriva lo que te ha salido; tiene que dar el integrando. En el ejemplo: $(x^3 - 2x^2 + 5x)' = 3x^2 - 4x + 5$. Es la forma más rápida de cazar un error de signo o un factor olvidado.
- Toda función **continua** en un intervalo tiene primitiva (lo garantiza el teorema fundamental del cálculo, Tema 12). Otra cosa es que se pueda escribir con las funciones conocidas: la primitiva de e^{x^2} existe, pero no se puede escribir así.

La constante vale puntos

Los criterios de Murcia 2026 (Pregunta 4.2 a) dan 1 punto por «Cálculo correcto de una primitiva» y otros 0,5 por el «Cálculo correcto de la integral indefinida, es decir, una primitiva más una constante arbitraria». Y Aragón 2026 pone entre los ejemplos de falta de rigor la «Notación inadecuada de la integral o no poner la constante de integración». Escribe siempre el $+C$ y el dx.



Las primitivas de $f(x) = 2x$. Son las parábolas $x^2 + C$: la misma curva subida o bajada. En una misma x, todas tienen la misma pendiente (en naranja, en $x = -1{,}5$, donde la pendiente es $f(-1{,}5) = -3$). Si además se pide que pase por $(1, 3)$, solo vale una: $1 + C = 3$, así que $C = 2$ y $F(x) = x^2 + 2$.

2 Integrales inmediatas

Cada derivada que conoces, leída al revés, da una integral. En la tabla de abajo, la columna de la derecha es la **regla de la cadena al revés**: si dentro hay una función $u = g(x)$ y fuera aparece su derivada u', la integral es inmediata. Si falta un número, se ajusta multiplicando y dividiendo (solo números: una x no puede salir de la integral).

- **Raíces y fracciones como potencias:** $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$, y $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$.
- **Ajustar un número:** en $\int x\,e^{x^2}\,dx$ la derivada de x^2 es $2x$, y solo hay x. Se multiplica y se divide por 2: $\frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.
- **Logaritmos:** si arriba está la derivada de abajo, $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + C$. Con un signo: $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$.
- **Potencia de una función:** en Aragón 2025 (3.2 b) había que integrar $\cos^2 x \operatorname{sen} x$. Con $u = \cos x$, $u' = -\operatorname{sen} x$: $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx = -\int u^2 u'\,dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$.
- **Arcotangente con un número:** $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + C$ (con $u = \frac{x}{2}$, $u' = \frac{1}{2}$).
- **Potencias de la tangente** (Canarias, modelos de 2026 y 2027; Murcia 2025, extraordinaria): como $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$,

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

La primera es $\int u\,u'\,dx$ con $u = \operatorname{tg} x$, y la segunda está en el apartado de los logaritmos.

- **Seno o coseno al cuadrado:** con el ángulo doble, $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Así, $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + C$, que es la forma $ax + b\operatorname{sen} x\cos x + c$ de Aragón 2024 (ordinaria): $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ y c cualquiera. En **Murcia** no se usarán estas fórmulas sin que el examen lo indique (acta del 16-09-2026).

Tipo	Forma simple	Forma compuesta ($u = g(x)$)
Potencia	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	$\int u^n\,u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
Logaritmo	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\lvert u\rvert + C$
Exponencial	$\int e^x\,dx = e^x + C$, $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0,\ a \neq 1)$	$\int e^u\,u'\,dx = e^u + C$
Seno y coseno	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$, $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int u'\cos u\,dx = \operatorname{sen} u + C$, $\int u'\operatorname{sen} u\,dx = -\cos u + C$
Tangente	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \operatorname{tg} u + C$
Arcotangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$	$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} u + C$
Arcoseno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} u + C$

El valor absoluto del logaritmo hace falta porque $\ln$ solo existe para números positivos. Si u es siempre positivo (como $x^2 + 1$ o $1 + e^x$), se puede quitar.

Error típico que te quita puntos

Aplicar la fórmula de la potencia con $n = -1$ (dividiría entre 0): $\int x^{-1}dx = \ln\lvert x\rvert + C$. Y lo contrario: $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ no es $\ln(x^2)$, es $-\frac{1}{x} + C$. Tampoco vale «dividir por la derivada de dentro» cuando esa derivada lleva x: $\int e^{x^2}\,dx \neq \frac{e^{x^2}}{2x}$ (deriva y lo verás).

3 Cambio de variable

Cuando dentro hay una función $g(x)$ y su derivada aparece fuera (o casi), se le pone nombre: $t = g(x)$. Todo pasa a la nueva variable, **incluido el** dx, y se integra en t (los cuatro pasos, en el esquema de abajo). Las inmediatas compuestas son cambios de variable hechos de cabeza.

- **Con una raíz dentro (Aragón 2026, Pregunta 2):** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. Con $t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, es decir, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,dt$:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2e^t\,dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

- **Logaritmo y su derivada:** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ con $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$: $\int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$.
- **Cuando hay que despejar x:** $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ con $t = \sqrt{x+1}$ ($x = t^2 - 1$, $dx = 2t\,dt$):

$$\int \frac{t^2-1}{t}\,2t\,dt = 2\int (t^2-1)\,dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + C = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + C.$$

- **Funciones de e^x:** el cambio $e^x = t$ convierte e^{2x} en t^2 y deja una racional en t. Es el de Andalucía 2026 (4.1, resuelto más abajo) y el de Cantabria 2026 (2B, en «Ponte a prueba»).
- **Cambio y después partes:** con $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$ o $\cos\sqrt{x}$ (Andalucía 2023, reservas 3 y 4), el cambio $t = \sqrt{x}$ ($x = t^2$, $dx = 2t\,dt$) deja $\int 2t\operatorname{arc\,tg} t\,dt$ o $\int 2t\cos t\,dt$, que salen por partes. Para $\cos\sqrt{x}$: $2(t\operatorname{sen} t + \cos t) + C = 2\left(\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right) + C$.

Elige t y deriva

$t = g(x)$ y $dt = g'(x)\,dx$. Si te dan una sugerencia («haz el cambio $e^x = t$»), úsala.

Sustituye todo

No puede quedar ninguna x. Si queda, despéjala: con $e^x = t$, $x = \ln t$ y $dx = \dfrac{dt}{t}$; con $t = \sqrt{x+1}$, $x = t^2 - 1$ y $dx = 2t\,dt$.

Integra en t

Suele quedar una inmediata o una racional (sección «Integrales racionales»).

Deshaz el cambio

Vuelve a x y añade $+C$. Comprueba derivando.

El dx también cambia

Cambiar la función y dejar el dx es el fallo más común: con $e^x = t$, $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ no es $\displaystyle\int \frac{t}{1+t}\,dt$, sino $\displaystyle\int \frac{t}{1+t}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln(1+e^x) + C$. Y al final, nunca dejes el resultado en t.

4 Integración por partes

Sirve para **productos de funciones de distinto tipo** (un polinomio por una exponencial, un seno o un coseno) y para integrar **solas** $\ln x$ o $\operatorname{arc\,tg} x$. Sale de la derivada de un producto, $(u\,v)' = u'v + u\,v'$, integrando y despejando:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

- **Cómo elegir:** u es la que **se simplifica al derivar** y dv, lo que sabes integrar. Regla «ALPES» (Arcos, Logaritmos, Polinomios, Exponenciales, Senos y cosenos): para u, la que va antes en la lista.
- **Polinomio por exponencial:** $\int x\,e^x\,dx$ con $u = x$, $dv = e^x\,dx$ ($du = dx$, $v = e^x$): $x\,e^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1) + C$. Es la primitiva de Canarias 2026 (4A); su integral definida está en el Tema 12.
- **El logaritmo solo:** $\int \ln x\,dx$ con $u = \ln x$, $dv = dx$ ($du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = x$): $x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$. Sale en Madrid 2026 (5.1) y en Andalucía 2025 (Ejercicio 6, resuelto más abajo).
- **Varias veces:** con x^2 delante hay que aplicarla dos veces (cada vez baja un grado): $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int x\,e^x\,dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.
- **Cíclicas:** en $I = \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$, dos partes seguidas devuelven la misma integral: $I = e^x\operatorname{sen} x - e^x\cos x - I$. Se despeja como una ecuación: $I = \dfrac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + C$.
- **Simplifica antes el logaritmo:** $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ y $\ln a^k = k\ln a$. Con $\ln\frac{x+1}{x}$ (Murcia 2025, ordinaria) quedan dos integrales del tipo $\int \ln u\,dx$, y con $(x-1)^2\ln\frac{\sqrt{x-1}}{2}$ queda $\frac{1}{2}\ln(x-1) - \ln 2$ multiplicado por el polinomio, por partes. Pero si el enunciado sugiere un cambio, úsalo: en ese ejercicio (Andalucía 2024, reserva 4, ejercicio 4) proponen $x - 1 = t^2$, y los criterios dan «Hasta 0,75 puntos por efectuar el cambio de variable».

Error típico que te quita puntos

Elegir al revés. En $\int x\,e^x\,dx$, con $u = e^x$ y $dv = x\,dx$ queda $\frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx$, más difícil que la de partida: si la integral nueva es peor, cambia la elección. Y no pierdas el **signo menos** de $-\int v\,du$ ni los paréntesis cuando v es negativa.

5 Integrales racionales

Son las de la forma $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, con P y Q polinomios. Antes de nada, mira si es inmediata (si arriba está la derivada de abajo, es un logaritmo). Si no, el método tiene cuatro pasos (esquema de abajo): dividir si el grado de arriba es mayor o igual que el de abajo, factorizar el denominador, descomponer en fracciones simples (tabla de abajo) e integrar cada fracción. Ojo, que no entran igual en todas las comunidades: Andalucía, Galicia, Castilla-La Mancha y la lista del País Vasco solo ponen racionales con las raíces del denominador **reales** (Castilla-La Mancha admite además las de arcotangente o logaritmo más arcotangente inmediatas, y el acta vasca de 23-09-2026, al

preguntarle por los teoremas de continuidad y derivabilidad, dijo que puede entrar «cualquier contenido contemplado en el Currículo oficial»); Asturias, con «raíces simples y/o factores de tipo» x^2+a^2; Baleares, con raíces reales y complejas **simples**; Murcia no evalúa en 2027 las de varias raíces reales, las de una raíz múltiple, las que dan logaritmo más arcotangente ni las de factores $(ax^2+bx+c)^n$ con $n>1$ y raíces no reales (acta de 16-09-2026); y en Canarias y Cataluña las racionales no figuran. Estos son los casos que salen:

- **Raíces simples (Extremadura 2025, 2B a):** $\int \dfrac{2}{x^3+x^2-2x}\,dx$. Como $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$:

$$\frac{2}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}\ \Rightarrow\ 2=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

  Con $x=0$: $2=-2A$, $A=-1$. Con $x=1$: $2=3B$, $B=\frac{2}{3}$. Con $x=-2$: $2=6C$, $C=\frac{1}{3}$. Resultado: $-\ln|x|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x+2|+C$.
- **Raíz doble:** $\dfrac{x}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$, así que $\int \dfrac{x}{(x-1)^2}\,dx=\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}+C$.
- **Sin raíces reales (Asturias 2026, 3B a):** x^2+1 no se anula. Se separa la parte del logaritmo y la de la arcotangente:

$$\int\frac{x-2}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx-2\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

- **Grado de arriba mayor o igual:** $\dfrac{x^2+1}{x-1}=x+1+\dfrac{2}{x-1}$ (divide), así que $\int\dfrac{x^2+1}{x-1}\,dx=\dfrac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+C$.
- **Sin raíces reales: completa el cuadrado.** $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$, así que $\int\dfrac{dx}{x^2+2x+2}$ vale $\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C$ (Andalucía 2025, extraordinaria, con el temario de 2024-25: desde 2025-26 Andalucía solo pone racionales «en las que las raíces del denominador son reales»). Si hay una x arriba, primero separa la parte del logaritmo (la derivada del denominador) y la de la arcotangente, como en el ejemplo de Asturias de arriba. Con un cambio que te sugieran, como $t=x^2-3$ en $\int\frac{4x}{x^4-6x^2+10}\,dx$, queda $\int\frac{2\,dt}{t^2+1}=2\operatorname{arc\,tg}(x^2-3)+C$. En Andalucía 2025 (reserva 2, ejercicio 2) es definida, entre $\sqrt{3}$ y 2: los límites pasan a $t=0$ y $t=1$, y vale $2\operatorname{arc\,tg}1=\frac{\pi}{2}$.

1 Compara grados

Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, **divide**: $\dfrac{P}{Q}=c(x)+\dfrac{r(x)}{Q(x)}$, con el cociente $c(x)$ y el resto $r(x)$.

2 Factoriza el denominador

Con Ruffini, la fórmula de segundo grado o una identidad notable ($x^2-a^2=(x-a)(x+a)$).

3 Fracciones simples

Escribe la descomposición (tabla de abajo) y halla los coeficientes dando a x los valores de las raíces o igualando coeficientes.

4 Integra cada fracción

Salen logaritmos, potencias y, si el denominador no tiene raíces reales, una arcotangente.

Raíces del denominador	Descomposición	Integral de cada parte
Reales simples: $(x-a)(x-b)$	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$	$A\ln\lvert x-a\rvert+B\ln\lvert x-b\rvert$
Real doble: $(x-a)^2$	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}$	$A\ln\lvert x-a\rvert-\dfrac{B}{x-a}$
Sin raíces reales: x^2+px+q	$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$	Un logaritmo (con la derivada del denominador) y una arcotangente

Comprueba la descomposición antes de integrar

Suma las fracciones que te han salido y mira si vuelve el integrando. En el de Extremadura, con $x = 2$: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ por un lado y $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ por el otro. Con raíz doble, no olvides la fracción con $(x-a)^2$: con una sola fracción por cada factor no hay coeficientes que valgan.

6 Primitiva que cumple una condición

La integral indefinida da infinitas primitivas. Una condición elige una: fija el valor de C. Si te dan f'', hay que integrar dos veces y salen **dos constantes**, así que hacen falta dos condiciones. Los pasos, en el esquema de abajo.

- **Aragón 2026 (Pregunta 2 a):** $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ y $f(1) = 2e - 2$. Con el cambio de la sección «Cambio de variable», $f(x) = 2e^{\sqrt{x}} + C$; y $f(1) = 2e + C = 2e - 2$ da $C = -2$: $f(x) = 2e^{\sqrt{x}} - 2$. El límite que también piden es $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2e^0 - 2 = 0$.
- **Si te dan f'':** integras una vez ($f' = \ldots + C_1$) y otra ($f = \ldots + C_1 x + C_2$). Dos puntos de la gráfica dan dos ecuaciones (Andalucía 2025, Ejercicio 6, resuelto más abajo). Otros datos posibles: un extremo en $x = a$ ($f'(a) = 0$) o la pendiente de una tangente ($f'(a) = m$).
- **Cuidado con el dominio:** si f no está definida en un punto (por un $\ln$ o un denominador), la primitiva vale en un intervalo, y la condición dice en cuál. En Cantabria 2026 (2B), f no existe en $x = \ln 2$, y la condición está en $x = \ln 4 > \ln 2$.

Primitiva general

Calcula $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ sin dar valor a C todavía.

Traduce la condición

«Pasa por (a, b)»: $F(a) = b$. «Toma el valor k en $x = a$»: $F(a) = k$. «Tangente $y = mx + n$ en $x = a$»: el punto está en la recta, $F(a) = ma + n$ (la pendiente $F'(a) = f(a) = m$ ya la da el enunciado: sirve para comprobar).

Despeja y escribe

Halla C y escribe la primitiva completa, con su dominio si f no está definida en todo $\mathbb{R}$.

Lo que puntúa

La integral se lleva casi todo, pero la constante también cuenta. Cantabria 2026 (2B b, 1,5 puntos): «Cálculo de la integral», 1,25; «Cálculo de la constante», 0,15; «Expresión final de la primitiva», 0,10. Aragón 2026 (Pregunta 2 a): «Calcular bien una primitiva: 0,5 puntos» y «Calcular el valor de la constante: 0,3 puntos». Termina siempre con la función entera escrita, no solo con «$C = \ldots$».

7 Cómo elegir el método

En el examen, lo difícil no es aplicar un método, sino saber cuál toca. Mira el integrando y busca estas señales:

Si ves…	Prueba…	Ejemplo
Sumas de potencias, raíces o $1/x$	Separar y usar la tabla	$\int \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right) dx = \dfrac{x^3}{3} + \ln\lvert x\rvert + C$
Una función y su derivada multiplicando	Inmediata compuesta o cambio $t = g(x)$	$\int \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\, dx = e^{\operatorname{sen} x} + C$
Funciones de e^x (con e^{2x}, $1 + e^x$…)	Cambio $e^x = t$, $dx = \dfrac{dt}{t}$	Andalucía 2026 (4.1)
Producto de tipos distintos, o $\ln x$ sola	Por partes	$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$
Cociente de polinomios	Racional: dividir y fracciones simples	País Vasco 2025 (5A b)
$\sqrt{ax+b}$ sin su derivada fuera	Cambio $t = \sqrt{ax+b}$	$\int \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$ (sección «Cambio de variable»)

Si un método no avanza en dos líneas, prueba otro. Y al final, deriva.

8 Ejercicio resuelto: integral por partes e integral racional (País Vasco 2025)

PAU PAÍS VASCO 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · QUINTO EJERCICIO, OPCIÓN 5A (A ELEGIR ENTRE 5A Y 5B; 2,5 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Calcula las dos integrales siguientes:

a) $\int 2x\cos(2x+5)\,dx$. (1,25 puntos)

b) $\displaystyle\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx$. (1,25 puntos)

Apartado a)

1. Es el producto de un polinomio $(2x)$ por un coseno: **por partes**. Para u, el polinomio, que al derivar se queda en un número: $u = 2x$, $dv = \cos(2x+5)\,dx$.
2. $du = 2\,dx$ y $v = \int \cos(2x+5)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(2x+5)}{2}$ (inmediata compuesta: la derivada de $2x+5$ es 2, y por eso se divide entre 2).
3. Fórmula $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$:

$$\int 2x\cos(2x+5)\,dx = 2x\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x+5)}{2} - \int \frac{\operatorname{sen}(2x+5)}{2}\cdot 2\,dx = x\operatorname{sen}(2x+5) - \int \operatorname{sen}(2x+5)\,dx.$$

4. La que queda es inmediata: $\int \operatorname{sen}(2x+5)\,dx = -\dfrac{\cos(2x+5)}{2}$. Con el signo menos de delante, pasa a sumar.
5. Comprobación derivando:

$$\left(x\operatorname{sen}(2x+5) + \tfrac{1}{2}\cos(2x+5)\right)' = \operatorname{sen}(2x+5) + 2x\cos(2x+5) - \operatorname{sen}(2x+5) = 2x\cos(2x+5).$$

SOLUCIÓN $\displaystyle\int 2x\cos(2x+5)\,dx = x\operatorname{sen}(2x+5) + \frac{\cos(2x+5)}{2} + C.$

Apartado b)

1. Es **racional**: arriba, grado 1; abajo, grado 2. No hay que dividir. Tampoco es un logaritmo directo: la derivada del denominador es $2x$, y arriba hay $x+495$.
2. El denominador es una diferencia de cuadrados, porque $2025 = 45^2$: $x^2 - 2025 = (x-45)(x+45)$. Dos raíces reales simples, 45 y -45.
3. Fracciones simples:

$$\frac{x+495}{(x-45)(x+45)} = \frac{A}{x-45} + \frac{B}{x+45} \;\Rightarrow\; x+495 = A(x+45) + B(x-45).$$

4. Con $x = 45$: $540 = 90A$, así que $A = 6$. Con $x = -45$: $450 = -90B$, así que $B = -5$. Comprobación: $6(x+45) - 5(x-45) = x + 270 + 225 = x + 495$.
5. Cada fracción da un logaritmo: $\displaystyle\int \frac{6}{x-45}\,dx = 6\ln|x-45|$ y $\displaystyle\int \frac{-5}{x+45}\,dx = -5\ln|x+45|$.

SOLUCIÓN $\displaystyle\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx = 6\ln|x-45| - 5\ln|x+45| + C.$

Lo que puntúa. Criterios de País Vasco 2025 (5A). a) «Elección correcta de los factores para aplicar la integración por partes», 0,5 puntos; «Aplicación correcta de la fórmula de integración por partes», 0,5; «Cálculo correcto de la integral», 0,25. b) «Descomposición correcta en fracciones simples del integrando del apartado (b)», 0,75; «Cálculo correcto de la integral del apartado (b)», 0,5. Elegir bien u y dv vale tanto como aplicar la fórmula, y en el b) la descomposición vale más que la integral final: escribe la igualdad con A y B y cómo los hallas. El solucionario oficial usa las mismas $u = 2x$ y $dv = \cos(2x+5)\,dx$.

Error típico que te quita puntos. Tomar $v = \operatorname{sen}(2x+5)$ sin dividir entre 2: sale $2x\operatorname{sen}(2x+5) + \ldots$, y al derivar ya no da el integrando. En el b), escribir $\ln(x^2 - 2025)$ como si arriba estuviera la derivada de abajo, u olvidar el valor absoluto de los logaritmos.

9 Ejercicio resuelto: cambio de variable y primitiva con una tangente dada (Andalucía 2026)

PAU ANDALUCÍA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 4.1 (BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2, A ELEGIR ENTRE 4.1 Y 4.2; 2,5 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1 + e^x},$$

halla la primitiva de f cuya gráfica tiene por tangente a la recta $y = 2x + 12\ln(2)$ en el punto de abscisa $x = 0$. (Sugerencia: puedes hacer el cambio $e^x = t$).

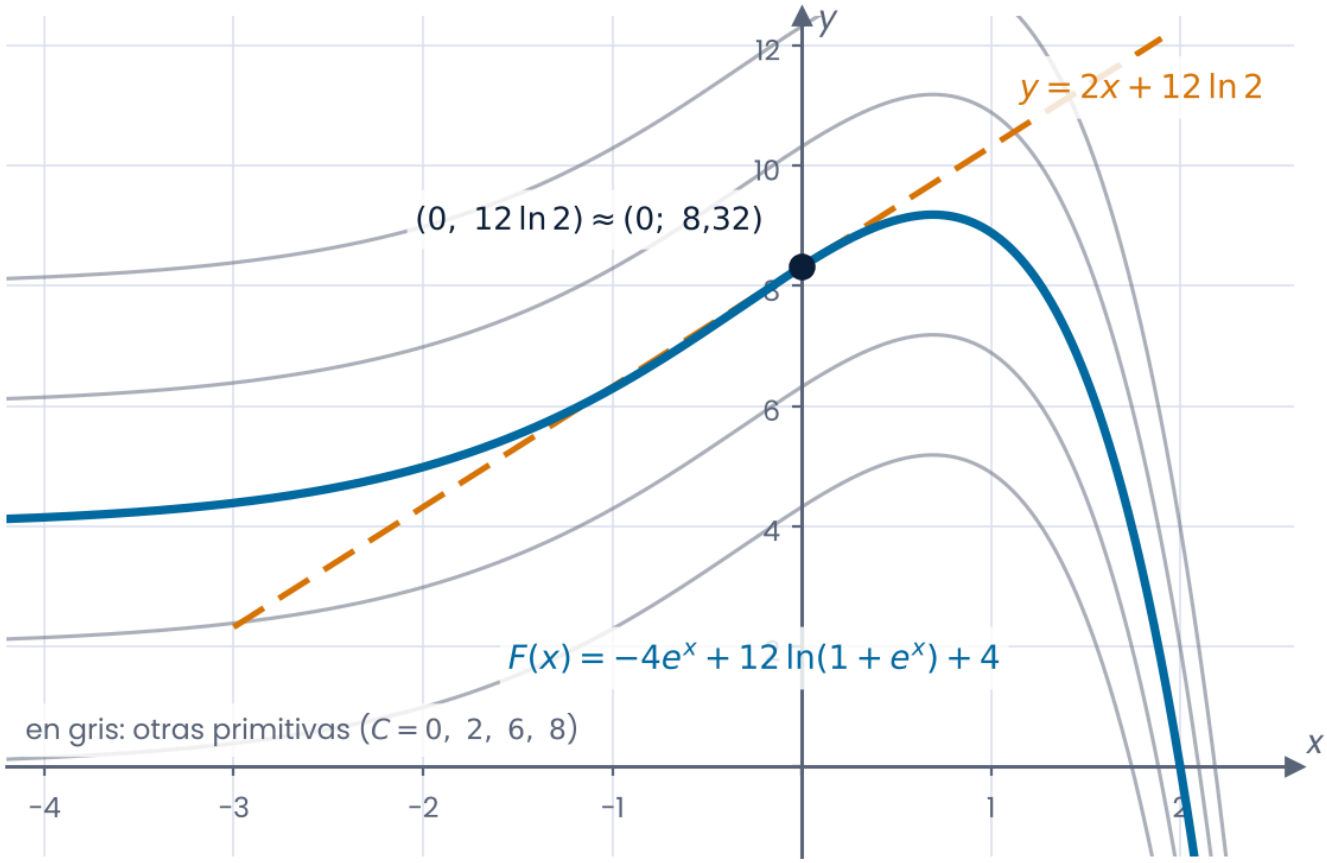
1. **Qué piden.** Una primitiva F (con su constante) cuya tangente en $x = 0$ sea $y = 2x + 12\ln 2$. El punto de tangencia está en la recta: $F(0) = 2 \cdot 0 + 12\ln 2 = 12\ln 2$. La pendiente, $F'(0) = f(0) = \dfrac{8-4}{1+1} = 2$, coincide con la de la recta: ese dato se cumple solo y sirve de comprobación.
2. **Cambio $e^x = t$.** Entonces $x = \ln t$, $dx = \dfrac{dt}{t}$ y $e^{2x} = t^2$:
$$\int \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{8t - 4t^2}{1+t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{8-4t}{1+t}\,dt.$$
3. **Racional con el mismo grado arriba y abajo:** se divide. $8 - 4t = -4(1+t) + 12$, así que $\dfrac{8-4t}{1+t} = -4 + \dfrac{12}{1+t}$.
4. **Se integra y se deshace el cambio:** $\int \left(-4 + \dfrac{12}{1+t}\right) dt = -4t + 12\ln|1+t| + C = -4e^x + 12\ln(1+e^x) + C$. Como $1 + e^x > 0$, el valor absoluto sobra.
5. **Condición:** $F(0) = -4e^0 + 12\ln(1+e^0) + C = -4 + 12\ln 2 + C = 12\ln 2$, así que $C = 4$.
6. **Comprobación:** $F'(x) = -4e^x + \dfrac{12e^x}{1+e^x} = \dfrac{-4e^x - 4e^{2x} + 12e^x}{1+e^x} = \dfrac{8e^x - 4e^{2x}}{1+e^x} = f(x)$. En la figura, la tangente en $(0,\ 12\ln 2)$ toca a la curva azul; las grises son otras primitivas, con la misma pendiente en $x = 0$ pero a otra altura.

SOLUCIÓN $F(x) = -4e^x + 12\ln(1+e^x) + 4$.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Andalucía 2026 (Ejercicio 4.1): «Hasta 1,75 puntos por el cálculo de» $\int f(x)\,dx$, de los 2,5 del ejercicio; el resto no tiene un reparto escrito. En la puntuación de cada ejercicio, el examen reserva «0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados», y los criterios generales penalizan con un máximo

de 0,25 puntos los errores en las operaciones aritméticas elementales (en 2027, 0,2 en los dos casos, con ejercicios de 2 puntos: Orientaciones 2026-27). Explica el cambio (qué vale dx) y la división: son la parte que más puntúa.

Error típico que te quita puntos. Hacer el cambio sin cambiar el dx: queda $\int \frac{8t-4t^2}{1+t}\,dt$, que no es la integral pedida. Y usar la tangente como $F(0)=2$ (la pendiente) en lugar de $F(0)=12\ln 2$ (la altura del punto).



Andalucía 2026 (4.1): la primitiva que toca a la recta. En azul, $F(x)=-4e^x+12\ln(1+e^x)+4$, con su tangente $y=2x+12\ln 2$ (naranja) en $(0,\ 12\ln 2)\approx(0;\ 8{,}32)$. En gris, otras primitivas ($C=0$, 2, 6 y 8): en $x=0$ tienen la misma pendiente, 2, pero ninguna pasa por el punto de la recta.

10 Ejercicio resuelto: la función a partir de su segunda derivada (Andalucía 2025)

PAU ANDALUCÍA 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 6 (BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3, A ELEGIR ENTRE 6 Y 7; 2,5 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Halla la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2,\ e-2-2\ln(2))$ y $(1,0)$, y verifica que

$$f''(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}.$$

1. **Plan.** De f'' a f hay que integrar **dos veces**, y cada vez aparece una constante. Los dos puntos dan las dos ecuaciones para hallarlas.
2. **Primera integral** (inmediatas; como $x>0$, $\ln|x|=\ln x$):

$$f'(x)=\int\left(e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=e^{x-1}-\ln x+C_1.$$

3. **Segunda integral.** $\int \ln x\,dx$ va **por partes** ($u = \ln x$, $dv = dx$): $x\ln x - x$. Entonces

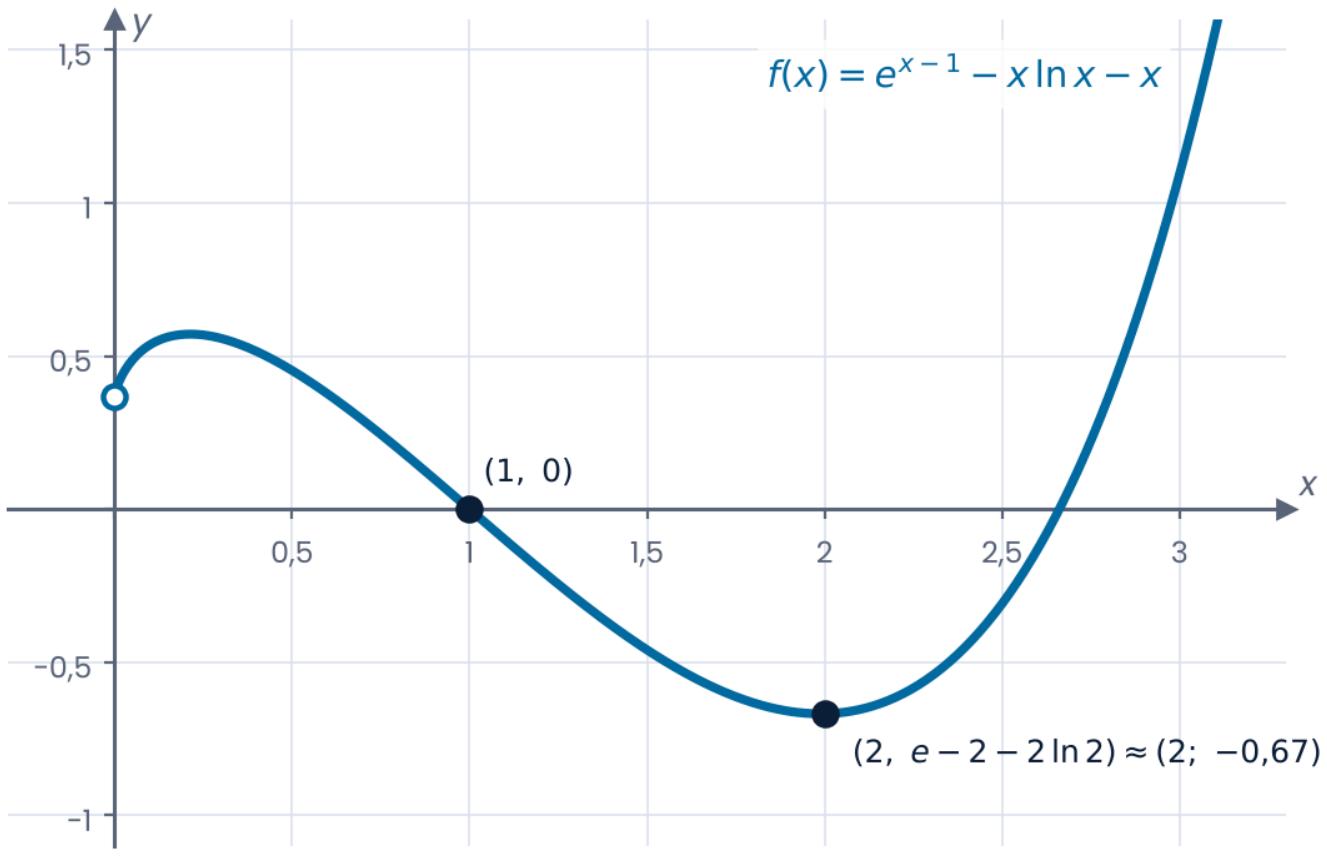
$$f(x) = \int \left(e^{x-1} - \ln x + C_1\right) dx = e^{x-1} - (x\ln x - x) + C_1 x + C_2 = e^{x-1} - x\ln x + x + C_1 x + C_2.$$

4. **Punto** $(1, 0)$: $e^0 - 1\cdot\ln 1 + 1 + C_1 + C_2 = 0$, es decir, $2 + C_1 + C_2 = 0$: $C_1 + C_2 = -2$.
5. **Punto** $(2,\ e - 2 - 2\ln 2)$: $e - 2\ln 2 + 2 + 2C_1 + C_2 = e - 2 - 2\ln 2$. La e y el $2\ln 2$ se van: $2C_1 + C_2 = -4$.
6. **Sistema:** restando las dos ecuaciones, $C_1 = -2$, y entonces $C_2 = 0$. Sustituyendo: $f(x) = e^{x-1} - x\ln x + x - 2x = e^{x-1} - x\ln x - x$.
7. **Comprobación:** $f(1) = 1 - 0 - 1 = 0$ y $f(2) = e - 2\ln 2 - 2$. Derivando: $f'(x) = e^{x-1} - \ln x - 1 - 1 = e^{x-1} - \ln x - 2$ y $f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$.

SOLUCIÓN $f(x) = e^{x-1} - x\ln x - x$, para $x > 0$.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Andalucía 2025 (Ejercicio 6): «Hasta 1,5 puntos por el cálculo de una primitiva de f'», es decir, por la segunda integración, la que lleva la integral por partes de $\ln x$. El resto de los 2,5 puntos no tiene un reparto escrito; de ellos, 0,25 son para «la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados», como en todos los ejercicios de ese examen. Los criterios generales añaden que un error en un parámetro no se tiene en cuenta en los desarrollos posteriores que dependen de él si son de una complejidad equivalente.

Error típico que te quita puntos. Poner una sola constante al final: con f'' hacen falta dos, y si C_1 no se multiplica por x en la segunda integración, el sistema no tiene solución. Y escribir $\int \ln x\,dx = \frac{1}{x}$ (eso es la derivada).



Andalucía 2025 (Ejercicio 6): la función que se busca. $f(x) = e^{x-1} - x\ln x - x$, definida para $x > 0$ (el punto hueco indica que $x = 0$ no está en el dominio), pasa por $(1, 0)$ y por $(2,\ e - 2 - 2\ln 2) \approx (2;\ -0{,}67)$. Con una sola condición habría infinitas funciones con esa f''; con dos, solo una.

COMPARATIVA FINAL

Integrales: qué método usar y qué entra en tu comunidad

Si ves…	Método	Ejemplo PAU	Lo que cambia en tu comunidad
Una función y su derivada ($u^n u'$, $\frac{u'}{u}$, $e^u u'$)	Inmediata compuesta	Canarias 2026 (extraordinaria, 4A): $\int \sqrt{7x+5}\,dx$	Cataluña: solo «primitivas inmediatas y casi inmediatas»
Una raíz o e^x que estorba, o te dan el cambio	Cambio de variable	Aragón 2026: $t=\sqrt{x}$	C. Valenciana: no se exigen las que «requieran cambios de variable» (propuesta para la PAU de 2023, pendiente para 2027); Castilla-La Mancha: el cambio te lo indican; Murcia: sin cambios trigonométricos
Polinomio por e^x, sen o $\cos$; $\ln x$ o $\operatorname{arc\,tg} x$ solos	Partes (cíclica con $e^x \operatorname{sen} x$)	Castilla-La Mancha 2026: $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$	Canarias: partes «con una iteración» (guía); Cataluña: no figura
$\frac{P}{Q}$ con raíces reales simples	Descomponer en fracciones simples	Extremadura 2026: $\int \frac{8-8x}{x^3-4x}\,dx$	Murcia: excluye las de varias raíces reales; Canarias: la descomposición no está en su guía
$\frac{P}{Q}$ con raíz doble	Dos fracciones: $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}$	País Vasco 2025: $\frac{x+7}{(x+5)^2}$	Murcia: no entra (ninguna raíz real de orden mayor que 1, acta de 2027); Asturias: solo raíces simples o x^2+a^2 (acta 2025-26); Baleares: «arrels reals i complexes simples» (matriz 2025-26)
$\frac{P}{Q}$ sin raíces reales	Logaritmo más arcotangente (completando el cuadrado)	Asturias 2026: $\frac{x-2}{x^2+1}$	Andalucía, Galicia y País Vasco: solo raíces reales (2026-27); Castilla-La Mancha: solo arctg o ln + arctg inmediatas; Asturias: solo x^2+a^2, sin completar el cuadrado; Murcia: ni completar el cuadrado ($b\neq 0$) ni logaritmo más arcotangente
$\operatorname{tg}^n x$, $\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$	$\operatorname{tg}^2 = \frac{1}{\cos^2}-1$; ángulo doble	Murcia 2025 (extraordinaria, 2B): $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$	Murcia: las fórmulas del ángulo doble solo si el examen las indica; Castilla-La Mancha: «se dará el cambio de variable y/o relaciones relevantes» si hace falta (2026-27)
Una condición (pasa por un punto, f'', una tangente)	Integra y halla C (dos constantes con f'')	Andalucía 2025: f desde f''	Igual en todas; Andalucía, Asturias y Extremadura la ponen casi siempre

Lo que entra en cada comunidad sale de su documento oficial de 2026-27 (o de 2025-26 si aún no hay otro): está en la página de tu comunidad, en «Qué entra en Matemáticas II». Si tu comunidad limita las racionales, las demás técnicas siguen entrando: mira el aviso de tu comunidad en cada apartado.

Errores que te quitan puntos

Lo que más se confunde en este tema, y cómo decirlo bien.

✗ «$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$».

✓ La regla de la potencia es $\int u^n\,u'\,dx$: necesita la **derivada** de $u=\operatorname{tg} x$, que es $\frac{1}{\cos^2 x}$, y aquí no está. Hay que partir: $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)$, y sale $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$. Es la integral de Canarias (modelos de 2026 y 2027) y de Murcia 2025 (extraordinaria). Derívalo para comprobarlo.

Apartado 2: Integrales inmediatas

✗ «$\int 3\operatorname{sen}\frac{x}{4}\,dx = -3\cos\frac{x}{4}+C$».

✓ Falta dividir por la derivada de lo de dentro, $\frac{1}{4}$: $\int 3\operatorname{sen}\frac{x}{4}\,dx = -12\cos\frac{x}{4}+C$. Con el ángulo $\frac{x}{4}$ (el vitral de Cataluña 2025, extraordinaria), $3x$ o $2x+5$, comprueba siempre derivando: la derivada de $-3\cos\frac{x}{4}$ es $\frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{x}{4}$, no $3\operatorname{sen}\frac{x}{4}$.

Apartado 2: Integrales inmediatas

✗ «$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2e^t\right]_1^4 = 2e^4 - 2e$».

✓ Se han mezclado los límites en x con la primitiva en t. Con $t = \sqrt{x}$, $x = 1$ da $t = 1$ y $x = 4$ da $t = 2$: $\left[2e^t\right]_1^2 = 2e^2 - 2e$. O deshaz el cambio y sustituye en x: $\left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = 2e^2 - 2e$. La primitiva $2e^{\sqrt{x}} + C$ es la de Aragón 2026 (ordinaria, 2 a), donde la condición $f(1) = 2e - 2$ da $C = -2$.

Apartado 3: Cambio de variable

✗ «$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$: primero $u = \operatorname{sen} x$ y, en la segunda vuelta, $u = e^x$».

✓ Si cambias la elección, la segunda integración por partes deshace la primera y llegas a $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$, que no dice nada. Mantén el mismo tipo de u: $u = \operatorname{sen} x$ y luego $u = \cos x$. Así la integral vuelve con signo menos y se despeja: $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + C$. Es Castilla-La Mancha 2026 (ordinaria, 5.1 b): «resolver correcta y razonadamente la integral, 0,75; obtener la solución correcta, 0,25».

Apartado 4: Integración por partes

✗ «$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}$».

✓ Si el grado de arriba es **mayor o igual** que el de abajo, primero se **divide**: $\frac{x^2-2x+3}{x^2-x-2} = 1 + \frac{-x+5}{x^2-x-2}$, y solo la fracción propia se descompone ($\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1}$). Los criterios de País Vasco 2026 (extraordinaria, 5A) dan 0,5 puntos por esa separación, 0,5 por la descomposición, 0,5 por la integral y otros 0,5 por la «explicación de los pasos realizados».

Apartado 5: Integrales racionales

✗ «$\int \frac{x - 2}{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$».

✓ Al separar quedan **dos** integrales: la del logaritmo, $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$, y la del número que sobra, $-2\int \frac{dx}{x^2+1}$, que es una arcotangente. Juntas: $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - 2\operatorname{arc\,tg} x + C$. Es Asturias 2026 (ordinaria, pregunta 3, opción B a), que vale 1,25 puntos, y el área del b), otros 1,25, sale de esta primitiva.

Apartado 5: Integrales racionales

✗ «$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ vale $\ln(x^2 + 2x + 2) + C$».

✓ El logaritmo solo sale si arriba está la **derivada** de abajo ($2x + 2$), y aquí hay un 1. El denominador no tiene raíces reales: completa el cuadrado, $(x + 1)^2 + 1$, y es una **arcotangente**: $\operatorname{arc\,tg}(x + 1) + C$. Es Andalucía 2025 (extraordinaria, ejercicio 2), cuyos criterios dan «hasta 1 punto por el cálculo de la integral indefinida». Con el temario de 2026-27 Andalucía ya no pone denominadores sin raíces reales, pero sí entran en otras comunidades (Castilla-La Mancha, Asturias con $x^2 + a^2$).

Apartado 5: Integrales racionales

✗ «Primitiva de $f(x) = (x + 1)e^{x+1}$ con $F(0) = -1$: sustituyo en f, $f(0) = e$…».

✓ La condición es sobre la **primitiva**: calcula primero $F(x) = x\,e^{x+1} + C$ (por partes) y sustituye en ella: $F(0) = C = -1$, así que $F(x) = x\,e^{x+1} - 1$ (Extremadura 2023, extraordinaria).

Apartado 6: Primitiva que cumple una condición

Conceptos clave

Primitiva

Una función F cuya derivada es f en un intervalo: $F'(x) = f(x)$.

Integral indefinida

El conjunto de todas las primitivas de f: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Constante de integración

La C de $F(x) + C$. Recoge que todas las primitivas se diferencian en una constante.

Integrando

La función que se integra, la $f(x)$ de $\int f(x)\,dx$.

Integral inmediata

La que sale leyendo al revés una derivada conocida, en forma simple o compuesta (con u' multiplicando).

Cambio de variable

Sustituir $t = g(x)$ y $dt = g'(x)\,dx$ para que la integral quede más sencilla en t; al final se vuelve a x.

Integración por partes

$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$. Para productos de funciones de distinto tipo y para $\ln x$ o $\operatorname{arc\,tg} x$.

Integral racional

La de un cociente de polinomios. Se divide si el grado de arriba es mayor o igual y se descompone en fracciones simples.

Fracciones simples

Fracciones del tipo $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{(x-a)^2}$ o $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, cuya suma es la fracción de partida.

Primitiva que cumple una condición

La primitiva cuya gráfica pasa por un punto dado (o tiene una tangente dada), única en el intervalo que contiene ese punto: se obtiene dando valor a C.

Fracción propia

Un cociente de polinomios $\frac{P}{Q}$ con el grado de P menor que el de Q. Solo esas se descomponen en fracciones simples; si no, antes se divide.

Integral cíclica

La que, al aplicar partes dos veces, vuelve a aparecer ($\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$). Se despeja como una ecuación.

Completar el cuadrado

Escribir x^2+bx+c como $(x+\frac{b}{2})^2+k$, con $k = c - \frac{b^2}{4}$. Si $k>0$, el denominador no tiene raíces reales y $\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$ es una arcotangente; si arriba hay una x, sale logaritmo más arcotangente.

Sugerencia de cambio

El cambio de variable que da el enunciado («haz $t = e^x$»). Úsalo: se corrige con él.

MODO PAU

Nueve reglas que valen puntos

La constante

Escribe $+C$ y el dx: en Murcia 2026, la constante sola vale 0,5 puntos.

Comprueba

Deriva tu resultado: tiene que salir el integrando.

Logaritmos

$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$, con valor absoluto salvo que $u>0$.

Partes

u, la que se simplifica al derivar (ALPES). Cuidado con el signo de $-\int v\,du$.

Racionales

Grado, división, factorizar y fracciones simples. Comprueba la descomposición.

Cambio

Todo en t, también el dx. Al final, vuelve a x.

Condición

Primero la primitiva general; después, sustituye. Tantas condiciones como constantes.

Divide primero

Si el grado de arriba es mayor o igual que el de abajo, divide antes de descomponer.

Límites y cambio

En una definida con cambio, pasa los límites a t o vuelve a x antes de sustituir; nunca mezcles.

Cómo te lo pueden preguntar

- Calcula una integral por partes, racional o por cambio de variable: el cálculo de integrales pedido directamente (indefinidas o definidas) salió en 10 de las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en 9 comunidades.
- Halla la primitiva que pasa por un punto, que toma un valor dado o que tiene una tangente dada: salió en 7 de las 28.
- Halla f sabiendo f'' (o f') y uno o dos puntos de su gráfica.
- Descompón una fracción en fracciones simples y calcula su integral.
- Calcula f conociendo una primitiva suya (basta derivar) o comprueba que una función es primitiva de otra.
- Calcula la primitiva que necesitas para un área o una integral definida (Tema 12).

No lo confundas

- Una **primitiva** (una función, F) con la **integral indefinida** (todas a la vez, $F(x)+C$).

- $\int f \cdot g\,dx$ con $\int f\,dx \cdot \int g\,dx$: no son iguales.
- $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ con $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx = -\dfrac{1}{x} + C$.
- $\int \dfrac{u'}{u}\,dx = \ln|u|$ con $\int \dfrac{u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} u$.
- Derivar con integrar: $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, pero $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.
- Una raíz doble con una simple: $(x-a)^2$ necesita dos fracciones, $\dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{(x-a)^2}$.

Ponte a prueba

PAU Murcia 2026, Pregunta 4.2 (a elegir entre 4.1 y 4.2; 2 puntos). a) [1,5 ptos.] Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$. b) [0,5 ptos.] Determine la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(e, 1)$.

Solución: a) Cambio $t = \ln x$, $dt = \dfrac{dx}{x}$: $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\,dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$. Comprobación: $\left(-\dfrac{1}{\ln x}\right)' = \dfrac{1/x}{(\ln x)^2}$. Los criterios dan 1 punto por la primitiva y 0,5 por añadir la constante arbitraria. b) $-\dfrac{1}{\ln e} + C = -1 + C = 1$, así que $C = 2$: $F(x) = 2 - \dfrac{1}{\ln x}$, en el intervalo $(1, +\infty)$, que es donde está $x = e$ (f no está definida en $x = 1$).

PAU Cantabria 2026, Apartado 2, tarea 2B (Bloque B, a elegir entre 2A y 2B; 2,5 puntos). Considera la función real presentada a continuación,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4}$$

y responde a las siguientes cuestiones: a) [1 punto] Si existen, calcula las asíntotas de $f(x)$. b) [1,5 puntos] Calcula una primitiva de $f(x)$ que en $x = \ln 4$ tome el valor $\ln 2$.

Solución: a) Es del Tema 10. Asíntota vertical $x = \ln 2$ (ahí $e^{2x} = 4$ y el numerador vale $1 \neq 0$); horizontales $y = 0$ (cuando $x \to +\infty$) e $y = \frac{1}{4}$ (cuando $x \to -\infty$, $f \to \frac{-1}{-4}$); no hay oblicuas. b) Con $e^x = t$, $dx = \frac{dt}{t}$: $\displaystyle\int \frac{t-1}{t(t-2)(t+2)}\,dt$, y en fracciones simples $\dfrac{1}{4t} + \dfrac{1}{8(t-2)} - \dfrac{3}{8(t+2)}$. Queda $F(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{8}\ln|e^x - 2| - \dfrac{3}{8}\ln(e^x + 2) + C$. Con $F(\ln 4) = \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 2}{8} - \dfrac{3\ln 6}{8} + C = \ln 2$ sale $C = \dfrac{3}{8}\ln 12 \approx 0{,}932$. La primitiva pedida es $F(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{8}\ln(e^x - 2) - \dfrac{3}{8}\ln(e^x + 2) + \dfrac{3}{8}\ln 12$, en el intervalo $(\ln 2, +\infty)$, que es donde está $x = \ln 4$ (f no está definida en $x = \ln 2$).

PAU Extremadura 2026, Ejercicio 2.B (a elegir entre 2.A y 2.B; 2,5 puntos: a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos). Dadas las funciones $f(x) = 8 - 8x$ y $g(x) = x^3 - 4x$ a) Calcular $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $g(x)$ y el eje X.

Solución: a) $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$ y $\dfrac{8-8x}{x(x-2)(x+2)} = \dfrac{-2}{x} + \dfrac{-1}{x-2} + \dfrac{3}{x+2}$ (con $x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$). Así: $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = -2\ln|x| - \ln|x-2| + 3\ln|x+2| + C$. b) Es del Tema 12: g corta al eje en -2, 0 y 2; es impar, así que los dos trozos miden lo mismo: $\int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)\,dx = 4$ y $\int_{0}^{2}(x^3 - 4x)\,dx = -4$. Área $= 4 + 4 = 8$ u².

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (Matemáticas II)
2. Examen PAU Matemáticas II País Vasco 2025 (ordinaria)
3. Criterios de corrección y solucionario PAU Matemáticas II País Vasco 2025 (ordinaria)
4. Matemáticas II, Andalucía 2026: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
5. Matemáticas II, Andalucía 2025: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
6. Examen PAU Matemáticas II Murcia 2026 (ordinaria), con criterios de corrección
7. Examen PAU Matemáticas II Cantabria 2026 (ordinaria)
8. Criterios de corrección PAU Matemáticas II Cantabria 2026 (ordinaria)
9. Examen PAU Matemáticas II Extremadura 2026 (ordinaria)
10. Examen PAU Matemáticas II Extremadura 2025 (ordinaria)
11. Examen PAU Matemáticas II Aragón 2026 (ordinaria), con criterios específicos de corrección
12. Examen PAU Matemáticas II Aragón 2025 (ordinaria), con criterios específicos de corrección
13. Examen PAU Matemáticas II Asturias 2026 (ordinaria)
14. Examen PAU Matemáticas II Madrid 2026 (ordinaria), con criterios específicos de corrección
15. Examen PAU Matemáticas II Canarias 2026 (ordinaria), con criterios y soluciones
16. Matemáticas II, Canarias 2026 (modelo): examen (Consejería de Educación del Gobierno de Canarias)
17. Matemáticas II, Canarias 2027 (modelo): examen (Consejería de Educación del Gobierno de Canarias)
18. Matemáticas II, Canarias 2027 (modelo): criterios de corrección (Consejería de Educación del Gobierno de Canarias)
19. Matemáticas II, Murcia 2025 (extraordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Murcia)
20. Matemáticas II, Murcia 2025 (extraordinaria): examen resuelto (Universidad de Murcia)
21. Matemáticas II, Aragón 2024 (ordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Zaragoza – Comisión Organizadora de la PAU de Aragón)
22. Matemáticas II, Andalucía 2023: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
23. Matemáticas II, Murcia 2025 (ordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Murcia)
24. Matemáticas II, Murcia 2025 (ordinaria): examen resuelto (Universidad de Murcia)
25. Matemáticas II, Andalucía 2024: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
26. Matemáticas II, Cataluña 2025 (extraordinaria): examen (Generalitat de Catalunya (Dept. de Recerca i Universitats) / Oficina d'Accés a la Universitat)
27. Matemáticas II, Cataluña 2025 (extraordinaria): criterios de corrección (Generalitat de Catalunya (Dept. de Recerca i Universitats) / Oficina d'Accés a la Universitat)
28. Matemáticas II, Madrid 2026 (extraordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad Complutense de Madrid)
29. Matemáticas II, País Vasco 2026 (extraordinaria): criterios de corrección (Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea)
30. Matemáticas II, País Vasco 2025 (extraordinaria): examen (Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea)
31. Matemáticas II, País Vasco 2025 (extraordinaria): criterios de corrección (Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea)
32. Matemáticas II, Extremadura 2023 (extraordinaria): examen (Universidad de Extremadura)
33. Matemáticas II, Canarias 2026 (extraordinaria): examen (Consejería de Educación del Gobierno de Canarias)
34. Matemáticas II, Castilla-La Mancha 2026 (ordinaria): examen (Universidad de Castilla-La Mancha)
35. Matemáticas II, Castilla-La Mancha 2026 (ordinaria): criterios de corrección (Universidad de Castilla-La Mancha)
36. Matemáticas II, Extremadura 2026 (ordinaria): criterios de corrección (Universidad de Extremadura)
37. Acta de la reunión de coordinación de Matemáticas II para PAU2027 (Universidad de Murcia, 16-09-2026)
38. Guía de contenidos evaluables de Matemáticas II, PAU 2027 (Subcomisión de Matemáticas II, PAU Canarias)
39. Matemáticas: estructura del examen y saberes de la materia (Generalitat de Catalunya, versión en castellano)
40. Directrices y orientaciones generales. Curso 2026-2027. Matemáticas II (Distrito Único Andaluz)
41. Acta de la reunión de Matemáticas II, PAU 2025-2026 (Universidad de Oviedo y Consejería de Educación de Asturias)
42. Matemàtiques II · Matriu d'especificacions (UIB, 22-9-2026; en catalán)
43. Coordinación de la PAU en la UCLM · Matemáticas II, curso 2026-2027: contenidos, estructura y criterios (Universidad de Castilla-La Mancha)
44. Matemáticas II. Orientacións xerais do Grupo de Traballo, PAU 2027 (CiUG, 22-9-2026; en gallego)
45. PAU 2027 Matemáticas II: saberes evaluables y modelos de examen (UPV/EHU, 30-9-2026)
46. Acta de coordinación de Matemáticas II de noviembre de 2022, con la propuesta para la PAU de 2023 (Generalitat Valenciana)
47. Real Decreto 534/2024, de 11 de junio, requisitos de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado y características básicas de la prueba de acceso (BOE, texto consolidado)

Imágenes: Familia de primitivas: Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · Primitiva con tangente (Andalucía 2026): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · Función a partir de su segunda derivada (Andalucía 2025): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta.

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 9 de noviembre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.