Integral definida y áreas

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en farmeandopau.com ›

Última revisión: 9 de noviembre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

La **integral definida** $\int_a^b f(x)\,dx$ es un **número**: el área entre la gráfica y el eje, pero **con signo** (lo que queda por debajo del eje resta). Se calcula con la **regla de Barrow**: una primitiva (Tema 11) evaluada en b, menos evaluada en a. Para un **área** hay un paso más que no se puede saltar: buscar dónde corta la curva al eje (o dónde se cortan las dos curvas) y partir el intervalo para que nada reste. El área de un recinto plano es de lo que más se repite en Análisis: salió en **17 de las 28** convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en 10 comunidades.

1 Integral definida: qué es y sus propiedades

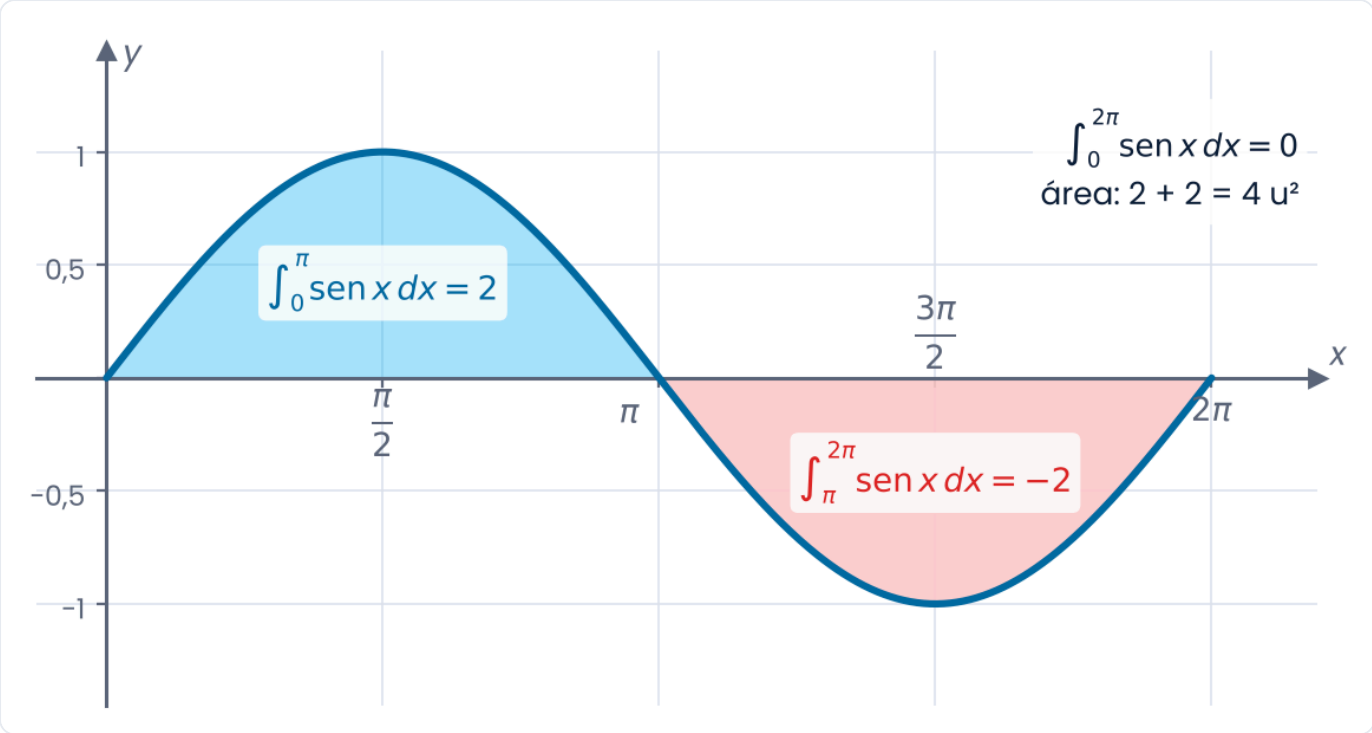
Si f es continua en $[a,b]$, se divide el intervalo en n trozos de anchura Δx y se suman las áreas de los rectángulos $f(x_i)\,\Delta x$. Cuando los trozos son cada vez más finos ($n \to \infty$), esa suma (de **Riemann**) tiende a un número: la **integral definida** $\int_a^b f(x)\,dx$. Si $f \geq 0$, es el área bajo la curva; donde $f < 0$, los rectángulos cuentan en negativo.

- **Integral no es área.** $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 0$, porque la mitad de la curva va por debajo del eje y resta lo mismo que suma la otra mitad; el área de la región, en cambio, mide 4 u² (figura de abajo).
- **Una integral definida no lleva** $+C$ y su resultado no depende de la letra: $\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^2 t^2\,dt = \frac{8}{3}$.
- **El signo, sin calcular:** si $f \geq 0$ en $[a,b]$ (con $a < b$), la integral es ≥ 0, y si $f \leq 0$, ≤ 0. Los modelos de 2026 de Aragón, Baleares y Murcia (apartado b) y el de 2027 de Galicia (3.3.2) preguntan si $\int_1^2 x\,e^x\,dx$ es positiva o negativa «sin calcular»: en $[1,2]$, $x > 0$ y $e^x > 0$, así que $x\,e^x > 0$ y la integral es **positiva** (vale e^2).

Propiedad	Qué dice	Para qué sirve
Intervalo de un punto	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	Comprobar una función integral en su origen
Cambiar los límites	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	Si integras «al revés», cambia el signo
Linealidad	$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$	Separar sumas y sacar números
Aditividad	$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$	Partir el intervalo donde cambia el signo o la fórmula (funciones a trozos, valor absoluto)
Signo y orden	Si $f \geq 0$ en $[a,b]$, $\int_a^b f\,dx \geq 0$; si $f \leq g$, $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$	Detectar un resultado imposible
Simetría	f impar: $\int_{-a}^a f\,dx = 0$; f par: $\int_{-a}^a f\,dx = 2\int_0^a f\,dx$	Ahorrar cuentas en intervalos simétricos

Una integral puede ser negativa o cero; un área, no

Si te sale un área negativa o nula, falta un paso: estudiar el signo. Los criterios de Aragón 2026 ponen las «áreas negativas» entre los «Resultados absurdos» que se penalizan (aunque menos si reconoces que no es posible).



Integral no es lo mismo que área. En $[0, \pi]$, $\operatorname{sen} x \geq 0$ y la integral vale 2; en $[\pi, 2\pi]$ la curva va por debajo del eje y la integral vale -2. En $[0, 2\pi]$ se compensan: la integral es 0, pero el área sombreada mide $2 + 2 = 4$ u².

2 Teorema fundamental del cálculo y regla de Barrow

La **función integral** $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ mide el área (con signo) desde a hasta x. El **teorema fundamental del cálculo** dice que, si f es continua, F es derivable y $F'(x) = f(x)$: la función integral es una primitiva de f. De ahí sale la regla que se usa para calcular cualquier integral definida.

- **Regla de Barrow.** Si f es continua en $[a, b]$ y G es una primitiva cualquiera de f:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a).$$

- **Ejemplo:** $\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$. La constante no hace falta: $(G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) - G(a)$.
- **Con una primitiva por partes (Canarias 2026, 4A):** $\int_1^2 x\,e^x\,dx = \Big[e^x(x-1)\Big]_1^2 = e^2 \cdot 1 - e \cdot 0 = e^2$ (la primitiva está en el Tema 11).
- **Derivar una función integral:** $\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)' = e^{x^2}$, aunque esa integral no se pueda calcular. Si el límite de arriba es una función, se multiplica por su derivada (regla de la cadena): $\left(\int_0^{x^2} \cos t\,dt\right)' = 2x\cos(x^2)$. Ojo: las listas de la PAU de Andalucía, Galicia y el País Vasco nombran la regla de Barrow, pero no el teorema fundamental del cálculo; las de Cantabria y Castilla y León no nombran ninguno de los dos. Murcia y Castilla-La Mancha sí lo nombran.
- **Integrales con un parámetro (Aragón 2025, 3.1):** en $\operatorname{err}(m) = \int_0^1 \left(e^x - mx\right)^2 dx$, la variable de integración es x y m es un número. Desarrollando el cuadrado: $\int_0^1 e^{2x}dx - 2m\int_0^1 x\,e^x\,dx +$

$m^2 \int_0^1 x^2\,dx = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{2} - 2m + \dfrac{m^2}{3}$. El mínimo (Tema 9) está en $m = 3$, y vale $\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{7}{2} \approx 0{,}19$.

- **Límites con una función integral.** Si $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, entonces $F(0) = 0$ y $F'(x) = f(x)$, aunque no sepas escribir F. Con $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ (Aragón 2026, extraordinaria), $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3}$ es $\left[\frac{0}{0}\right]$ y, por L'Hôpital, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}$. Andalucía 2023 (ordinaria, ejercicio 4) pide $\lim_{x\to 0} \frac{x\,F(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$ con $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$: L'Hôpital dos veces (1 punto la primera y 0,75 la segunda) y sale 0. Y Andalucía 2024 (reserva 3, ejercicio 3) pide la tangente y la normal a $\int_0^x \cos t \operatorname{sen}^2 t\,dt$ en $x = \frac{\pi}{4}$: el punto con $F(a)$ y la pendiente con $F'(a) = f(a)$.
- **El parámetro puede ir en un límite.** «Calcula a con $0 < a < 1$ tal que $\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\,dx + 2 = 0$» (Andalucía 2023, extraordinaria): $\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_a^1 = -\frac{(\ln a)^2}{2} = -2$, así que $\ln a = \pm 2$ y, como $0 < a < 1$, $a = e^{-2}$. Usa siempre la condición del enunciado para quedarte con una solución.

Primitiva
Calcula una primitiva G de f (sin $+C$) con los métodos del Tema 11.

→ **Evalúa en b y en a**
Sustituye cada límite **entre paréntesis**. Si hubo cambio de variable, vuelve a x antes o cambia también los límites.

→ **Resta**
$G(b) - G(a)$, con todos los signos. Deja el resultado exacto (e^2, $\frac{62}{3}$…) y, si quieres, su valor aproximado.

Error típico que te quita puntos

Perder un signo al restar: $\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$; sin paréntesis es fácil escribir $-\cos\pi - \cos 0 = 1 - 1 = 0$. Y aplicar Barrow donde f no es continua: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ «daría» $\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2$, negativo con una función positiva; en $x = 0$ hay una asíntota y Barrow no vale.

3 Área entre una curva y el eje OX

El área del recinto entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b |f(x)|\,dx$. En la práctica, se parte el intervalo por los puntos de corte con el eje y se suman los valores absolutos de cada trozo (los pasos, en el esquema de abajo). De las 18 apariciones del área en las 28 convocatorias, 15 son de este tipo.

- **Un solo signo (Aragón 2025, 3.2 b):** $f(x) = \cos^2 x \operatorname{sen} x \geq 0$ en $[0, \pi]$, porque $\cos^2 x \geq 0$ y $\operatorname{sen} x \geq 0$. Área $= \left[-\frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ u².
- **Todo por debajo (Asturias 2025, 3B a):** $f(x) = 4\operatorname{sen}(x - \pi) = -4\operatorname{sen} x \leq 0$ en $[0, \pi]$. $\int_0^{\pi} -4\operatorname{sen} x\,dx = \left[4\cos x\right]_0^{\pi} = -4 - 4 = -8$, así que el área es 8 u².
- **Una raíz (Galicia 2025, 3.2):** $f(x) = \sqrt{2x+1} \geq 0$ en $[0, 4]$. Con $\int (2x+1)^{1/2} dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}$: área $= \frac{1}{3}\left(9^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$ u².
- **Cambio de signo y simetría (Extremadura 2026, 2.B b):** $g(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$ corta al eje en -2, 0 y 2. $\int_{-2}^0 (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^0 = 4$ y, por ser impar, $\int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx = -4$. Área $= 4 + 4 = 8$ u². Integrar de -2 a 2 de una vez da 0.
- **Una racional por debajo (Asturias 2026, 3B b):** $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1} < 0$ en $[0, 1]$. Con la primitiva del Tema 11: $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4}$, así que el área es $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln 2}{2} \approx 1{,}224$ u².

- **Una función a trozos:** cada trozo se integra solo en su intervalo, y el área total es la suma. Con $f(x) = x^2 - 6x + 11$ si $x < 2$ y $\sqrt{5x-1}$ si $x \geq 2$ (Madrid 2025, modelo), el área entre a y b (los dos trozos son positivos) es

$$\int_a^2 (x^2 - 6x + 11)\,dx + \int_2^b \sqrt{5x-1}\,dx.$$

1 Cortes con el eje

Resuelve $f(x) = 0$ y quédate con las soluciones de dentro de $[a, b]$. Si no te dan a y b («el recinto limitado por la gráfica y el eje»), los cortes son los límites.

2 Signo en cada trozo

Un valor de prueba en cada intervalo (o la forma de la gráfica). Escríbelo: puntúa.

3 Integra cada trozo

Con Barrow. Los trozos donde $f < 0$ dan un número negativo: cámbiale el signo.

4 Suma y pon unidades

Área en u² (o en m² si hay contexto). Exacta y, si ayuda, aproximada.

El signo y las unidades puntúan

Aragón 2025 (3.2 b, 1,25 puntos): «Comprobación del signo de la función en el intervalo 0,25 puntos», «Cálculo correcto de la primitiva 0,8 puntos», «Uso correcto de la regla de Barrow 0,2 puntos» y «Si no pone las unidades, se penalizará 0,1 puntos». Castilla y León 2025 (Problema 2, área de $f(x) = 2xe^{-2x^2}$ en $[0, 2]$, que vale $\frac{1-e^{-8}}{2} \approx 0{,}4998$ u²): «Hasta 0,2 puntos por determinar el signo de la función», 0,5 por «calcular alguna primitiva» y 0,3 por «la aplicación de la regla de Barrow y el resultado».

4 Área entre dos curvas

El área entre las gráficas de f y g entre $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$: en cada trozo, **la de arriba menos la de abajo**. Da igual que las curvas estén por encima o por debajo del eje: lo que cuenta es la diferencia. Los pasos, en el esquema de abajo.

- **Dos parábolas (País Vasco 2026, Tercer ejercicio):** $y = x(2 - x)$ e $y = x(2x - 3)$ se cortan si $2x - x^2 = 2x^2 - 3x$, es decir, en $x = 0$ y $x = \frac{5}{3}$. En $x = 1$, la primera vale 1 y la segunda -1: va arriba $x(2 - x)$.

$$A = \int_0^{5/3} \left(5x - 3x^2\right) dx = \left[\tfrac{5}{2}x^2 - x^3\right]_0^{5/3} = \frac{125}{18} - \frac{125}{27} = \frac{125}{54}\ \text{u}^2.$$

  Ese examen pedía el resultado «como una fracción», y sus criterios dan 0,25 puntos por darlo «sin aproximar mediante decimales».

- **Una curva y una recta (Cataluña 2025, 4A):** la vela entre $f(x) = -x^2 + 25$, $y = 0$ y $x = 0$ se divide con la recta $y = 9$, que corta a la parábola en $x = 4$. Parte de arriba: $\int_0^4 \left(25 - x^2 - 9\right) dx = \frac{128}{3}$ u². Vela entera: $\int_0^5 (25 - x^2)\,dx = \frac{250}{3}$ u², así que la de abajo mide $\frac{250}{3} - \frac{128}{3} = \frac{122}{3}$ u². Coste: $50 \cdot \frac{128}{3} + 70 \cdot \frac{122}{3} = 4980$ €.
- **Tres curvas:** el recinto tiene «esquinas» donde cambia la curva de arriba o la de abajo; se parte por esas abscisas. Es el País Vasco 2025 (5B), resuelto más abajo.

Cortes entre las curvas

Resuelve $f(x) = g(x)$. Si el recinto lo cierran las propias curvas, esos cortes son los límites.

Quién va arriba

Un valor de prueba en cada trozo. Si son tres curvas o más, mira también dónde cambia la curva de arriba o la de abajo.

Integra arriba menos abajo

Una integral por trozo y súmalas. Simplifica antes la resta: suele quedar un polinomio sencillo.

Error típico que te quita puntos

Integrar entre el primer y el último corte sin mirar si las curvas se cruzan en medio: los trozos se restan entre sí. Y dar por hecho que la de arriba es «la de la fórmula más grande» sin un valor de prueba: entre 0 y $\frac{5}{3}$, la parábola $x(2x-3)$ tiene el coeficiente principal mayor y va por debajo.

5 Volumen de un sólido de revolución

Si la región bajo la gráfica de f entre $x = a$ y $x = b$ gira alrededor del eje OX, cada corte perpendicular al eje es un círculo de radio $|f(x)|$ y área $\pi f(x)^2$. Sumando esos círculos:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

- **Ejemplo:** al girar $y = \sqrt{x}$ entre 0 y 4 sale un paraboloide de volumen $V = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi \approx 25{,}13$ u³.
- **Comprobación con el cono:** la recta $y = \frac{r}{h}x$ entre 0 y h genera un cono de radio r y altura h: $\pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2 \, dx = \frac{\pi r^2 h}{3}$, la fórmula de siempre.
- **Entre dos curvas** ($f \geq g \geq 0$), el sólido es hueco (una «arandela»): $V = \pi \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx$, que no es $\pi \int_a^b (f-g)^2 \, dx$.
- En la tabla de las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026 no figura ningún volumen de revolución, pero está en los contenidos del tema: basta con saber la fórmula y aplicarla. Ojo: en Murcia **no entra en 2027** («No se evaluará en 2027: […] Volumen de cuerpos de revolución», acta de 16-09-2026), y las listas de la PAU de Cataluña, Canarias y Navarra (guía de 2025-26) no lo nombran (solo áreas).

Al cuadrado y en u³

Lo que se integra es $f(x)^2$, no $f(x)$: con $\pi \int_0^4 \sqrt{x} \, dx$ saldría $\frac{16\pi}{3}$, que no es el volumen. Y el resultado va en unidades cúbicas.

6 Valor medio de una función

Teorema del valor medio del cálculo integral: si f es continua en $[a, b]$, existe al menos un $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x) \, dx = f(c)\,(b-a)$. El número $f(c)$ es el **valor medio** de f en $[a, b]$: la altura del rectángulo de base $b - a$ que tiene la misma área (con signo) que la curva.

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

- **Ejemplo:** $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$: $\int_0^3 x^2 \, dx = 9$ y $\overline{f} = \frac{9}{3} = 3$. Se alcanza en $c = \sqrt{3} \approx 1{,}73$, que está en $[0, 3]$.

- **No es la media de los extremos:** $\frac{f(0)+f(3)}{2} = 4{,}5 \neq 3$. Si f es una recta coinciden siempre; con una curva, en general no.
- Navarra 2025 lo pidió en un problema con contexto (el precio medio de la luz), dando la fórmula en el enunciado: está en «Ponte a prueba». La guía de Navarra (2025-26) no lo nombra y aun así lo puso; tampoco lo nombran las listas de la PAU de Andalucía, Baleares, Canarias, Cantabria, Castilla y León, Cataluña, Galicia y el País Vasco.

7 Problemas con parámetro y con contexto

Muchos ejercicios de áreas no piden solo un número: piden un parámetro, un coste o cuántos botes de pintura comprar. La integral es la misma; cambia la última línea.

- **Un parámetro:** si el área depende de k, se calcula en función de k y se iguala al dato. Por ejemplo, el área bajo $y = kx^2$ ($k > 0$) entre 0 y 3 es $\int_0^3 kx^2\,dx = 9k$; si debe valer 18 u², $k = 2$. Galicia 2026 (3.3) lo pide con una parábola: en «Ponte a prueba».
- **El signo del parámetro importa:** si el parámetro cambia de signo, la curva pasa de un lado a otro del eje y el valor absoluto cambia de expresión. Lee si el enunciado dice que es positivo.
- **Unidades del contexto:** si los ejes van en metros, el área va en m². Los botes, personas o piezas se redondean **hacia arriba** si tienen que cubrir toda la superficie: con $21{,}52$ m² y botes de 3 m², $\frac{21{,}52}{3} \approx 7{,}17$, así que hacen falta 8 (Madrid 2025, resuelto más abajo).
- **Calculadora en radianes:** con senos y cosenos, los límites como $\frac{4\pi}{3}$ son radianes. En grados, el resultado sale mal y no se nota. Y no des la integral directamente con la calculadora: en Baleares, sin el procedimiento, «se puntuará con 0» (especificaciones 2027); Canarias lo cita como error en su acta de 30-09-2026; en Extremadura solo vale para sustituir los límites o comprobar (2025-26); y en Castilla-La Mancha, si haces un paso con ella, tienes que indicarlo (documento 2026-27).
- **Magnitudes acumuladas** (teorema fundamental): si una magnitud M tiene ritmo de cambio M', lo que cambia entre a y b es $M(b) - M(a) = \int_a^b M'(t)\,dt$. La **distancia** es la integral de la velocidad: en Asturias 2026 (extraordinaria), con $v(t) = 54 - 22t$ m/s, el primer segundo da $\int_0^1 (54 - 22t)\,dt = 43$ m. La **energía**, la de la potencia (Madrid 2026, reserva 2, pregunta 2 b: $\int_8^{20} \left(3 + 3\,\text{sen}\,\frac{\pi(t-12)}{8}\right) dt = 36 + \frac{24}{\pi} \approx 43{,}6$ kWh). Y la **población**, la de su velocidad de crecimiento más la inicial (Andalucía 2026, extraordinaria: $1000 + \int_0^{10} 20t\,e^{-t/10}\,dt = 3000 - \frac{4000}{e} \approx 1528$ peces).
- **Fórmulas que te dan:** a veces el enunciado da una fórmula que no está en el temario, como la **longitud de una curva** $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$ (Madrid, modelo de 2027). Basta con aplicarla: deriva, sustituye y calcula la integral.

El dibujo también puntúa

Galicia, País Vasco y la Comunidad Valenciana piden dibujar el recinto, y Cataluña 2026 (1.2), un esbozo de la gráfica antes de calcular el área. Los criterios generales de Canarias 2026 lo detallan: al representar una región plana, «habrá que calcular los puntos de corte entre ambas gráficas, si dichos puntos están relacionados con la región pedida. Se dará cada uno de esos puntos con sus dos coordenadas, aunque no se pida explícitamente.»

8 Ejercicio resuelto: área con un valor absoluto (Comunidad Valenciana 2025)

PAU COMUNIDAD VALENCIANA 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 4, APARTADO 4.2 (A ELEGIR ENTRE 4.1 Y 4.2; 2,5 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x-2|.$$

Se pide:

4.2.1) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f, el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$. (1 punto)

4.2.2) Calcular el área de la región anterior. (1,5 puntos)

Apartado 4.2.1)

1. **Quita el valor absoluto.** $|x-2| = x-2$ si $x \geq 2$ y $|x-2| = 2-x$ si $x < 2$. Así,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2. **Trozo $x < 2$:** parábola hacia abajo, con cortes en $x = 0$ y $x = 2$ y vértice en $(1, 1)$. En $x = -1$: $f(-1) = -1 - 2 = -3$.
3. **Trozo $x \geq 2$:** parábola hacia arriba que sale de $(2, 0)$ y sube: $f(5) = 25 - 10 = 15$.
4. **Signo:** $f < 0$ en $[-1, 0)$ y $f \geq 0$ en $[0, 5]$. La región tiene tres trozos: $[-1, 0]$ (por debajo del eje), $[0, 2]$ y $[2, 5]$ (por encima). Es la de la figura de abajo.

SOLUCIÓN La región entre f, el eje OX, $x = -1$ y $x = 5$, con cortes en $(0, 0)$ y $(2, 0)$, por debajo del eje en $[-1, 0]$ y por encima en $[0, 5]$.

Apartado 4.2.2)

1. Por la aditividad, un trozo por cada cambio de signo o de fórmula:

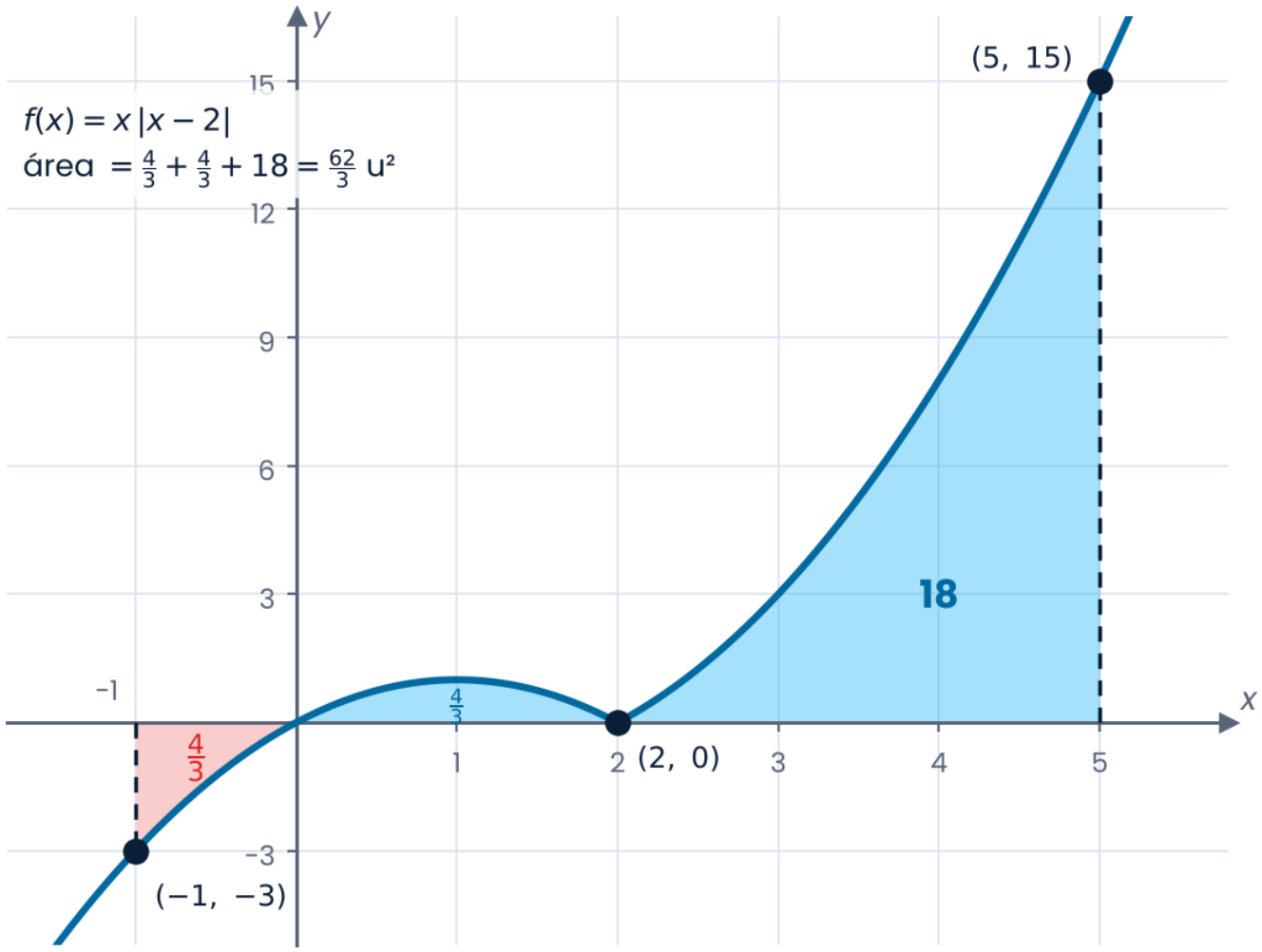
$$A = \left| \int_{-1}^{0} (-x^2 + 2x)\, dx \right| + \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x)\, dx + \int_{2}^{5} (x^2 - 2x)\, dx.$$

2. $\int_{-1}^{0} (-x^2 + 2x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = -\frac{4}{3}$. Negativa, como se esperaba: aporta $\frac{4}{3}$.
3. $\int_{0}^{2} (-x^2 + 2x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{0}^{2} = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$.
4. $\int_{2}^{5} (x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{2}^{5} = \left(\frac{125}{3} - 25 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{50}{3} + \frac{4}{3} = 18$.
5. Suma: $A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 18 = \frac{62}{3} \approx 20{,}67$ u².

SOLUCIÓN $A = \dfrac{62}{3} \approx 20{,}67$ u².

Lo que puntúa. Los criterios de la Comunidad Valenciana 2025 no reparten la puntuación por pasos: dan la gráfica y la solución («Área = 62/3 = 20.6667») y avisan: «En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado». El examen añade que los resultados «analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados»: en el dibujo, marca los cortes y los extremos de cada trozo, y en el área, escribe las tres integrales.

Error típico que te quita puntos. Integrar de una vez de -1 a 5: $-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+18=18$, porque el trozo de debajo del eje resta. Y olvidar que el valor absoluto cambia la fórmula en $x=2$.



Comunidad Valenciana 2025 (4.2): el recinto de $f(x)=x|x-2|$ entre $x=-1$ y $x=5$. En rojo, el trozo por debajo del eje ($\frac{4}{3}$ u², que en la integral resta); en azul, los dos trozos por encima ($\frac{4}{3}$ y 18 u²). Área total: $\frac{62}{3}\approx 20{,}67$ u².

9 Ejercicio resuelto: el muro de los grafiteros (Madrid 2025)

PAU MADRID 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · BLOQUE 2, PREGUNTA 2 (SIN OPTATIVIDAD; 2,5 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2$

para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0, 12]$ contenida completamente en el muro? (0,75 puntos)

b) Halle el área que tienen que pintar de cada color. (1,25 puntos)

c) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$? (0,5 puntos)

Apartado a)

1. Es de extremos (Tema 9), breve. El coseno está entre -1 y 1, así que $1 \leq f(x) \leq 3$. En $[0, 12]$, el ángulo $\frac{\pi x}{9}$ va de 0 a $\frac{4\pi}{3}$, y pasa por 0 (coseno 1, en $x = 0$) y por π (coseno -1, en $x = 9$).
2. Con derivadas: $f'(x) = -\frac{\pi}{9}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0$ en $x = 0$ y $x = 9$. Valores: $f(0) = 3$, $f(9) = 1$ y, en el extremo, $f(12) = \cos\frac{4\pi}{3} + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.
3. Como $1 \leq f(x) \leq 3$ y el muro mide 3 m de alto, la curva queda dentro (toca el borde de arriba en $x = 0$).

SOLUCIÓN Máximo 3 (en $x = 0$) y mínimo 1 (en $x = 9$). Sí, la curva está contenida en el muro.

Apartado b)

1. $f(x) \geq 1 > 0$: la curva va siempre por encima del eje, así que el área bajo la curva es directamente la integral.
2. Primitiva (inmediata compuesta: la derivada de $\frac{\pi x}{9}$ es $\frac{\pi}{9}$): $\int \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) dx = \frac{9}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right)$.
3. Barrow:

$$A_{\text{bajo}} = \int_0^{12} \left(\cos\frac{\pi x}{9} + 2\right) dx = \left[\frac{9}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{9} + 2x\right]_0^{12} = \frac{9}{\pi}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} + 24 = 24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 21{,}52\ \text{m}^2.$$

4. El muro mide $12 \cdot 3 = 36$ m², así que por encima de la curva quedan $A_{\text{encima}} = 36 - A_{\text{bajo}} = 12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 14{,}48$ m².
5. La Comunidad Valenciana puso en 2026 (Pregunta 4.2) la misma pared de 12 m por 3 m con la misma curva y botes de 3 m²: las cuentas son las mismas; allí además piden dibujar la curva con sus cortes, sus extremos absolutos y su monotonía.

SOLUCIÓN Bajo la curva, $24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 21{,}52$ m²; por encima, $12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 14{,}48$ m².

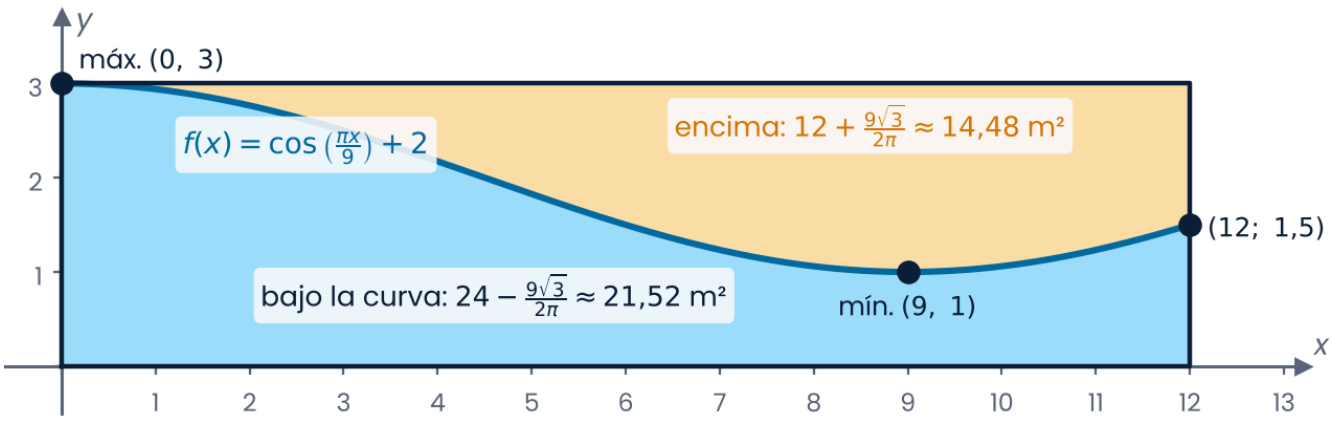
Apartado c)

1. Cada bote pinta 3 m²: $\frac{21{,}52}{3} \approx 7{,}17$ botes.
2. Con 7 botes se pintan 21 m², que no llegan: hay que redondear **hacia arriba**.

SOLUCIÓN Como mínimo, 8 botes.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Madrid 2025 (Pregunta 2). a) «Cálculo correcto de valores máximos y mínimos: 0.5 puntos. Respuesta correcta de la pregunta: 0.25 puntos.» b) «Cálculo del área de una región con una integral definida: 1 punto (planteamiento: 0.5 puntos, resolución: 0.5 puntos). Cálculo del área de la segunda región: 0.25 puntos.» c) «Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.» El planteamiento de la integral vale tanto como su resolución: escríbela con sus límites antes de calcular. Y para todo el examen: «Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión».

Error típico que te quita puntos. Calcular con la calculadora en grados: $\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ no es el seno de $4{,}19°$. Olvidar el factor $\frac{9}{\pi}$ de la primitiva. Y contestar 7 botes por redondear $7{,}17$ hacia abajo.



Madrid 2025 (Pregunta 2): el muro de 12 m × 3 m. La curva $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ baja del máximo $(0, 3)$ al mínimo $(9, 1)$ y termina en $(12;\ 1{,}5)$. En azul, el área bajo la curva, $24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 21{,}52$ m²; en naranja, la de encima, $12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 14{,}48$ m². Las dos suman los 36 m² del muro.

10 Ejercicio resuelto: área entre tres curvas (País Vasco 2025)

PAU PAÍS VASCO 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · QUINTO EJERCICIO, OPCIÓN 5B (A ELEGIR ENTRE 5A Y 5B; 2,5 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Se consideran las curvas de ecuaciones $y = (x-1)^2$, $y = (x+1)^2$ e $y = 7 - 3x$.

a) Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas. (1,25 puntos)

b) Calcula el área del recinto del apartado anterior. (1,25 puntos)

Apartado a)

1. **Las curvas:** dos parábolas hacia arriba, con vértices en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, y una recta decreciente de pendiente -3 que corta al eje OX en $x = \frac{7}{3}$.
2. **Cortes de dos en dos.** Parábolas: $(x-1)^2 = (x+1)^2 \iff -2x = 2x \iff x = 0$, punto $(0, 1)$.
3. $(x+1)^2 = 7 - 3x \iff x^2 + 5x - 6 = 0 \iff x = 1$ o $x = -6$. En el primer cuadrante, $x = 1$: punto $(1, 4)$.
4. $(x-1)^2 = 7 - 3x \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff x = 2$ o $x = -3$. En el primer cuadrante, $x = 2$: punto $(2, 1)$.
5. **El recinto** es un «triángulo curvo» de vértices $(0, 1)$, $(1, 4)$ y $(2, 1)$: por arriba, $y = (x+1)^2$ entre 0 y 1, y la recta entre 1 y 2; por abajo, $y = (x-1)^2$ entre 0 y 2 (figura de abajo).

SOLUCIÓN El recinto de vértices $(0,1)$, $(1,4)$ y $(2,1)$ de la figura.

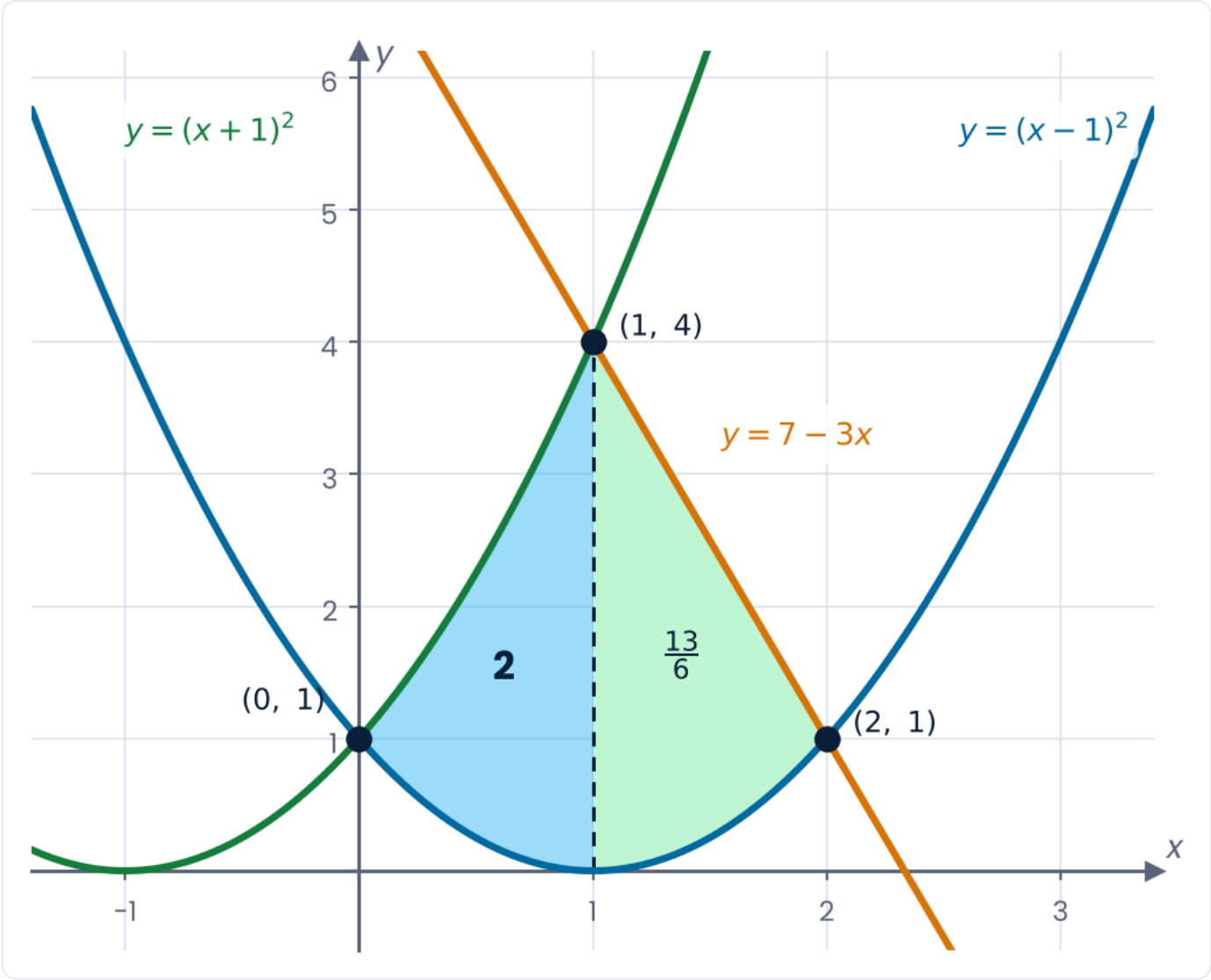
Apartado b)

1. La curva de arriba cambia en $x=1$: hay que partir en dos integrales, cada una arriba menos abajo.
2. $A_1 = \int_0^1 \left[(x+1)^2 - (x-1)^2\right] dx = \int_0^1 4x\, dx = \Big[2x^2\Big]_0^1 = 2$.
3. $A_2 = \int_1^2 \left[(7-3x) - (x-1)^2\right] dx = \int_1^2 (-x^2 - x + 6)\, dx = \Big[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\Big]_1^2 = \frac{22}{3} - \frac{31}{6} = \frac{13}{6}$.
4. $A = A_1 + A_2 = 2 + \frac{13}{6} = \frac{25}{6} \approx 4{,}17$ u².

SOLUCIÓN $A = \dfrac{25}{6}$ u² $\approx 4{,}17$ u².

Lo que puntúa. Criterios de País Vasco 2025 (5B). a) «Cálculo de los puntos de corte de las curvas (0,75 puntos)» y «Dibujo adecuado del recinto pedido (0,5 puntos)». b) «Descomposición de la integral definida en dos sumandos, teniendo en cuenta las curvas que determinan cada parte del recinto (0,5 puntos)» y «Cálculo de la primitiva y aplicación de la regla de Barrow (0,75 puntos)». Los cortes valen más que el dibujo: escribe las tres ecuaciones y descarta las soluciones fuera del primer cuadrante. El solucionario oficial da $\frac{25}{6}$ u².

Error típico que te quita puntos. Hacer una sola integral de 0 a 2 con la recta arriba: $\int_0^2 \left[(7-3x) - (x-1)^2\right] dx = \frac{22}{3}$, que incluye un trozo que no es del recinto (entre 0 y 1, la recta va por encima de $(x+1)^2$).



País Vasco 2025 (5B): el recinto entre tres curvas. Vértices $(0,1)$, $(1,4)$ y $(2,1)$. La línea discontinua en $x = 1$ marca dónde cambia la curva de arriba: a la izquierda, $(x+1)^2$ (área 2); a la derecha, la recta $y = 7 - 3x$ (área $\frac{13}{6}$). Por abajo, siempre $(x-1)^2$. Total: $\frac{25}{6}$ u².

COMPARATIVA FINAL

Integral definida: qué plantear según lo que te piden

Te piden…	Planteas	Ojo con…	Lo que cambia en tu comunidad
El valor de $\int_a^b f$	Barrow: $G(b) - G(a)$	Paréntesis al restar; sin C	Igual en todas; Baleares: hecha con calculadora, sin el procedimiento, vale 0
Su signo, sin calcularla	El signo de f en $[a, b]$	$a < b$; si f cambia de signo, no basta	Modelos de Aragón, Baleares y Murcia (2026) y Galicia (2027)
Área entre la curva y el eje OX	$\int \lvert f \rvert$: cortes con el eje y suma de valores absolutos	Un área negativa o cero es un error	Canarias: dibujar la región con los cortes y sus dos coordenadas
Área entre dos curvas	$\int (\text{arriba} - \text{abajo})$ entre los cortes	Si se cruzan en medio, parte	Extremadura, La Rioja y País Vasco ponen un área (con el eje o entre curvas) en todas sus convocatorias de 2025-2026
Volumen al girar alrededor de OX	$\pi \int_a^b f(x)^2\, dx$	Al cuadrado; en u³	Murcia: no entra en 2027; Andalucía y Castilla-La Mancha sí; las guías de Canarias, Cataluña y Navarra no lo nombran

Te piden…	Planteas	Ojo con…	Lo que cambia en tu comunidad
Valor medio de f	$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$	Divide entre $b-a$, la longitud del intervalo	Castilla-La Mancha 2026 y Navarra 2025; no lo nombran las listas de Baleares, Canarias, Cantabria, Castilla y León, Cataluña, Galicia ni País Vasco
Derivada o límite de $\int_a^x f(t)\,dt$	Teorema fundamental: $F' = f$	Con $\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$, la derivada es $f(g(x))\,g'(x)$	Las listas de Andalucía, Cantabria, Castilla y León, Galicia y País Vasco no lo nombran; Aragón (2026) y Andalucía (2023-2024) lo han puesto
Distancia, energía, población	$\int_a^b M'(t)\,dt$ (más el valor inicial)	Las unidades del contexto	Andalucía, Asturias y Madrid (2026)

Lo que cambia en cada comunidad sale de su documento oficial de 2026-27 (o de 2025-26 si aún no hay otro): está en la página de tu comunidad, en «Qué entra en Matemáticas II». Que una lista no nombre el teorema fundamental o el valor medio no quiere decir que no puedas usarlos.

Errores que te quitan puntos

Lo que más se confunde en este tema, y cómo decirlo bien.

✗ «Para saber si $\int_1^2 x\,e^x\,dx$ es positiva tengo que calcularla».

✓ Basta con el signo del integrando: si $f > 0$ en $[a, b]$ y $a < b$, la integral es positiva. Aquí $x\,e^x > 0$ en $[1, 2]$. Es el apartado b) de los modelos de 2026 de Aragón, Baleares y Murcia y el 3.3.2 del de 2027 de Galicia, que piden razonarlo «sin calcular la integral».

Apartado 1: Integral definida: qué es y sus propiedades

✗ «$F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$ no se puede escribir, así que no puedo calcular $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3}$».

✓ No hace falta escribirla: el **teorema fundamental** da $F'(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ y $F(0) = 0$. Es $\left[\frac{0}{0}\right]$ y, por L'Hôpital, el límite es $\lim \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}$. Aragón 2026 (extraordinaria) lo pide en dos pasos: primero «¿cuál es la derivada de $F(x)$?» y después el límite, por 1,2 puntos (0,7 por aplicar bien L'Hôpital una vez).

Apartado 2: Teorema fundamental del cálculo y regla de Barrow

✗ «$e \approx 2{,}7$, así que $\frac{4000}{e} \approx 1481$ y la población a los 10 años es $3000 - 1481 = 1519$ peces».

✓ Redondear al principio arrastra el error: con $e \approx 2{,}7$ salen unos 1519, cuando $3000 - \frac{4000}{e} \approx 1528{,}48$, unos **1528** peces (Andalucía 2026, extraordinaria, ejercicio 1). Opera en forma exacta y aproxima solo al final. Los criterios de Canarias para 2026-27 lo piden así: «Los cálculos intermedios hay que hacerlos siempre en forma exacta», porque si no el resultado final «suele estar muy alejado del resultado correcto», y exigen «utilizar correctamente los signos de igualdad y de aproximación».

Apartado 2: Teorema fundamental del cálculo y regla de Barrow

✗ «Área bajo $\ln x$ hasta $x = e$: $\int_0^e \ln x\,dx$».

✓ $\ln x$ no existe en 0, y la región que piden la cierra el eje: $\ln x$ lo corta en $x = 1$. La «región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$» (Madrid 2026, ordinaria, 5.1) va de 1 a e: $\int_1^e \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_1^e = 1$ u². Busca siempre los cortes con el eje antes de poner los límites.

Apartado 3: Área entre una curva y el eje OX

✗ «Con f a trozos, integro la primera fórmula en todo el intervalo».

✓ Cada fórmula vale solo en su trozo: parte la integral en el punto de unión ($\int_a^c + \int_c^b$) y usa en cada parte la expresión que toca. Así se hacen el área de Madrid 2025 (modelo, 2.1 c) y la de Cataluña 2026 (ordinaria, 1.2), con tres trozos ($5e^{2x}$, $(x-2)^2+1$ y 1).

Apartado 3: Área entre una curva y el eje OX

✗ «Área entre $y = x^2$ e $y = |x|$: $\int_{-1}^{1}(x - x^2)\,dx$».

✓ Para $x < 0$, $|x| = -x$, no x: esa integral da $-\frac{2}{3}$ porque usa $|x| = x$ también a la izquierda del 0. Las dos funciones son **pares**, así que el área es $2\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{3}$ u². Es el apartado a) de los modelos de 2026 de Aragón, Baleares y Murcia; el de Galicia 2027 lo pone con $-x^2 + 2$ e $|x|$ ($\frac{7}{3}$ u²).

Apartado 4: Área entre dos curvas

✗ «$\int_0^2 (ax^2 - 2ax)\,dx = 10$, así que $a = -\frac{15}{2}$».

✓ Con $a > 0$, $ax(x-2)$ es **negativa** en $(0, 2)$: el área es $-\int_0^2 (ax^2 - 2ax)\,dx = \frac{4a}{3}$, y $\frac{4a}{3} = 10$ da $a = \frac{15}{2}$. El enunciado (Galicia 2026, ordinaria, 3.3) dice que a es positivo: si te sale negativo, has olvidado el valor absoluto. Y pide «un dibujo de la región».

Apartado 7: Problemas con parámetro y con contexto

✗ «Distancia del primer segundo: $v(1) \cdot 1 = 32$ m».

✓ Eso sería si la velocidad fuera constante. Si cambia, la distancia es la **integral de la velocidad**: $\int_0^1 (54 - 22t)\,dt = 43$ m. Asturias 2026 (extraordinaria, 3A) lo pide así: «Utiliza una integral definida para calcular la distancia», y luego que resuelvas $54t - 11t^2 = 20{,}06$ para el tiempo.

Apartado 7: Problemas con parámetro y con contexto

Conceptos clave

Integral definida

El número $\int_a^b f(x)\,dx$: el límite de las sumas de Riemann; el área con signo entre la gráfica de f y el eje OX en $[a, b]$.

Suma de Riemann

La suma de áreas de rectángulos $\sum f(x_i)\,\Delta x$ que aproxima la integral cuando los rectángulos se hacen muy estrechos.

Función integral

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$: el área con signo desde a hasta x, como función de x.

Teorema fundamental del cálculo

Si f es continua, la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y $F'(x) = f(x)$.

Regla de Barrow

$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$, con G cualquier primitiva de f y f continua en $[a, b]$.

Área de un recinto

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ (curva y eje) o $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ (dos curvas). Siempre positiva; se expresa en u².

Recinto plano

La región del plano limitada por una o varias curvas y rectas. Sus «esquinas» son los puntos de corte.

Sólido de revolución

El que se obtiene al girar una región plana alrededor de un eje. Alrededor de OX: $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$.

Valor medio de una función

$\overline{f} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$: la altura del rectángulo con la misma área.

Teorema del valor medio integral

Si f es continua en $[a, b]$, hay un $c \in [a, b]$ con $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b - a)$.

Primitiva no elemental

La que existe pero no se puede escribir con las funciones conocidas, como la de $\operatorname{sen}(x^2)$ o e^{x^2}. Se trabaja con ella mediante el teorema fundamental: $F'(x) = f(x)$, si f es continua.

Magnitud acumulada

Lo que cambia una magnitud entre a y b cuando se conoce su ritmo: $M(b) - M(a) = \int_a^b M'(t)\,dt$. La distancia es la integral de la velocidad.

Monotonía de la integral

Si $f \leq g$ en $[a, b]$, $\int_a^b f \leq \int_a^b g$; en particular, si $f \geq 0$, $\int_a^b f \geq 0$. Sirve para dar el signo sin calcular.

Unidades cuadradas (u²)

La unidad de un área cuando los ejes no tienen unidades; si los ejes van en metros, m². Un volumen va en u³.

MODO PAU

Nueve reglas que valen puntos

Signo primero

Cortes con el eje (o entre curvas) y signo en cada trozo, escrito.

Partir

Un trozo por cada cambio de signo o de curva de arriba; nunca de una vez.

Barrow

$G(b) - G(a)$ con paréntesis y sin $+C$.

Arriba menos abajo

Entre dos curvas, la de arriba menos la de abajo, con un valor de prueba.

Unidades

u² (o m²): en Aragón 2025, no ponerlas resta 0,1 puntos.

Exacto

Deja la fracción o la expresión exacta ($\frac{125}{54}$, e^2); el decimal, aparte.

Dibujo

Puntos de corte con sus dos coordenadas y el recinto sombreado.

Función integral

$F(x) = \int_a^x f$, con f continua: $F(a) = 0$ y $F' = f$. Con eso salen límites y tangentes.

Acumulado

Distancia, energía o población: la integral del ritmo de cambio.

Cómo te lo pueden preguntar

- Calcula el área del recinto limitado por una curva y el eje OX (con o sin rectas verticales): de las 18 apariciones del área en las 17 convocatorias (de 28) en que salió, 15 son de este tipo.
- Calcula el área entre dos o tres curvas (3 de las 18: Cataluña 2025, País Vasco 2025 y País Vasco 2026).
- Dibuja el recinto y calcula su área.
- Calcula una integral definida con la regla de Barrow (por partes, por cambio de variable o con un parámetro).
- Halla el valor de un parámetro para que el área (o la integral) valga un número dado.
- Resuelve un problema con contexto: un muro, una vela o una pared que hay que pintar (m², coste, botes).
- Calcula el valor medio de una función en un intervalo.
- Calcula el volumen de un sólido de revolución (está en los contenidos, aunque no ha salido en las 28; en Murcia no entra en 2027).

No lo confundas

- La **integral definida** (un número con signo) con el **área** (siempre positiva).
- La **integral indefinida** (una función, con $+C$) con la **definida** (un número, sin C).
- $G(b) - G(a)$ con $G(a) - G(b)$: el límite de arriba va primero.
- Los **cortes con el eje** (límites del área) con los **extremos** de la función (donde $f' = 0$).
- El **valor medio** de la función, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$, con la media de los extremos, $\frac{f(a)+f(b)}{2}$.
- $\pi \int_a^b f(x)^2\,dx$ (volumen) con $\int_a^b f(x)\,dx$ (área) o con $\pi \int_a^b (f-g)^2\,dx$.

Ponte a prueba

PAU Madrid 2026, Pregunta 5.1 (a elegir entre 5.1 y 5.2; 2 puntos). Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

Solución: $\ln x$ está definida en $(0, +\infty)$ y corta al eje en $x = 1$: los límites son 1 y e, y en $[1, e]$, $\ln x \geq 0$. Por partes ($u = \ln x$, $dv = dx$): $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$. Barrow: $\Big[x \ln x - x\Big]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1$. Área $= 1$ u². Los criterios dan 0,4 por los límites de integración, 0,3 por plantear la integral, 0,7 por las partes, 0,4 por Barrow y 0,2 por la respuesta.

PAU Galicia 2026, Pregunta 3, apartado 3.3 (la Pregunta 3 vale 4 puntos y se responden dos de sus tres apartados). Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo a para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

Solución: $f(x) = ax(x - 2)$ corta al eje en $x = 0$ y $x = 2$. Con $a > 0$ es una parábola hacia arriba, con vértice en $(1, -a)$, así que en $[0, 2]$ va por debajo del eje. $\int_0^2 (ax^2 - 2ax)\, dx = a\left(\frac{8}{3} - 4\right) = -\frac{4a}{3}$, y el área es $\frac{4a}{3} = 10$: $a = \frac{15}{2} = 7{,}5$. El dibujo: la parábola por $(0, 0)$ y $(2, 0)$ con vértice $(1;\ -7{,}5)$, y sombreada la región entre ella y el eje.

PAU Navarra 2025, P2 (bloque P, a elegir entre P1 y P2; 2,5 puntos). Siendo $p(t) = 0{,}15 + \operatorname{sin}^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ el precio del kilowatio/hora de la luz doméstica entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$: (a) Calcula los instantes en los que el precio ha sido máximo y en los que ha sido mínimo. (1,25 puntos) (b) Calcula el precio medio $\overline{p}$ de la luz entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$, sabiendo que el valor medio de una función continua f en el intervalo $[a, b]$ $(a < b)$ es: (1,25 puntos)

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Observación: Recuerda la necesidad de trabajar en radianes.

Solución: (sin es el seno, sen.) (a) Es del Tema 9. Con $u = \frac{\pi t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $p'(t) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} u \,(3\cos^2 u - 1)$, que se anula en $t = 0$ y donde $\cos u = \frac{1}{\sqrt{3}}$, es decir, $t = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}608$. Máximo en $t \approx 0{,}608$ ($p = 0{,}15 + \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}535$) y mínimo en $t = 0$ y $t = 1$ ($p = 0{,}15$). (b) Con $\int \operatorname{sen}^2 u \cos u \, du = \frac{\operatorname{sen}^3 u}{3}$ y $dt = \frac{2}{\pi}\, du$: $\overline{p} = \int_0^1 p(t)\, dt = 0{,}15 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}15 + \frac{2}{3\pi} \approx 0{,}362$.

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (Matemáticas II)
2. Examen PAU Matemáticas II Comunidad Valenciana 2025 (ordinaria)
3. Criterios de corrección PAU Matemáticas II Comunidad Valenciana 2025 (ordinaria)
4. Examen PAU Matemáticas II Madrid 2025 (ordinaria), con criterios específicos de corrección
5. Examen PAU Matemáticas II Comunidad Valenciana 2026 (ordinaria)
6. Examen PAU Matemáticas II País Vasco 2025 (ordinaria)
7. Criterios de corrección y solucionario PAU Matemáticas II País Vasco 2025 (ordinaria)
8. Examen PAU Matemáticas II País Vasco 2026 (ordinaria)
9. Criterios de corrección PAU Matemáticas II País Vasco 2026 (ordinaria)
10. Examen PAU Matemáticas II Madrid 2026 (ordinaria), con criterios específicos de corrección
11. Examen PAU Matemáticas II Galicia 2026 (ordinaria)

12. Examen PAU Matemáticas II Galicia 2025 (ordinaria)
13. Examen PAU Matemáticas II Navarra 2025 (ordinaria)
14. Examen PAU Matemáticas II Aragón 2025 (ordinaria), con criterios específicos de corrección
15. Examen PAU Matemáticas II Aragón 2026 (ordinaria), con criterios específicos de corrección
16. Examen PAU Matemáticas II Asturias 2025 (ordinaria), con criterios específicos de corrección y soluciones
17. Examen PAU Matemáticas II Asturias 2026 (ordinaria), con criterios específicos de corrección y soluciones
18. Examen PAU Matemáticas II Extremadura 2026 (ordinaria)
19. Examen PAU Matemáticas II Castilla y León 2025 (ordinaria)
20. Criterios de corrección PAU Matemáticas II Castilla y León 2025 (ordinaria)
21. Examen PAU Matemáticas II Cataluña 2025 (ordinaria)
22. Examen PAU Matemáticas II Cataluña 2026 (ordinaria)
23. Examen PAU Matemáticas II Canarias 2026 (ordinaria), con criterios y soluciones
24. Matemáticas II, Aragón 2026 (modelo): examen (Universidad de Zaragoza – Comisión Organizadora de la PAU de Aragón)
25. Matemáticas II, Baleares 2026 (modelo): examen (Universitat de les Illes Balears)
26. Matemáticas II, Murcia 2026 (modelo): examen (Universidad de Murcia)
27. Matemáticas II, Galicia 2027 (modelo): examen (CiUG)
28. Matemáticas II, Aragón 2026 (extraordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Zaragoza – Comisión Organizadora de la PAU de Aragón)
29. Matemáticas II, Andalucía 2023: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
30. Matemáticas II, Andalucía 2024: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
31. Matemáticas II, Madrid 2025 (modelo): examen y criterios de corrección (Universidad Carlos III de Madrid)
32. Matemáticas II, Asturias 2026 (extraordinaria): examen (Universidad de Oviedo)
33. Matemáticas II, Asturias 2026 (extraordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Oviedo)
34. Matemáticas II, Madrid 2026 (reserva 2): examen y criterios de corrección (Universidad Complutense de Madrid)
35. Matemáticas II, Andalucía 2026: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
36. Matemáticas II, Madrid 2027 (modelo): examen y criterios de corrección (Universidad Complutense de Madrid)
37. Matemáticas II, Cataluña 2026 (ordinaria): criterios de corrección (Generalitat de Catalunya (Dept. de Recerca i Universitats) / Oficina d'Accés a la Universitat)
38. Matemáticas II, Galicia 2026 (ordinaria): criterios de corrección (CiUG)
39. Matemáticas II, Asturias 2026 (ordinaria): examen (Universidad de Oviedo)
40. Matemáticas II, Castilla-La Mancha 2026 (extraordinaria): examen (Universidad de Castilla-La Mancha)
41. Matemáticas II, Castilla-La Mancha 2026 (extraordinaria): criterios de corrección (Universidad de Castilla-La Mancha)
42. Criterios de calificación de Matemáticas II, curso 2026-2027 (PAU Canarias)
43. Matemàtiques II · Especificacions dels criteris de correcció 2027 (UIB, 13-10-2026; en catalán)
44. Acta de la reunión de coordinación de Matemáticas II para PAU2027 (Universidad de Murcia, 16-09-2026)
45. Guía de contenidos evaluables de Matemáticas II, PAU 2027 (Subcomisión de Matemáticas II, PAU Canarias)
46. Directrices y orientaciones generales. Curso 2026-2027. Matemáticas II (Distrito Único Andaluz)
47. Matemáticas: estructura del examen y saberes de la materia (Generalitat de Catalunya, versión en castellano)
48. Matemáticas II, Navarra: guía de la asignatura, estructura y criterios generales (UPNA, curso 2025-26)
49. Real Decreto 534/2024, de 11 de junio, requisitos de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado y características básicas de la prueba de acceso (BOE, texto consolidado)

Imágenes: Integral y área: Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · Recinto (C. Valenciana 2025): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · El muro (Madrid 2025): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · Recinto entre tres curvas (País Vasco 2025): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta.

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 9 de noviembre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.