

Determinantes

Más temas y apuntes en farmeandopau.com

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

El **determinante** es un número que se asocia a cada matriz cuadrada, y su gran utilidad es esta: **una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante no es cero**. En la PAU te piden sobre todo **estudiar, según un parámetro, si una matriz tiene inversa o qué rango tiene** (salió en 10 de las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en 8 comunidades), **calcular la inversa por adjuntos** y **usar las propiedades** para calcular un determinante sin desarrollarlo.

1 Determinantes de orden 2 y 3

A cada matriz cuadrada A se le asocia un número, su **determinante**, que se escribe $|A|$ o $\det(A)$. Solo existe para matrices **cuadradas**, y las barras **no** son un valor absoluto: un determinante puede ser negativo.

- **Orden 2:** el producto de la diagonal principal menos el de la diagonal secundaria.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 14.$$

- **Orden 3 (regla de Sarrus):** seis productos de tres elementos. **Suman** la diagonal principal y los dos «triángulos» que tienen un lado paralelo a ella; **restan** la otra diagonal y sus dos triángulos.

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 0 - [0 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 4] = 0 - 24 = -24$$

- La regla de Sarrus **solo vale para orden 3**. Para cualquier orden (también 3) sirve el desarrollo por adjuntos de la sección siguiente.

Error típico que te quita puntos

Los signos en Sarrus. Los tres productos que restan se restan **enteros**: si un producto ya es negativo, al restarlo suma. Escribe primero el corchete con los tres productos y después quítalo, como en el ejemplo.

2 Desarrollo por los adjuntos de una fila o columna

El **menor complementario** α_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante que queda al **tachar su fila i y su columna j** (no lo confundas con la letra α de algunos enunciados). El **adjunto** es ese menor con un signo: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$.

- El signo $(-1)^{i+j}$ sigue un **tablero de ajedrez** que empieza con +:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

- **Desarrollo:** el determinante es la suma de los elementos de **una fila (o columna) cualquiera** multiplicados por sus adjuntos. Por la primera fila:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Con la matriz de la sección anterior, por la primera fila (tiene un cero, así que su adjunto no hace falta):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 = 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 10 = -24.$$

Sale lo mismo que por Sarrus, como tiene que ser.

- Vale para **cualquier orden**: un determinante de orden 4 se desarrolla en determinantes de orden 3, y así sucesivamente.

Elige la línea

La fila o columna con **más ceros** (o la que lleva el parámetro, para que salga directo).

Haz ceros si hace falta

Sumar a una fila un múltiplo de otra **no cambia** el determinante. Por

ejemplo, en $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, con $F_2 - 2F_1$ y $F_3 + F_1$ la primera columna queda $(1, 0, 0)$.

Desarrolla por esa línea

Solo queda un adjunto: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2.$

Menor no es lo mismo que adjunto

El adjunto lleva el signo del tablero: en las posiciones con $-$, $A_{ij} = -a_{ij}$. Olvidarlo es uno de los fallos más frecuentes al desarrollar y al calcular la inversa.

3 Propiedades de los determinantes: filas y columnas

Estas propiedades permiten **calcular sin desarrollar** y, sobre todo, calcular determinantes **sin conocer todos los números**, como en el ejercicio de Andalucía 2026. Todo lo que se dice de filas vale también para columnas, porque $|A^t| = |A|$.

Busca las filas conocidas

Con las propiedades de la tabla de abajo: escribe cada fila del determinante nuevo con las filas F_1, F_2, F_3 de la matriz que conoces (por ejemplo, $(8 \ 4\alpha \ 4\beta) = 4F_2$).

Saca los números

Los factores que multiplican a una fila entera salen fuera, multiplicando.

Suma filas

Para quitar lo que sobra ($F_1 - F_2$ más F_2 es F_1), sin que cambie el determinante.

Ordena contando signos

Un cambio de signo por cada intercambio, hasta tener F_1, F_2, F_3 en su orden: el determinante de partida.

Si en la matriz...	... el determinante	Ejemplo
Se traspone	No cambia: $ A^t = A $	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

Si en la matriz...	... el determinante	Ejemplo
Hay una fila de ceros	Vale 0	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$
Hay dos filas iguales o proporcionales	Vale 0	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$
Una fila es combinación lineal de las otras	Vale 0 (y, al revés, si vale 0, alguna fila es combinación lineal de las demás)	$F_3 = F_1 + F_2 \Rightarrow A = 0$
Se intercambian dos filas	Cambia de signo	$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
Se multiplica una fila por k	Queda multiplicado por k (el factor sale fuera)	$\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -10$
A una fila se le suma un múltiplo de otra	No cambia	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 - 2 \cdot 1 & 4 - 2 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$
Una fila es suma de dos	Se descompone en suma de dos determinantes	$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$
Es triangular (o diagonal)	Es el producto de la diagonal principal	$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6$

En cualquier orden, cada intercambio de filas cambia el signo: con dos intercambios, el signo vuelve a ser el de partida.

Lo que puntúa: nombrar la propiedad

En Andalucía 2026 los criterios específicos del ejercicio de propiedades daban «Hasta 1,25 puntos por aplicar correctamente las propiedades de los determinantes que se utilicen» (de 1,5). Al lado de cada igualdad, escribe qué propiedad usas.

4 Determinante del producto, de la inversa y de kA

Cuando en el enunciado aparecen productos, potencias, inversas o una matriz multiplicada por un número, el determinante se separa con estas propiedades (A y B cuadradas del mismo orden n).

- **Producto:** $|AB| = |A| \cdot |B|$. Por eso $|A^n| = |A|^n$, y $|AB| = |BA|$ aunque AB y BA sean distintas.
- **Inversa:** $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, porque $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I| = 1$.
- **Por un número:** $|kA| = k^n |A|$, porque el k multiplica a las n filas. En orden 3: $|2A| = 2^3 |A| = 8|A|$ y $|-A| = (-1)^3 |A| = -|A|$.
- **Suma:** no hay propiedad. En general, $|A + B| \neq |A| + |B|$.

Si A es de orden 3 y $ A = 3...$	Determinante
$ A^t $	3
$ A^{-1} $	$\frac{1}{3}$
$ 2A $	$2^3 \cdot 3 = 24$
$ -A $	$(-1)^3 \cdot 3 = -3$
$ A^3 $	$3^3 = 27$
$ A A^t $	$3 \cdot 3 = 9$

Si no conoces la matriz, toma determinantes

De una igualdad entre matrices sale una igualdad entre números. Si B es de orden 3 y $B^2 = 2I$: $|B|^2 = |2I| = 2^3 = 8$, así que $|B| = \pm 2\sqrt{2}$ (Asturias 2026). Si $AA^t = I$: $|A|^2 = 1$ y $|A| = \pm 1$.

5 La matriz inversa por adjuntos

Una matriz cuadrada A tiene inversa (es **regular**) si y solo si $|A| \neq 0$. Si $|A| = 0$, es **singular** y no tiene inversa. Cuando existe,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)^t$$

(o, lo que es lo mismo, $\frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t)$), donde $\text{Adj } A$ es la **matriz adjunta**: la que tiene en cada posición el adjunto A_{ij} de ese elemento.

- Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene $|A| = 3 \neq 0$. Sus adjuntos dan $\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (por ejemplo, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$), y

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- En una 2×2 la fórmula da el atajo del Tema 1: $\text{Adj} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ y, trasponiendo, $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- La inversa por Gauss-Jordan (Tema 1) da la **misma matriz**. Si el enunciado no impone un método, vale cualquiera de los dos (la solución oficial de Asturias 2025, por ejemplo, la calcula por Gauss-Jordan). Por adjuntos es más cómodo cuando hay un parámetro.

Justifica que existe

Calcula $|A|$ y escribe que es distinto de cero.



Calcula los adjuntos

Los nueve, en una 3×3 , cada uno con el signo del tablero.



Traspón la adjunta

Las filas de $\text{Adj } A$ pasan a ser columnas.



Divide entre $|A|$

Cada elemento, o deja el factor $\frac{1}{|A|}$ delante.



Comprueba

$A \cdot A^{-1} = I$: al menos una fila por una columna.

Errores típicos que te quitan puntos

No trasponer la adjunta: $\frac{1}{|A|} \text{Adj } A$ en general **no** es la inversa (en el ejemplo, no lo es). Olvidar el tablero de signos. Y usar la fórmula sin haber justificado antes que $|A| \neq 0$.

6 El rango por menores

Un **menor de orden k** de una matriz es el determinante de la submatriz que forman k de sus filas y k de sus columnas. El **rango** de una matriz es el **orden del mayor menor distinto de cero**, y coincide con el que da el método de Gauss del Tema 1.

- Ejemplo: en $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = 0$ (la fila 2 es el doble de la 1), y el menor de las filas 1 y 3 y las columnas 1 y 2 es $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Por tanto, $\text{rg } A = 2$.
- Menores orlados** (muy útiles en las matrices de 3×4 del Tema 3): se parte de un menor de orden 2 no nulo y se le añade («orla») una fila y una columna más. En una matriz de 3 filas, si **todos** los orlados de orden 3 valen cero, el rango es 2, y si alguno no es cero, es 3. En una 3×4 basta con mirar dos orlados, no los cuatro menores de orden 3.

Mira el mayor menor

En una 3×3 : si $|A| \neq 0$, $\text{rg } A = 3$.

Si es cero, baja de orden

Si $|A| = 0$, el rango es menor que 3.

→ Basta **un** menor de orden 2 distinto de cero para que $\text{rg } A = 2$.

Y si todos se anulan, sigue bajando

→ Si todos los menores de orden 2 son cero y la matriz no es nula, $\text{rg } A = 1$.

Justifica siempre el rango

Criterios de calificación de Canarias 2025 (criterio H): «Los rangos de las matrices hay que justificarlos (puede hacerse por la técnica de menores orlados o reduciendo la matriz a una escalonada por filas equivalentes)». Escribe qué menor usas y cuánto vale.

7 Matrices con un parámetro: cuándo tienen inversa y qué rango tienen

Es el tipo de ejercicio del tema que más aparece: **la inversa o el rango de una matriz según un parámetro**, en 10 de las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026 (8 comunidades). Las **propiedades de los determinantes** ($|AB|$, $|A^{-1}|$, $|kA|$...) salen en 4 convocatorias de 3 comunidades.

- A veces el determinante **no depende del parámetro**: en Asturias 2025, $|B| = 1$ para todo x , así que B tiene inversa para cualquier valor real de x . Si el determinante no se anula nunca, no hay valores críticos.

Calcula $|A|$ con el parámetro

Por Sarrus o desarrollando por la línea del parámetro. Simplifica y **factoriza**.

Iguala a cero

Las soluciones de $|A| = 0$ son los **valores críticos**: los únicos en los que no hay inversa.

Fuera de ellos

$|A| \neq 0$: hay inversa y el rango es el máximo.

En cada valor crítico

Sustitúyelo en la matriz y busca un menor de orden inferior no nulo para dar el rango; si todos los de ese orden se anulan, baja otro orden (como en la tabla, con $m = 1$).

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$	$ A = (m - 1)^2$	¿Inversa?	Rango
$m \neq 1$	$ A \neq 0$	Sí	3
$m = 1$	$ A = 0$	No	1 (las tres filas son iguales: todos los menores de orden 2 valen 0)

Cada valor crítico se estudia aparte: aquí el rango no baja a 2, sino a 1. Conclusión, con todas las letras y para **todos** los valores: « A tiene inversa si y solo si $m \neq 1$ »; «si $m \neq 1$, $\text{rg } A = 3$; si $m = 1$, $\text{rg } A = 1$ ».

Error típico que te quita puntos

Dar solo el caso general y olvidar los valores críticos, o dar en ellos el rango «a ojo», sin un menor que lo justifique. Y simplificar dividiendo entre una expresión que puede valer cero, como $m - 1$: se pierde justo el valor que hay que estudiar.

8 Ejercicio resuelto: propiedades de los determinantes (Andalucía 2026)

PAU ANDALUCÍA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 3.2 (BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1; 2,5 PUNTOS)

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$$

que cumple $|A| = -2$.

a) Calcula $\begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix}$ (1,5 puntos)

b) Calcula $|A^{-1}(A^t)^2 A|$ (1 punto)

Apartado a)

1. Con una sola ecuación, $|A| = -2$, no se pueden despejar α y β . La idea: llamar $F_1 = (\alpha \ \beta \ 1)$, $F_2 = (2 \ \alpha \ \beta)$ y $F_3 = (3 \ 4 \ \alpha)$ a las filas de A y buscarlas dentro del determinante pedido, D .
2. Fila 1: $(-3 \ -4 \ -\alpha) = -F_3$. Fila 3: $(8 \ 4\alpha \ 4\beta) = 4F_2$. Fila 2: $(\alpha - 2 \ \beta - \alpha \ 1 - \beta) = F_1 - F_2$.
3. El -1 y el 4 multiplican a filas enteras, así que salen fuera:

$$D = \begin{vmatrix} -F_3 \\ F_1 - F_2 \\ 4F_2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 - F_2 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

4. A la 2.ª fila le sumamos la 3.ª (no cambia el determinante):

$$-4 \begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 - F_2 \\ F_2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

5. Dos intercambios (filas 1.ª y 2.ª, y luego 2.ª y 3.ª); cada uno cambia el signo y los dos se anulan:

$$\begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = |A|$$

SOLUCIÓN $D = -4 |A| = -4 \cdot (-2) = 8$, sin calcular α ni β .

Apartado b)

1. $|A| = -2 \neq 0$, así que A^{-1} existe (A es regular).

2. El determinante de un producto es el producto de los determinantes, $|A^t| = |A|$ y $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$:

$$|A^{-1}(A^t)^2 A| = |A^{-1}| \cdot |A^t|^2 \cdot |A| = \frac{1}{|A|} \cdot |A|^2 \cdot |A| = |A|^2.$$

SOLUCIÓN $|A^{-1}(A^t)^2 A| = (-2)^2 = 4$ (positivo, aunque $|A|$ sea negativo).

Lo que puntúa. Criterios específicos de Andalucía 2026 (publicados aparte del examen): en a), «Hasta 1,25 puntos por aplicar correctamente las propiedades de los determinantes que se utilicen»; en b), «Hasta 0,75 puntos por aplicar correctamente las propiedades de los determinantes que se utilicen». Además, 0,25 puntos de cada ejercicio son para la expresión correcta de los procesos y métodos: escribe qué propiedad usas en cada igualdad.

Error típico que te quita puntos. Confundir multiplicar una fila con multiplicar la matriz entera: aquí solo la 3.ª fila va por 4 y sale un 4; si fuera $|4A|$, saldría $4^3|A| = 64|A|$.

9 Ejercicio resuelto: inversa por adjuntos con un parámetro (Asturias 2025)

PAU ASTURIAS 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 1, OPCIÓN B (2,5 PUNTOS)

Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- Calcular los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuáles B tiene inversa. (1 punto)
- Para $x = 0$, calcular, en caso de que sea posible, B^{-1} . (1 punto)
- Calcular los valores de x para los cuales $\det(AB) = \det(A)$. (0,5 puntos)

Apartado a)

- B tiene inversa si y solo si $|B| \neq 0$. Calculamos $|B|$ por Sarrus.
- Los que suman: $(-1) \cdot 1 \cdot x = -x$, $(-1) \cdot 1 \cdot 2 = -2$ y $(-2) \cdot 1 \cdot 1 = -2$. Los que restan: $(-2) \cdot 1 \cdot 2 = -4$, $(-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$ y $(-1) \cdot 1 \cdot x = -x$.
- $|B| = (-x - 4) - (-4 - 1 - x) = -x - 4 + 5 + x = 1$: la x desaparece.

SOLUCIÓN $|B| = 1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$: B tiene inversa para cualquier valor real de x .

Apartado b)

- Con $x = 0$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \frac{1}{|B|}(\text{Adj } B)^t$.

2. Cada adjunto, con el signo del tablero. Por ejemplo, $B_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ y $B_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$. Los nueve:

$$\text{Adj } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Se traspone y se divide entre $|B| = 1$, que no cambia nada.

4. Comprobación, fila 1 de B por columna 1 de B^{-1} : $(-1)(-1) + (-1) \cdot 2 + (-2)(-1) = 1 - 2 + 2 = 1$.

SOLUCIÓN $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, la misma que obtiene la solución oficial por Gauss-Jordan.

Apartado c)

1. No hace falta calcular AB : $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

2. Como $\det(B) = 1$ para cualquier x , $\det(AB) = \det(A) \cdot 1 = \det(A)$.

SOLUCIÓN La igualdad se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Asturias 2025: «Calificación máxima otorgada: 1 punto los apartados (a) y (b) y 0.5 puntos el apartado (c)». La solución oficial calcula la inversa por Gauss-Jordan (sale la misma matriz) y resuelve el c) en una línea: «Como $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(A)$ la condición se cumple para cualquier valor de x ».

Error típico que te quita puntos. No trasponer la adjunta (aquí $\text{Adj } B \neq B^{-1}$) u olvidar el tablero de signos en los adjuntos. La comprobación $B \cdot B^{-1} = I$ te avisa de los dos.

10 Ejercicio resuelto: rango por menores y determinante con parámetro (Asturias 2026)

PAU ASTURIAS 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 1, OPCIÓN B (2,5 PUNTOS)

Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ a & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) Calcular todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

b) Si una matriz B de tamaño 3×3 verifica que $B^2 = 2I$ ¿Qué valores puede tomar $\det(B)$? (0,5 puntos)

c) Calcula el rango y el determinante de la matriz A para cada valor de $a \in \mathbb{R}$. (1 punto)

Apartado a)

1. $A^2 = A \cdot A$, fila por columna. Por ejemplo, fila 1 por columna 1: $(-1)(-1) + 2 \cdot 0 + (-2)a = 1 - 2a$.

2.
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-2a & 0 & 0 \\ -4a & 1 & 0 \\ -4a & 2a & 1-2a \end{pmatrix}$$

3. Para que sea I , cada elemento tiene que coincidir: fuera de la diagonal, $-4a = 0$, así que $a = 0$.
Con $a = 0$, también $1 - 2a = 1$ y $2a = 0$.

SOLUCIÓN $A^2 = I$ solo para $a = 0$.

Apartado b)

1. No conocemos B : tomamos determinantes en los dos miembros. A la izquierda, $|B^2| = |B|^2$; a la derecha, $|2I| = 2^3 |I| = 8$, porque I es de orden 3.

2. $|B|^2 = 8$, luego $|B| = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$. Los dos valores son posibles: $B = \sqrt{2}I$ y $B = -\sqrt{2}I$ cumplen $B^2 = 2I$.

SOLUCIÓN $\det(B) = 2\sqrt{2}$ o $\det(B) = -2\sqrt{2}$.

Apartado c)

1. Desarrollamos por la 1.ª columna, que tiene un cero (signos $+$ $-$ $+$):

$$|A| = (-1) \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 0 + a \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-1) + a(-2) = 1 - 2a.$$

2. $|A| = 0 \iff 1 - 2a = 0 \iff a = \frac{1}{2}$. Es el único valor que hay que estudiar aparte.

3. Si $a \neq \frac{1}{2}$, $|A| \neq 0$: hay un menor de orden 3 no nulo y $\text{rg } A = 3$.

4. Si $a = \frac{1}{2}$, $|A| = 0$ y el rango ya no puede ser 3. El menor de las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 2 vale $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, así que $\text{rg } A = 2$.

SOLUCIÓN Si $a \neq \frac{1}{2}$: $|A| = 1 - 2a$ y $\text{rg } A = 3$. Si $a = \frac{1}{2}$: $|A| = 0$ y $\text{rg } A = 2$. (Comprobación con el apartado a): para $a = 0$, $|A| = 1$, y $A^2 = I$ obliga a que $|A|^2 = 1$.)

Lo que puntúa. Criterios específicos de Asturias 2026: «Calificación máxima otorgada: 1 punto los apartados (a) y (c) y 0.5 puntos el apartado (b)». En el c) piden dos cosas para cada valor de a , el rango y el determinante: no te dejes ninguna. En la solución oficial, el menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ aparece igualado a -1 ; vale -3 (lo que importa, que no es cero, no cambia).

Error típico que te quita puntos. Decir que $|2I| = 2$: el 2 multiplica a las tres filas, así que $|2I| = 2^3 = 8$. Y quedarse solo con la raíz positiva, $2\sqrt{2}$.

Conceptos clave

Determinante

Número asociado a una matriz cuadrada, $|A|$ o $\det(A)$. Puede ser negativo.

Menor complementario

El determinante α_{ij} que queda al tachar la fila i y la columna j .

Matriz adjunta

La matriz $\text{Adj } A$ formada por los adjuntos de todos los elementos de A .

Menor de orden k

Determinante de la submatriz formada por k filas y k columnas de una matriz.

Menores orlados

Los que se obtienen al añadir a un menor no nulo una fila y una columna más; sirven para calcular el rango con pocos determinantes.

Regla de Sarrus

Cálculo de un determinante de orden 3 con seis productos: tres suman y tres restan. Solo vale para orden 3.

Adjunto

El menor complementario con signo: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$.

Matriz regular

Matriz cuadrada con $|A| \neq 0$; es la que tiene inversa. Si $|A| = 0$, es singular.

Rango por menores

El orden del mayor menor distinto de cero de una matriz.

Valores críticos

Los valores del parámetro que anulan el determinante; en ellos hay que estudiar el rango aparte.

Siete reglas que valen puntos

Inversa

Existe si y solo si $|A| \neq 0$.
Escríbelo antes de calcularla.

Adjunto

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$, con el tablero de signos.

Fórmula

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)^t$: traspón la adjunta.

Producto

$|AB| = |A| \cdot |B|$ y $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Por un número

$|kA| = k^n |A|$ (orden n); una sola fila por k , solo k .

Filas

Intercambiar cambia el signo; sumar un múltiplo de otra no lo cambia.

Rango

Orden del mayor menor $\neq 0$. Con parámetro: $|A| = 0$ y cada caso aparte.

Cómo te lo pueden preguntar

- Estudia para qué valores de un parámetro una matriz tiene inversa y calcúlala para uno de ellos (por adjuntos o por Gauss-Jordan).
- Estudia el rango de una matriz según los valores de un parámetro, justificándolo con menores.
- Calcula un determinante sin conocer todos los elementos, usando las propiedades y un dato como $|A| = -2$.
- Calcula el determinante de un producto, una potencia, una inversa o un múltiplo ($|C|$ con $C = 2(AB^t)^2(B^t)^{-1}$, $|A^{-1}(A^t)^2A| \dots$).
- Deduce los valores posibles de $|B|$ a partir de una igualdad como $B^2 = 2I$, sin conocer B .
- Combina el determinante con el Tema 1: despejar X en una ecuación matricial o comprobar una igualdad como $A^2 = 2A - I$.

No lo confundas

- Menor complementario α_{ij} con adjunto $A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$.
- $|kA| = k^n |A|$ (toda la matriz por k) con multiplicar una sola fila por k , que solo saca un k .
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)^t$ con $\frac{1}{|A|} \text{Adj } A$, que en general no es la inversa.
- $|AB| = |A| \cdot |B|$, que se cumple siempre, con $|A + B| = |A| + |B|$, que en general es falso.
- El determinante $|A|$, que puede ser negativo, con el valor absoluto de un número.

Ponte a prueba

PAU Navarra 2025, A2 (2,5 puntos). Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{4}$ y $|B| = 2$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 2 \cdot (A \cdot B^t)^2 \cdot (B^t)^{-1}$$

Solución: C es de orden 3, así que el 2 sale como 2^3 : $|C| = 2^3 \cdot |A \cdot B^t|^2 \cdot |(B^t)^{-1}|$. Como $|A \cdot B^t| = |A| \cdot |B^t| = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ y $|(B^t)^{-1}| = \frac{1}{|B^t|} = \frac{1}{2}$ (existe porque $|B| = 2 \neq 0$): $|C| = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 1$.

PAU Cantabria 2025, Cuestión 1A (2,5 puntos). Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+3 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}; \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tarea a, [1 punto]. Halla los valores del parámetro a para los cuales la matriz A tiene inversa. **Tarea b, [1 punto].** Considera $a = -3$. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A . **Tarea c, [0,5 puntos].** Considera $a = -3$. Halla, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial: $AX = B$.

Solución: a) Por Sarrus, $|A| = (a+1)^2(a+3) + 1 + 1 - (a+3) - (a+1) - (a+1) = (a+1)^2(a+3) - 3a - 3 = (a+1)^2(a+3) - 3(a+1) = (a+1)[(a+1)(a+3) - 3] = (a+1)(a^2 + 4a) = a(a+1)(a+4)$. A tiene inversa si y solo si $a \neq 0$, $a \neq -1$ y $a \neq -4$. b) Con $a = -3$,

$|A| = (-3)(-2)(1) = 6 \neq 0$: sí es posible. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (es simétrica, así que al trasponer no cambia) y $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. c) Como A tiene inversa, multiplicando por A^{-1} por la izquierda: $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La rúbrica oficial de Cantabria

da en b) 0,25 por verificar que A tiene inversa y 0,75 por calcularla, y en c) 0,20 por despejar X y 0,30 por calcularla.

PAU Canarias 2025, 2B (bloque de Álgebra) (2,5 puntos: 1,25 cada apartado). Dada la matriz $A =$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}, \text{ con } k \in \mathbb{R}. \text{ a) Estudiar el rango de } A \text{ según los valores del parámetro } k. \text{ b) Para } k =$$

-1 , comprobar que $A^2 = 2A - I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3. Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4 = 4A - 3I$.

Solución: a) Por Sarrus, $|A| = 5k^2 + 16 + 16 + 8k - 20 + 8k = 5k^2 + 16k + 12 = (k+2)(5k+6)$, que se anula para $k = -2$ y $k = -\frac{6}{5}$. Si $k \neq -2$ y $k \neq -\frac{6}{5}$, $\text{rg } A = 3$. Si $k = -2$, el menor $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ da $\text{rg } A = 2$. Si $k = -\frac{6}{5}$, el menor de las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 3,

$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, da $\text{rg } A = 2$. b) Con $k = -1$, $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} = 2A - I$. Entonces $A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$ (se puede desarrollar el cuadrado porque A e I conmutan). Son los mismos menores y los mismos pasos que la solución oficial de Canarias, cuyo criterio H pide justificar los rangos.

Fuentes

1. [Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato \(Matemáticas II\)](#)
2. [Examen PAU Matemáticas II Andalucía 2026 \(ordinaria\)](#)
3. [Criterios generales y específicos de corrección PAU Matemáticas II Andalucía 2026](#)
4. [Examen PAU Matemáticas II Asturias 2025 \(ordinaria\)](#)
5. [Examen PAU Matemáticas II Asturias 2025 \(ordinaria\), con solución y criterios específicos de corrección](#)
6. [Examen PAU Matemáticas II Asturias 2026 \(ordinaria\)](#)
7. [Examen PAU Matemáticas II Asturias 2026 \(ordinaria\), con solución y criterios específicos de corrección \(la cabecera del PDF dice 2024-2025 por errata\)](#)
8. [Examen PAU Matemáticas II Navarra 2025 \(ordinaria\)](#)
9. [Examen PAU Matemáticas II Cantabria 2025 \(ordinaria\)](#)
10. [Criterios de corrección PAU Matemáticas II Cantabria 2025 \(rúbrica específica\)](#)
11. [Examen PAU Matemáticas II Canarias 2025 \(ordinaria\), con criterios de calificación y solución](#)

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios. ¿Un error? contacto@farmeandopau.com.