

Sistemas de ecuaciones lineales

Más temas y apuntes en farmeandopau.com

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

Un **sistema de ecuaciones lineales** se escribe con matrices, $AX = B$, y lo que le pasa lo deciden dos rangos: el de la **matriz de coeficientes** A y el de la **matriz ampliada** A^* . En la PAU te piden sobre todo **discutir un sistema según los valores de un parámetro** con el teorema de **Rouché–Frobenius** y resolverlo en algún caso: es el tipo de ejercicio que aparece en más convocatorias de Matemáticas II, en 19 de las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en 12 comunidades. También cae **plantear un sistema a partir de un enunciado** (6 de esas 28 convocatorias). La regla de oro: **un determinante cero no significa incompatible**; hay que comparar los rangos.

1 Sistemas de ecuaciones lineales y su expresión matricial

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones en las que las incógnitas aparecen con exponente 1 y sin multiplicarse entre sí. Una **solución** es un conjunto de valores de las incógnitas que cumple **todas** las ecuaciones a la vez; **resolver** el sistema es encontrar todas sus soluciones.

- **Expresión matricial** $AX = B$: A es la **matriz de coeficientes**, X la columna de las incógnitas y B la de los **términos independientes**.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_B$$

- La **matriz ampliada** A^* (también se escribe $(A | B)$) es A con la columna B añadida:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

- Si A es cuadrada y tiene inversa, $AX = B$ se resuelve como en el Tema 1: $X = A^{-1}B$. Funciona, pero con sistemas 3×3 suele ser más rápido Gauss o Cramer.
- Dos sistemas son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Estas operaciones no cambian las soluciones: intercambiar dos ecuaciones, multiplicar una ecuación por un número distinto de cero y sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

Tipo de sistema	Soluciones	Ejemplo con dos incógnitas
Compatible determinado	Una sola	$x + y = 2, x - y = 0$: solo $(1, 1)$
Compatible indeterminado	Infinitas	$x + y = 2, 2x + 2y = 4$: $(2 - \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$
Incompatible	Ninguna	$x + y = 2, x + y = 3$: imposible

Un sistema lineal nunca tiene exactamente dos soluciones: si tiene dos, tiene infinitas. Por eso «más de una solución» quiere decir compatible indeterminado.

2 El método de Gauss

Consiste en pasar a un sistema equivalente **escalonado** (cada ecuación con al menos una incógnita menos que la anterior) operando con las filas de la matriz ampliada, y después resolverlo **de abajo arriba**.

Con el sistema de la sección anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right)$$

- De abajo arriba: $-7z = -21$, así que $z = 3$; $-3y - 3 = -9$, así que $y = 2$; y $x + 2 + 3 = 6$, así que $x = 1$.
Solución: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

- Con infinitas soluciones**, la escalonada se queda con menos filas no nulas que incógnitas. En el sistema $x + y + z = 3$, $x - y + 3z = 1$, $2x + 4z = 4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Quedan dos ecuaciones para tres incógnitas: una queda libre y pasa a ser el **parámetro**. Con $z = \lambda$:
 $-2y + 2\lambda = -2$, $y = 1 + \lambda$, y $x = 3 - (1 + \lambda) - \lambda = 2 - 2\lambda$. Es decir, $(x, y, z) = (2 - 2\lambda, 1 + \lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Escribe la matriz ampliada A^*

Con las incógnitas siempre en el mismo orden (x, y, z) y los términos independientes detrás de la barra.

Haz ceros debajo de la diagonal

Con operaciones de fila:
 $F_i \rightarrow F_i + kF_j$, $F_i \rightarrow kF_i$ con $k \neq 0$,
o intercambiar dos filas. Primero la columna de la x ; después, la de la y .

Lee la última fila y sube

Despeja la última incógnita y sustituye en la fila de arriba, y así hasta la primera.

Si la escalonada termina en...	El sistema es...
Una fila $(0 \ 0 \ 0 k)$ con $k \neq 0$	Incompatible: esa fila dice $0 = k$, que es imposible
Si no hay ninguna fila así: tantas filas no nulas como incógnitas (un escalón por incógnita)	Compatible determinado
Si no hay ninguna fila así: menos filas no nulas que incógnitas (las filas $(0 \ 0 \ 0 0)$ sobran)	Compatible indeterminado: las incógnitas sin escalón pasan a ser parámetros

Errores típicos que te quitan puntos

Con un parámetro en la matriz, dividir o multiplicar una fila por una expresión que puede valer cero (como $m - 2$) sin estudiar aparte ese valor. Y elegir como parámetro una incógnita que no está libre: en el ejercicio del País Vasco de abajo, $z = 2$ en todas las soluciones, así que el parámetro tiene que ser x o y .

3 El teorema de Rouché-Frobenius

Dice si un sistema tiene solución mirando solo dos rangos: **un sistema es compatible si y solo si** $\text{rg } A = \text{rg } A^*$. Si además ese rango es igual al número de incógnitas n , la solución es única.

- (Los tres casos del teorema, en la tabla de abajo.) **Los rangos se calculan** por menores (Tema 2) o escalonando por Gauss. El rango es el orden del mayor menor no nulo: si A es 3×3 y $|A| \neq 0$, $\text{rg } A = 3$.
- Siempre** $\text{rg } A \leq \text{rg } A^* \leq \text{rg } A + 1$, porque la ampliada contiene a A y solo tiene una columna más. Y ningún rango supera el número de filas ni el de columnas.

- En un sistema de tres ecuaciones con $\text{rg } A = 2$, para ver si $\text{rg } A^* = 3$ basta con el menor de orden 3 de A^* formado por las dos columnas de un menor de orden 2 no nulo de A y la columna de los términos independientes: si no es cero, $\text{rg } A^* = 3$; si es cero, $\text{rg } A^* = 2$ (es lo que se usa en Valencia 2025, en «Ponte a prueba»).

Rangos	Sistema	Soluciones
$\text{rg } A = \text{rg } A^* = n$	Compatible determinado	Una
$\text{rg } A = \text{rg } A^* < n$	Compatible indeterminado	Infinitas, con $n - \text{rg } A$ parámetros
$\text{rg } A \neq \text{rg } A^*$	Incompatible	Ninguna

Justifica cada rango

« A^* tiene tres filas, así que su rango es 3» solo justifica que es **como mucho** 3. Falta lo otro: contiene a A , que tiene rango 3 (o un menor de orden 3 no nulo). Los criterios de Castilla y León 2026 penalizan la falta de justificación con el 25 % de la valoración de la pregunta o tarea.

4 Discusión de sistemas con un parámetro

Discutir un sistema es decir, para cada valor del parámetro, si es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Es el tipo de ejercicio que aparece en más convocatorias de Matemáticas II: 19 de las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en 12 comunidades. Y suele pedir, además, resolver el sistema en algún caso.

- Un ejemplo corto:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 1 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = (1 - a)(1 + a)$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$: compatible determinado. Si $a = 1$, las dos ecuaciones son $x + y = 1$: $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 1 < 2$, compatible indeterminado. Si $a = -1$, son $x - y = 1$ y $-x + y = 1$; sumándolas sale $0 = 2$: $\text{rg } A = 1$ y $\text{rg } A^* = 2$, incompatible. Los dos valores anulan $|A|$ y dan sistemas distintos.

- **Si hay una ecuación más que incógnitas** (por ejemplo, tres ecuaciones con dos incógnitas), A no es cuadrada y no tiene determinante, pero A^* sí: si $|A^*| \neq 0$, $\text{rg } A^* = 3$ y $\text{rg } A \leq 2$, así que es incompatible. Los valores que anulan $|A^*|$ se estudian aparte. Con menos ecuaciones que incógnitas, ni A ni A^* son cuadradas: los rangos se calculan con menores o por Gauss.
- **Por Gauss** también se discute: se escalona con el parámetro dentro y se mira para qué valores se anula cada pivote.

Calcula $|A|$ y factorízalo

Iguálalo a cero: sus raíces son los **valores críticos** del parámetro.



El resto de valores

Si $|A| \neq 0$ en un sistema 3×3 : $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 3$, compatible determinado.



Cada valor crítico, por separado

Sustitúyelo en el sistema y calcula $\text{rg } A$ y $\text{rg } A^*$ con menores concretos (o por Gauss).



Resume en una tabla

Cada valor del parámetro, sus dos rangos y el tipo de sistema. Rouché-Frobenius decide.

Error típico que te quita puntos

Decir que el sistema es incompatible solo porque $|A| = 0$. Un determinante cero solo dice que $\text{rg } A < 3$: puede ser incompatible o compatible indeterminado, y para saberlo hay que mirar A^* . En Castilla y León 2026 (abajo), $m = 2$ y $m = 5$ anulan $|A|$; el primero da incompatible y el segundo, infinitas soluciones.

5 La regla de Cramer y los sistemas homogéneos

Un sistema es **de Cramer** si tiene tantas ecuaciones como incógnitas y $|A| \neq 0$. Entonces es compatible determinado y cada incógnita es un cociente de determinantes: en el numerador, el determinante de A con la columna de esa incógnita cambiada por la de los términos independientes.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

- Con el sistema de las secciones anteriores, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$ y

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 14, \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21,$$

así que $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$, como por Gauss.

- También en un sistema compatible indeterminado:** te quedas con las ecuaciones de un menor no nulo de orden $\text{rg } A$, pasas al segundo miembro las incógnitas que no están en él (como si fueran números) y aplicas Cramer.
- Sistemas homogéneos:** todos los términos independientes son 0. Son **siempre compatibles** (una columna de ceros no cambia el rango) y tienen siempre la **solución trivial** $x = y = z = 0$. Tienen más soluciones si y solo si $\text{rg } A < n$; si A es cuadrada, si y solo si $|A| = 0$.
- Ejemplo: en

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

$|A| = 0$. Con $F_2 - F_1$ y $F_3 - 2F_1$ sale dos veces $-2y + z = 0$; $\text{rg } A = 2 < 3$, compatible indeterminado. Con $y = \lambda$: $z = 2\lambda$ y $x = -3\lambda$.

Cramer necesita $|A| \neq 0$

Si $|A| = 0$, las fórmulas dividen entre cero y no se pueden usar tal cual. En un sistema con parámetro, en cambio, Cramer da la solución **en función del parámetro** para todos los valores con $|A| \neq 0$ a la vez.

6 Plantear un sistema a partir de un enunciado

Salió en 6 de las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026. Lo que más puntúa es el **planteamiento**: en Andalucía 2025, hasta 0,75 de los 1,25 puntos del primer apartado; en Madrid 2025, 0,5 puntos por cada ecuación bien planteada.

Define las incógnitas

Con palabras y unidades:
« x = precio del jersey (€)».

Una frase, una ecuación

Traduce cada dato por separado (tabla de abajo) y pásalo a la forma $ax + by + cz = d$, sin denominadores ni decimales.

Discute o resuelve

Rouché-Frobenius si te preguntan si la solución es única; Gauss o Cramer para calcularla.

Comprueba y responde con palabras

Con los datos del enunciado, no con el sistema simplificado, y con unidades. Mira que la solución tenga sentido: precios positivos, números enteros si cuentas personas u objetos...

Frase del enunciado	Ecuación
«En total gastó 80 €»	$x + y + z = 80$
« x es un tercio de y y z juntos»	$x = \frac{y+z}{3} \iff 3x - y - z = 0$
« x tiene un descuento del 30 %»	Se paga el 70 %: $0,7x$
« x sube un 20 %»	$1,2x$
« x supera a y en 5 unidades»	$x = y + 5$
«La media de x , y y z es 20»	$\frac{x+y+z}{3} = 20 \iff x + y + z = 60$

Errores típicos que te quitan puntos

Con un descuento del 30 %, escribir $0,3x$: eso es lo que te ahorras, no lo que pagas. Olvidar el paréntesis de «juntos»: es $x = \frac{y+z}{3}$, no $x = \frac{y}{3} + z$. Y dar los números sin decir qué es cada uno.

7 Interpretación geométrica: posición de tres planos

Cada ecuación $ax + by + cz = d$ (si a , b y c no son los tres cero) es un **plano** del espacio (lo verás en el Tema 5), y las soluciones del sistema son los puntos comunes a los tres planos. Los rangos dicen cómo están colocados.

$\text{rg } A$	$\text{rg } A^*$	Sistema	Los tres planos...
3	3	Compatible determinado	se cortan en un punto
2	2	Compatible indeterminado (1 parámetro)	se cortan en una recta : tres planos distintos, como las hojas de un libro abierto, o dos coincidentes y el tercero los corta
2	3	Incompatible	no tienen ningún punto común: se cortan dos a dos en tres rectas paralelas (forman un prisma), o dos son paralelos y el tercero los corta
1	1	Compatible indeterminado (2 parámetros)	son el mismo plano
1	2	Incompatible	son paralelos : los tres distintos, o dos coincidentes y el tercero paralelo

Para distinguir los casos de una misma fila, compara las ecuaciones dos a dos: si los coeficientes de x , y y z son proporcionales, esos dos planos son paralelos (y coincidentes si también lo es el término independiente). En el ejercicio del País Vasco 2026 (con $a = 3$), $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2$ y no hay dos ecuaciones con coeficientes proporcionales: los tres planos se cortan en la recta $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(-3, 1, 0)$. En el de Castilla y León 2026 con $m = 2$, $\text{rg } A = 2$, $\text{rg } A^* = 3$ y tampoco hay dos filas de A proporcionales: los planos se cortan dos a dos y forman un prisma.

8 Ejercicio resuelto: discutir un sistema con parámetro (Castilla y León 2026)

PAU CASTILLA Y LEÓN 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · APARTADO 1, PROBLEMA 1A (A ELEGIR ENTRE 1A Y 1B; 2,5 PUNTOS)

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m-10)x - 2y - z = -1 \\ 7x + (m+2)y + 2z = m+1 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

donde $m \in \mathbb{R}$.

a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m . (1,5 puntos)

b) Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. (1 punto)

Apartado a)

1. Matriz de coeficientes y ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} m-10 & -2 & -1 \\ 7 & m+2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m-10 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & m+2 & 2 & m+1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Por **Rouché-Frobenius**, el sistema es compatible si y solo si $\text{rg } A = \text{rg } A^*$, y determinado si además ese rango es 3, el número de incógnitas.

2. A es 3×3 : si $|A| \neq 0$, su rango es 3. Por Sarrus:

$$\begin{aligned} |A| &= (m-10)(m+2) + (-2) \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 7 \cdot 2 - [(-1)(m+2) \cdot 5 + (m-10) \cdot 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 7 \cdot 1] \\ &= (m^2 - 8m - 54) - (-m - 64) = m^2 - 7m + 10 = (m-2)(m-5). \end{aligned}$$

Se anula para $m = 2$ y $m = 5$.

3. Si $m \neq 2$ y $m \neq 5$: $|A| \neq 0$, así que $\text{rg } A = 3$. A^* contiene a A (rango al menos 3) y tiene tres filas (como mucho 3): $\text{rg } A^* = 3$. Compatible determinado.

4. Si $m = 2$: $|A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 20 = -6 \neq 0$ (filas 2.ª y 3.ª, columnas de x e y) da

$\text{rg } A = 2$. En $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$, el menor con las columnas de x, y y los términos

independientes es $\begin{vmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$: $\text{rg } A^* = 3$. Incompatible.

5. Si $m = 5$: en $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -1 & -1 \\ 7 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$ la primera fila es la tercera cambiada de signo,

$F_1 = -F_3$, así que $\text{rg } A^* \leq 2$; y el menor $\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 35 = -21 \neq 0$ da $\text{rg } A = 2$. Entonces $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$: compatible indeterminado.

SOLUCIÓN Si $m \neq 2$ y $m \neq 5$, compatible determinado ($\text{rg } A = \text{rg } A^* = 3$); si $m = 2$, incompatible ($\text{rg } A = 2, \text{rg } A^* = 3$); si $m = 5$, compatible indeterminado ($\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2$).

Apartado b)

1. $m = 3$ no es 2 ni 5: por el apartado a), el sistema es compatible determinado ($|A| = (3 - 2)(3 - 5) = -2 \neq 0$, así que también valdría Cramer). Con $m = 3$:

$$\begin{cases} -7x - 2y - z = -1 \\ 7x + 5y + 2z = 4 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

2. Atajo: sumando la 1.ª y la 3.ª ecuación, la y y la z se van: $-2x = 0$, así que $x = 0$.
3. Con $x = 0$ quedan $5y + 2z = 4$ y $2y + z = 1$. De la segunda, $z = 1 - 2y$; sustituyendo, $5y + 2(1 - 2y) = 4$, $y + 2 = 4$, $y = 2$, y $z = 1 - 2 \cdot 2 = -3$.
4. Comprobación en el sistema del enunciado con $m = 3$: $(3 - 10) \cdot 0 - 2 \cdot 2 - (-3) = -1$; $7 \cdot 0 + (3 + 2) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 4 = 3 + 1$; $5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (-3) = 1$.

SOLUCIÓN $(x, y, z) = (0, 2, -3)$.

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Castilla y León 2026 (Universidad de Salamanca): a) «Hasta 1,5 puntos, que corresponden a un máximo de 0,3 puntos por los cálculos previos y hasta 0,4 más por la correcta discusión de cada uno de los 3 casos posibles»; b) «Hasta 1 punto». Los criterios generales penalizan la falta de justificación con el 25 % de la valoración y piden que figuren «explícitamente las operaciones no triviales»: nombra el teorema y escribe cada menor con su valor.

Error típico que te quita puntos. Decir que el sistema es incompatible solo porque $|A| = 0$: con $m = 5$ el determinante también es cero y el sistema tiene infinitas soluciones.

9 Ejercicio resuelto: plantear un sistema y resolverlo por Gauss (Andalucía 2025)

PAU ANDALUCÍA 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 1 (BLOQUE OBLIGATORIO; 2,5 PUNTOS)

Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

- a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta. (1,25 puntos)
- b) Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30 %, del 40 % y del 20 %, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas. (1,25 puntos)

Apartado a)

1. Incógnitas, con unidades: x = precio del jersey, y = precio de la camisa y z = precio del pantalón, en euros.
2. Cada frase, una ecuación. Gasto total: $x + y + z = 80$. El jersey es un tercio de la camisa y el pantalón **juntos** (paréntesis): $x = \frac{y + z}{3}$, es decir, $3x - y - z = 0$.

3. Por **Rouché–Frobenius**: en $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4 \neq 0$ da $\text{rg } A = 2$; la ampliada contiene ese menor y solo tiene dos filas, así que $\text{rg } A^* = 2$. Como $2 < 3$ incógnitas, el sistema es **compatible indeterminado**: infinitas soluciones, con un parámetro.
4. Pero eso no quiere decir que cambien todas las incógnitas. Sumando las dos ecuaciones, la y y la z se van: $4x = 80$, $x = 20$ en **todas** las soluciones.
5. En cambio, $y + z = 60$: valen $y = 25$, $z = 35$ o $y = 30$, $z = 30$... La solución general es $(x, y, z) = (20, 60 - \lambda, \lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ (y $0 < \lambda < 60$ para que los precios sean positivos).

SOLUCIÓN El precio del jersey **sí** está determinado: **20 €**. El de la camisa **no**: $y = 60 - \lambda$ depende del parámetro.

Apartado b)

1. Con un descuento del 30 % se paga el 70 %: el jersey cuenta $0,7x$; la camisa (40 %), $0,6y$; el pantalón (20 %), $0,8z$. Así que $0,7x + 0,6y + 0,8z = 57$ y, multiplicando por 10, $7x + 6y + 8z = 570$.
2. Por **Gauss**, con las tres ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 6 & 8 & 570 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - 7F_1]{F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & -4 & -4 & -240 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \end{array} \right)$$

3.
$$\xrightarrow{F_2 \cdot (-4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 2 & 70 \end{array} \right)$$

Tres escalones: compatible determinado ($|A| = -8 \neq 0$).

4. De abajo arriba: $2z = 70$, $z = 35$; $y + z = 60$, $y = 25$; y $x = 80 - 25 - 35 = 20$, como en el a).
5. Comprobación con el enunciado: $20 + 25 + 35 = 80$; $20 = \frac{25 + 35}{3}$; y $0,7 \cdot 20 + 0,6 \cdot 25 + 0,8 \cdot 35 = 14 + 15 + 28 = 57$.

SOLUCIÓN Jersey, **20 €**; camisa, **25 €**; pantalón, **35 €**.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Andalucía 2025: a) «Hasta 0,75 puntos por plantear las dos ecuaciones del sistema»; b) «Hasta 0,75 puntos por calcular las tres incógnitas y dar los tres precios». Los generales reservan hasta 0,25 puntos de cada ejercicio para la expresión razonada del proceso y penalizan los errores en las operaciones aritméticas elementales con un máximo de 0,25. Define las incógnitas, justifica con Rouché–Frobenius que el sistema es compatible indeterminado y explica por qué, aun así, x es única: sumando las dos ecuaciones, $4x = 80$ en todas las soluciones.

Error típico que te quita puntos. Escribir $0,3x$ para un descuento del 30 % (es lo que te ahorras, no lo que pagas) u olvidar el paréntesis de «juntos»: es $x = \frac{y+z}{3}$, no $x = \frac{y}{3} + z$.

10 Ejercicio resuelto: el valor con infinitas soluciones y todas las soluciones (País Vasco 2026)

PAU PAÍS VASCO 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · SEGUNDO EJERCICIO (OBLIGATORIO; 2 PUNTOS)

Dado $a \neq 0$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ x + ay + z = a, \\ (a-2)x + ay + (a-1)z = a+2. \end{cases}$$

- a) Encuentra un valor de a para el que el sistema dado tiene más de una solución. (1 punto)
b) Encuentra todas las soluciones del sistema para el valor de a del apartado anterior. (1 punto)

Apartado a)

1. La idea clave: un sistema lineal no tiene solución, tiene una o tiene infinitas. **Más de una solución** quiere decir infinitas: compatible indeterminado, es decir, $\text{rg } A = \text{rg } A^* < 3$ por **Rouché-Frobenius**.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & a & a-1 \end{pmatrix}$ es 3×3 : su rango baja de 3 si y solo si $|A| = 0$. Restando a la 2.ª fila la 1.ª (no cambia el determinante) y desarrollando por esa fila, con el signo $-$ de la posición $(2, 3)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-2 & a & a-1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a \\ a-2 & a \end{vmatrix} = -(a - a(a-2)) = a^2 - 3a = a(a-3).$$

3. Se anula para $a = 0$ y $a = 3$. Como $a \neq 0$, el candidato es $a = 3$. Pero $|A| = 0$ solo dice que $\text{rg } A < 3$: el sistema podría ser incompatible. **Hay que mirar A^*** .

4. Con $a = 3$:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - F_2]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Quedan dos filas no nulas en A y en A^* : $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$, compatible indeterminado.

5. (Con $a = 0$, que el enunciado excluye, también $|A| = 0$, pero el sistema $x = 1$, $x + z = 0$, $-2x - z = 2$ es incompatible: $-2 \cdot 1 - (-1) = -1 \neq 2$. Por eso no basta con el determinante.)

SOLUCIÓN $a = 3$.

Apartado b)

1. Del sistema escalonado quedan dos ecuaciones, $x + 3y = 1$ y $z = 2$, para tres incógnitas: una queda libre ($3 - 2 = 1$ parámetro).
2. La z no puede ser el parámetro ($z = 2$ siempre). Con $y = \lambda$ no salen fracciones: $x = 1 - 3\lambda$. (Con $x = t$ saldría $y = \frac{1-t}{3}$, que es la que da el solucionario oficial: las dos valen.)
3. Comprobación con la solución general en el sistema con $a = 3$: $(1 - 3\lambda) + 3\lambda = 1$;
 $(1 - 3\lambda) + 3\lambda + 2 = 3$; $(1 - 3\lambda) + 3\lambda + 2 \cdot 2 = 5$, para cualquier λ .

4. Geométricamente, los tres planos se cortan en la recta que pasa por $(1, 0, 2)$ con vector director $(-3, 1, 0)$.

SOLUCIÓN $(x, y, z) = (1 - 3\lambda, \lambda, 2)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lo que puntúa. Solucionario y criterios de la EHU (País Vasco 2026): a) «Calcular el determinante de la matriz de coeficientes (0,5 puntos). Comprobar que cuando $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado (0,5 puntos)»; b) «Resolver el sistema cuando $a = 3$ (1 punto)». Según ese reparto, quedarse en $|A| = 0$ sin mirar A^* deja sin el segundo medio punto del a). Los criterios generales restan hasta 0,2 puntos por ejercicio por falta de rigor o mal uso de los símbolos.

Error típico que te quita puntos. Dar una sola solución, como $(1, 0, 2)$, cuando piden todas: la respuesta del b) es la expresión con λ .

Conceptos clave

Sistema de ecuaciones lineales

Conjunto de ecuaciones en las que las incógnitas aparecen con exponente 1 y sin multiplicarse entre sí. Se escribe $AX = B$.

Sistemas equivalentes

Los que tienen las mismas soluciones. Las operaciones de Gauss transforman un sistema en otro equivalente.

Sistema compatible indeterminado

El que tiene infinitas soluciones: $\text{rg } A = \text{rg } A^* < n$. Se dan con $n - \text{rg } A$ parámetros.

Teorema de Rouché-Frobenius

Un sistema es compatible si y solo si $\text{rg } A = \text{rg } A^*$; la solución es única si ese rango es el número de incógnitas.

Método de Gauss

Resolución (o discusión) de un sistema escalonando su matriz ampliada con operaciones de fila y sustituyendo de abajo arriba.

Sistema homogéneo

El que tiene todos los términos independientes nulos. Siempre es compatible (tiene la solución trivial) y tiene más soluciones si y solo si $\text{rg } A < n$.

Matriz de coeficientes y matriz ampliada

A reúne los coeficientes de las incógnitas; la ampliada $A^* = (A | B)$ añade la columna de los términos independientes.

Sistema compatible determinado

El que tiene una única solución: $\text{rg } A = \text{rg } A^* = n$ (número de incógnitas).

Sistema incompatible

El que no tiene solución: $\text{rg } A \neq \text{rg } A^*$.

Discutir un sistema

Decir, para cada valor del parámetro, si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Regla de Cramer

En un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas y $|A| \neq 0$, cada incógnita es un cociente de determinantes, por ejemplo $x = \frac{|A_x|}{|A|}$, con la columna de esa incógnita cambiada por la de los términos independientes.

Siete reglas que valen puntos

Rouché–Frobenius

Compatible si y solo si $\text{rg } A = \text{rg } A^*$. Nómbralo.

Solución única

$\text{rg } A = \text{rg } A^* = \text{número de incógnitas}$.

Determinante nulo

No es «incompatible»: compara $\text{rg } A$ y $\text{rg } A^*$ en cada valor crítico.

Rango de la ampliada

Justifícalo con un menor concreto: $\text{rg } A \leq \text{rg } A^* \leq \text{rg } A + 1$.

Infinitas soluciones

$n - \text{rg } A$ parámetros. Da la solución general, no un ejemplo.

Cramer

$x = \frac{|A_x|}{|A|}$, solo si $|A| \neq 0$.

Plantear

Incógnitas con unidades, una frase = una ecuación, y comprueba con el enunciado.

Cómo te lo pueden preguntar

- Discute un sistema según los valores de un parámetro y resuélvelo en algún caso (por ejemplo, cuando sea compatible indeterminado).
- Halla el valor del parámetro para el que el sistema tiene más de una solución (o ninguna) y da todas las soluciones.
- Plantea un sistema a partir de un enunciado (precios, compras, puntos...), razona si la solución es única y calcúlala.
- Resuelve un sistema por Gauss o por Cramer y comprueba la solución.
- Estudia un sistema homogéneo: cuándo tiene soluciones distintas de la trivial.
- Interpreta la discusión geoméricamente: cómo están colocados los tres planos.

No lo confundas

- $|A| = 0$ (el rango de A es menor que 3) con «incompatible» (rangos distintos).
- Compatible indeterminado (infinitas soluciones) con incompatible (ninguna).
- Una solución concreta, como $(1, 0, 2)$, con la solución general $(1 - 3\lambda, \lambda, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Un descuento del 30 % ($0,7x$, lo que pagas) con $0,3x$ (lo que te ahorras).

Ponte a prueba

PAU Madrid 2025, Pregunta 1.1 (2,5 puntos; a elegir entre 1.1 y 1.2). En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que: • El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres. • La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos. • El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Solución: Con x, y, z = lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos: $0,8x \cdot 1 + 0,5y \cdot 2 + 0,4z \cdot 3 = 80$, es decir, $4x + 5y + 6z = 400$; $\frac{y}{3} = \frac{x+z}{5}$, es decir, $3x - 5y + 3z = 0$; y $2z = x + y - 5$, es decir, $x + y - 2z = 5$. Como $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 121 \neq 0$, es compatible determinado, y por Gauss o Cramer: $x = 25, y = 30, z = 25$. Comprobación: $0,8 \cdot 25 + 2 \cdot 0,5 \cdot 30 + 3 \cdot 0,4 \cdot 25 = 20 + 30 + 30 = 80$. Los criterios de Madrid dan 0,5 puntos por cada ecuación bien planteada y 1 por la resolución.

PAU Extremadura 2026, Ejercicio 1.A [2,5 puntos: a) 1,5 puntos. b) 1 punto; a elegir entre 1.A y 1.B]. Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + kz = k \\ kx + (k-1)y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro k . b) Resolverlo para el caso $k = 2$.

Solución: a) Por Sarrus, $|A| = (k-1) + 1 + k^2 - [k(k-1) + 1 + k] = k - 1$, que solo se anula para $k = 1$. Si $k \neq 1$, $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 3$: compatible determinado. Si $k = 1$, la 1.ª y la 3.ª ecuación son iguales ($x + y + z = 1$), así que $\text{rg } A^* \leq 2$, y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ (filas 1.ª y 2.ª, columnas de x e y) da $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$: compatible indeterminado, con soluciones $(2 - \lambda, -1, \lambda)$. No hay ningún valor de k con el sistema incompatible. b) Con $k = 2$, compatible determinado. Restando la 3.ª ecuación a la 1.ª, $z = 1$; entonces $x + y = 0$ y $2x + y = 1$, así que $x = 1, y = -1$: $(x, y, z) = (1, -1, 1)$.

PAU Comunitat Valenciana 2025, Pregunta 2, apartado 2.2 (2,5 puntos; a elegir entre 2.1 y 2.2). Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide: 2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a . 2.2.2 (0.75 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. 2.2.3 (0.75 puntos) Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

Solución: 2.2.1. Por Sarrus, $|A| = 6a + 10 - 6 - (-3a - 15 - 8) = 9a + 27 = 9(a + 3)$. Si $a \neq -3$, compatible determinado. Si $a = -3$, el menor $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ (filas 1.ª y 3.ª, columnas de x e y)

da $\text{rg } A = 2$, y el menor de A^* con esas columnas y la de los términos independientes,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ da } \text{rg } A^* = 2: \text{ compatible indeterminado. 2.2.2. Con } a = -3 \text{ basta con la 1.ª y}$$

la 3.ª ecuación. Con $x = \lambda$ no salen fracciones: $(x, y, z) = (\lambda, 9\lambda - 9, 6 - 5\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (la solución oficial toma $z = \lambda$: $x = \frac{6-\lambda}{5}$, $y = \frac{9-9\lambda}{5}$; es la misma familia). 2.2.3. Con $a = 0$, compatible determinado: $(x, y, z) = (1, 0, 1)$. Comprobación: $3 - 0 - 3 = 0$, $2 - 5 = -3$ y $1 + 2 = 3$.

Fuentes

1. [Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato \(Matemáticas II\)](#)
2. [Examen PAU Matemáticas II Castilla y León 2026 \(ordinaria\)](#)
3. [Criterios de corrección PAU Matemáticas II Castilla y León 2026 \(ordinaria, Universidad de Salamanca\)](#)
4. [Examen PAU Matemáticas II Andalucía 2025 \(ordinaria\)](#)
5. [Criterios de corrección PAU Matemáticas II Andalucía 2025 \(ordinaria\)](#)
6. [Examen PAU Matemáticas II País Vasco 2026 \(ordinaria\)](#)
7. [Solucionario y criterios PAU Matemáticas II País Vasco 2026 \(ordinaria, EHU\)](#)
8. [Examen PAU Matemáticas II Madrid 2025 \(ordinaria\), con criterios de corrección](#)
9. [Examen PAU Matemáticas II Extremadura 2026 \(ordinaria\)](#)
10. [Criterios de corrección PAU Matemáticas II Extremadura 2026 \(ordinaria\)](#)
11. [Examen PAU Matemáticas II Comunitat Valenciana 2025 \(ordinaria\)](#)
12. [Criterios y soluciones PAU Matemáticas II Comunitat Valenciana 2025 \(ordinaria\)](#)

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios. ¿Un error? contacto@farmeandopau.com.