

Vectores en el espacio

Más temas y apuntes en farmeandopau.com

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

Un **vector** del espacio se maneja con sus tres coordenadas, y casi todo el tema son **tres productos**: el **escalar** da un número y detecta los ángulos rectos ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$); el **vectorial** da un vector perpendicular a otros dos, y su módulo es un **área**; y el **mixto** da un número cuyo valor absoluto es un **volumen** y que vale cero cuando los vectores son **coplanarios**. Los ejercicios de productos vectorial y mixto (áreas, volúmenes y coplanariedad, a menudo con un parámetro) salieron en **11 de las 28** convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en **9 comunidades**.

1 Vectores en el espacio y sus coordenadas

Un **vector fijo** $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado: va del **origen** A al **extremo** B . Tiene **módulo** (su longitud), **dirección** (la de la recta que lo contiene) y **sentido** (de A hacia B). Todos los vectores fijos con el mismo módulo, dirección y sentido representan un mismo **vector libre**, que se escribe $\vec{u}, \vec{v}, \dots$. Con vectores libres se trabaja en todo el tema.

- **Coordenadas.** Con la **base canónica** $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (vectores de módulo 1 en la dirección de los ejes X, Y y Z), cada vector se escribe de una sola forma como $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, y se dice que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.
- **Vector entre dos puntos:** extremo menos origen.

$$A(1, 2, 0), B(3, -1, 4) \implies \overrightarrow{AB} = B - A = (3 - 1, -1 - 2, 4 - 0) = (2, -3, 4).$$

- **Módulo:** $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. La **distancia entre dos puntos** es el módulo del vector que los une: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$.
- **Punto medio** de un segmento: la media de las coordenadas de sus extremos. El de AB es

$$M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+(-1)}{2}, \frac{0+4}{2} \right) = \left(2, \frac{1}{2}, 2 \right).$$

- El currículo (Real Decreto 243/2022, Matemáticas II) pide la «resolución de problemas que impliquen medidas de longitud, superficie o volumen en un sistema de coordenadas cartesianas». En este tema se hace con los productos escalar, vectorial y mixto.

Operación	Cómo se hace	Ejemplo con $\vec{u} = (1, -2, 3)$ y $\vec{v} = (0, 4, -1)$
Suma	Coordenada a coordenada	$\vec{u} + \vec{v} = (1, 2, 2)$
Producto por un número	Se multiplica cada coordenada	$3\vec{u} = (3, -6, 9)$
Combinación lineal	Suma de vectores multiplicados por números	$2\vec{u} - \vec{v} = (2, -8, 7)$
Vectores paralelos	Coordenadas proporcionales: $\vec{v} = k\vec{u}$	$(2, -4, 6) = -2(-1, 2, -3)$

Tres puntos A, B y C están **alineados** si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos, es decir, si sus coordenadas son proporcionales.

2 Dependencia lineal y bases

Un vector es **combinación lineal** de otros si se obtiene sumándolos multiplicados por números, como $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Unos vectores son **linealmente dependientes** si alguno es combinación lineal de los demás; si no, son **linealmente independientes**.

- **Cómo se estudia:** se escribe la matriz con un vector en cada fila y se calcula su **rango** (Temas 1 y 2). Si el rango es igual al número de vectores, son independientes; si es menor, dependientes. Con tres vectores basta el determinante:

$$\vec{u} = (1, 0, 1), \vec{v} = (0, 1, 1), \vec{w} = (1, 1, 2) : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{dependientes, pues } \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

- **Base del espacio:** tres vectores linealmente independientes. Cualquier vector se escribe de **una sola forma** como combinación lineal de ellos, y los coeficientes son sus coordenadas en esa base. Por ejemplo, $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ es una base (su determinante vale $-2 \neq 0$), y $(2, 3, 5) = 2(1, 0, 1) + 3(0, 1, 1) + 0(1, 1, 0)$ (los coeficientes salen de resolver el sistema $\alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 1, 0) = (2, 3, 5)$, Tema 3).
- Una base es **ortogonal** si sus vectores son perpendiculares dos a dos, y **ortonormal** si además tienen módulo 1, como $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Las fórmulas con coordenadas del producto escalar valen en cualquier base ortonormal, y la del producto vectorial, en una base ortonormal orientada como $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (regla de la mano derecha), que es la que se usa en la PAU.

Escribe el determinante

Un vector en cada fila (o en cada columna: el valor es el mismo). Con $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 0, k)$ sale $k + 1$.

Iguálalo a cero

$k + 1 = 0$, es decir, $k = -1$.

Concluye los dos casos

Si $k = -1$, son linealmente dependientes (coplanarios). Si $k \neq -1$, son independientes y forman una base.

Vectores	Son dependientes si...	Lo que significa
Dos: $\vec{u}, \vec{v}$	Sus coordenadas son proporcionales (rango menor que 2)	Son paralelos : tienen la misma dirección
Tres: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$	Su determinante vale 0 (rango menor que 3)	Son coplanarios : caben en un mismo plano
Cuatro o más	Siempre	En el espacio no hay más de tres vectores independientes

Justifica la conclusión

Determinante cero $\Leftrightarrow$ rango menor que 3 $\Leftrightarrow$ linealmente dependientes $\Leftrightarrow$ coplanarios. Escribe la cadena y di qué pasa con **todos** los valores del parámetro, no solo con los que anulan el determinante. En Castilla-La Mancha 2026 el enunciado lo pedía expresamente («Justifica tu respuesta»), y las instrucciones del examen avisan de que la falta de rigor se puede penalizar con hasta 1 punto en todo el examen (los criterios lo concretan en hasta 0,25 en el ejercicio de geometría).

3 El producto escalar

El **producto escalar** de dos vectores es un **número**:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo que forman, con $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

- **Con coordenadas** (en una base ortonormal), se multiplican coordenada a coordenada y se suma:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3, \quad (1, 2, 2) \cdot (2, -1, 2) = 2 - 2 + 4 = 4.$$

- **Propiedades:** es conmutativo, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; distributivo, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$; cumple $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$; y $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$.
- **El signo dice cómo es el ángulo** (con vectores no nulos): positivo si es agudo, negativo si es obtuso y cero si es recto.
- **Perpendicularidad:** dos vectores no nulos son perpendiculares (u ortogonales) si y solo si su producto escalar vale 0:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Es un número, no un vector

Por eso $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$ es un número por un vector, y $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$ sin paréntesis es ambiguo: escribe siempre los paréntesis. Y no se puede «simplificar» un vector: de $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ **no** se deduce $\vec{v} = \vec{w}$ (con $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{j}$ y $\vec{w} = \vec{k}$, los dos productos valen 0).

4 Módulo, ángulo, perpendicularidad y proyección

Casi todo lo que se mide con vectores sale del producto escalar. En la tabla, con $\vec{u} = (1, 2, 2)$ y $\vec{v} = (2, -1, 2)$:

- **Perpendicular con un parámetro:** se iguala a cero el producto escalar. Para que $(a, 1, -2)$ sea perpendicular a $(2, 4, 1)$: $2a + 4 - 2 = 0$, es decir, $a = -1$.
- **Vector de módulo dado:** se divide entre su módulo y se multiplica por el que te pidan. Con la dirección de $\vec{u} = (1, 2, 2)$ y módulo 6: $6 \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (2, 4, 4)$, y también su opuesto, $(-2, -4, -4)$.
- En los Temas 5 y 6 usarás lo mismo con los vectores directores de las rectas y los normales de los planos.

Para calcular...	Fórmula	Ejemplo
Módulo	$ \vec{u} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$	$ \vec{u} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$
Vector unitario	$\frac{\vec{u}}{ \vec{u} }$: misma dirección y sentido, módulo 1	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
Ángulo	$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \vec{v} }$	$\cos \alpha = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$, así que $\alpha \approx 63,61^\circ$
Perpendicularidad	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (vectores no nulos)	$(1, 2, 2) \cdot (2, -1, 0) = 0$
Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$	$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{v} }$: un número, la longitud con signo de la sombra de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$	$\frac{4}{3}$

El ángulo de dos vectores puede ser obtuso

Si $\cos \alpha < 0$, el ángulo entre los dos vectores es obtuso: no le quites el signo. (Para el ángulo entre dos **rectas**, que siempre está entre 0° y 90° , sí se usa el valor absoluto: lo verás en el Tema 6.) Y pon la calculadora en grados si el resultado se pide en grados.

5 El producto vectorial

El **producto vectorial** $\vec{u} \times \vec{v}$ (en algunos libros, $\vec{u} \wedge \vec{v}$) es un **vector**: su módulo es $|\vec{u}| |\vec{v}| \sin \alpha$; su dirección, perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$; y su sentido, el de avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$ (regla de la mano derecha).

- **Cómo se calcula:** con un determinante, desarrollado por la primera fila. Fíjate en el **signo menos** de la componente del medio:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}$$

- **Ejemplo:**

$$(1, 2, 0) \times (0, 1, 3) = (2 \cdot 3 - 0 \cdot 1, -(1 \cdot 3 - 0 \cdot 0), 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = (6, -3, 1).$$

Comprobación: $(6, -3, 1) \cdot (1, 2, 0) = 0$ y $(6, -3, 1) \cdot (0, 1, 3) = 0$.

- **Propiedades:** es **anticonmutativo**, $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$; distributivo; cumple $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$; y $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ si y solo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos (o alguno es nulo). **No es asociativo:** $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k} = \vec{0}$, pero $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.
- **Para qué sirve:** da un vector **perpendicular a dos vectores** a la vez (en el Tema 5, el vector normal de un plano), y su módulo es el **área del paralelogramo** que forman. En el ejemplo, $|(6, -3, 1)| = \sqrt{46} u^2$.

Calcula $\vec{u} \times \vec{v}$

Ya es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.



Divide entre su módulo

$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$ mide 1: es un vector unitario.



Multiplica por el módulo pedido

Y da también el opuesto: si piden módulo k , hay **dos** soluciones, $\pm k \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$.

Error típico que te quita puntos

Olvidar el signo menos de la componente del medio. **El módulo no lo detecta:** en el ejercicio de Extremadura 2026, el resultado bueno $(25, -48, -36)$ y el erróneo $(25, 48, -36)$ miden los dos 65. El control que sí funciona es el producto escalar: el resultado, multiplicado por cada uno de los dos vectores, tiene que dar 0.

6 El producto mixto

El **producto mixto** de tres vectores es un **número**: el producto vectorial de los dos primeros, multiplicado escalarmente por el tercero. Se calcula con un determinante, con un vector en cada fila:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- **Ejemplo:**

$$[(1, 2, 0), (0, 1, 3), (2, 0, 1)] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 12 + 0) - (0 + 0 + 0) = 13.$$

Por el otro camino: $(1, 2, 0) \times (0, 1, 3) = (6, -3, 1)$ y $(6, -3, 1) \cdot (2, 0, 1) = 12 + 0 + 1 = 13$.

- **Propiedades** (las de los determinantes, Tema 2): no cambia si los vectores se permutan en orden circular, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$; **cambia de signo** si se intercambian dos; y vale 0 si y solo si los tres vectores son linealmente dependientes, es decir, **coplanarios**.
- **Volumen del paralelepípedo** que forman: $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$, en valor absoluto porque el determinante puede salir negativo y un volumen no. En el ejemplo, 13 u^3 .
- **Volumen del tetraedro** con esas mismas tres aristas: la sexta parte, $V = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ (un medio porque su base es un triángulo, la mitad del paralelogramo, y un tercio porque es una pirámide). En el ejemplo, $\frac{13}{6} \text{ u}^3$.

Error típico: perder la rama negativa

Si te dan el volumen, la ecuación lleva **valor absoluto**: $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 10$ son dos ecuaciones, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 10$ y $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -10$. Hay que resolver las dos, y si una no tiene soluciones reales, decirlo. Los criterios de Castilla-La Mancha 2026 dan 0,25 puntos por «identificar correctamente la ecuación con valor absoluto» y 0,5 por «obtener las dos soluciones correctas».

7 Áreas, volúmenes y puntos coplanarios

Las fórmulas de áreas y volúmenes trabajan con **vectores**, no con puntos: primero se sacan los vectores que salen de **un mismo vértice**.

- **Alturas**: como el volumen del paralelepípedo es el área de la base por la altura, la altura sobre la cara de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $h = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$ (la misma fórmula da la altura del tetraedro sobre la cara ABC , con $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$). En un triángulo, la altura sobre el lado AB es $h = \frac{2S}{|\overrightarrow{AB}|}$. Es otra forma de calcular distancias, que verás en el Tema 6.

Saca los vectores desde un vértice

$$\overrightarrow{AB} = B - A, \overrightarrow{AC} = C - A \text{ y } \overrightarrow{AD} = D - A.$$

Escribe la fórmula

Antes de sustituir, con su $\frac{1}{2}$ o su $\frac{1}{6}$.

Calcula y pon las unidades

El producto vectorial o el determinante; después, su módulo o su valor absoluto; y al final, u^2 o u^3 .

Qué te piden	Con qué vectores	Fórmula
Área del paralelogramo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$	$\vec{u}$ y $\vec{v}$	$S = \vec{u} \times \vec{v} $
Área del triángulo ABC	$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$	$S = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} $
Volumen del paralelepípedo de aristas $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$	Los tres, desde un mismo vértice	$V = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] $
Volumen del tetraedro $ABCD$	$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$	$V = \frac{1}{6} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] $
¿Son A, B, C y D coplanarios?	$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$	Sí, si y solo si $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$
¿Están A, B y C alineados?	$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$	Sí, si y solo si $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ (coordenadas proporcionales)

Las áreas se dan en unidades cuadradas (u^2) y los volúmenes en unidades cúbicas (u^3).

Lo que valoran los correctores

Las instrucciones de Andalucía 2026 dicen que «todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados», y sus criterios reservan hasta 0,25 puntos de cada ejercicio a expresar el proceso de forma razonada, «con el rigor y la precisión necesarios». En la práctica: la fórmula escrita antes de sustituir, el valor absoluto donde toca y las unidades al final.

8 Ejercicio resuelto: productos escalar y vectorial (Extremadura 2026)

PAU EXTREMADURA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 3.B (A ELEGIR ENTRE 3.A Y 3.B; 2,5 PUNTOS)

- a) Dados los vectores $\vec{u} = (0, 3, -4)$ y $\vec{v} = (12, 4, 3)$, comprobar que el paralelogramo que forman es un rectángulo y calcular su área. (0,75 puntos)
- b) Hallar la ecuación del plano formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y el punto $(1, 0, 0)$. (0,75 puntos)
- c) Obtener un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulo 13. (1 punto)

Apartado a)

- Producto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \cdot 12 + 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 = 0 + 12 - 12 = 0$. Los vectores (no nulos) son perpendiculares, así que el paralelogramo tiene los cuatro ángulos rectos: es un **rectángulo**.
- Módulos: $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ y $|\vec{v}| = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$. Área de un rectángulo: base por altura, $5 \cdot 13 = 65$.
- Comprobación con el producto vectorial, que hace falta para el c):

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -4 \\ 12 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (3 \cdot 3 - (-4) \cdot 4)\vec{i} - (0 \cdot 3 - (-4) \cdot 12)\vec{j} + (0 \cdot 4 - 3 \cdot 12)\vec{k} = (25, -48, -36)$$

y $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{625 + 2304 + 1296} = \sqrt{4225} = 65$: la misma área por dos caminos.

SOLUCIÓN Es un rectángulo porque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, y su área es 65 u^2 .

Apartado b)

- Es de rectas y planos (Tema 5): el vídeo no lo resuelve. La idea: $\vec{u} \times \vec{v} = (25, -48, -36)$ es un vector normal del plano, que pasa por $(1, 0, 0)$, así que el plano es $25(x - 1) - 48y - 36z = 0$.

SOLUCIÓN $25x - 48y - 36z - 25 = 0$.

Apartado c)

- $\vec{u} \times \vec{v}$ ya es perpendicular a los dos, pero mide 65. Dividido entre su módulo da un vector unitario, y multiplicado por 13, uno de módulo 13:

$$\vec{w} = 13 \cdot \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{65} = \frac{1}{5} (25, -48, -36) = \left(5, -\frac{48}{5}, -\frac{36}{5}\right).$$

- Su opuesto también vale: mide lo mismo y apunta al otro lado.

3. Comprobación: $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0 - \frac{144}{5} + \frac{144}{5} = 0$, $\vec{w} \cdot \vec{v} = 60 - \frac{192}{5} - \frac{108}{5} = 0$ y $|\vec{w}| = \sqrt{25 + \frac{2304}{25} + \frac{1296}{25}} = \sqrt{169} = 13$.

SOLUCIÓN $\vec{w} = (5, -\frac{48}{5}, -\frac{36}{5})$ o su opuesto, $-\vec{w} = (-5, \frac{48}{5}, \frac{36}{5})$.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Extremadura 2026: a) 0,75 puntos, b) 0,75 y c) 1, en los tres casos «por cualquier planteamiento correcto y su resolución justificada». Los criterios generales (recogidos en las instrucciones del examen) valoran con hasta 0,25 puntos por ejercicio el proceso razonado, con «el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados». En el a), no basta con el cero: escribe que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, luego son perpendiculares, luego es un rectángulo.

Error típico que te quita puntos. Olvidar el signo menos de la componente del medio: saldría $(25, 48, -36)$, que **también mide 65**, así que el área no lo delata, pero el vector del c) sale mal. Para cazarlo, multiplica escalarmente: $(25, 48, -36) \cdot \vec{u} = 288 \neq 0$, mientras que $(25, -48, -36) \cdot \vec{u} = 0$.

9 Ejercicio resuelto: producto mixto con parámetro (Castilla-La Mancha 2026)

PAU CASTILLA-LA MANCHA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 4.1 (PARTE B, A ELEGIR ENTRE 4.1 Y 4.2; 2 PUNTOS)

Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, a)$, $\vec{v} = (2, a, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 1, -1)$, se pide:

a) Halla los valores reales de a para que los tres vectores sean coplanarios. Justifica tu respuesta. (0,75 puntos)

b) Halla los valores reales de a para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores del enunciado sea 10 u^3 . (1,25 puntos)

Apartado a)

1. Tres vectores son coplanarios si y solo si su producto mixto vale 0. Con $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en las filas:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Por Sarrus. Diagonal principal y sus paralelas: $1 \cdot a \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + a \cdot 2 \cdot 1 = -a + 1 + 2a$. La otra diagonal y sus paralelas, que se restan: $a \cdot a \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 = -a^2 + 3$.

3. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (-a + 1 + 2a) - (-a^2 + 3) = a^2 + a - 2$. Igualando a cero: $a = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$, es decir, $a = 1$ o $a = -2$.

4. Justificación: si $a = 1$ o $a = -2$, el determinante es 0, el rango es menor que 3 y los vectores son linealmente dependientes, o sea, coplanarios. Para cualquier otro valor de a , el determinante no es 0 y no son coplanarios.

SOLUCIÓN Son coplanarios si y solo si $a = 1$ o $a = -2$.

Apartado b)

1. El volumen es el valor absoluto del producto mixto, que ya tenemos: $|a^2 + a - 2| = 10$. Lo de dentro vale 10 o -10 : son dos ecuaciones.
2. Primera: $a^2 + a - 12 = 0$, con discriminante $1 + 48 = 49$: $a = \frac{-1 \pm 7}{2}$, es decir, $a = 3$ o $a = -4$.
3. Segunda: $a^2 + a + 8 = 0$, con discriminante $1 - 32 = -31 < 0$: no tiene soluciones reales.
4. Comprobación: con $a = 3$, $9 + 3 - 2 = 10$; con $a = -4$, $16 - 4 - 2 = 10$.

SOLUCIÓN $a = 3$ o $a = -4$.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Castilla-La Mancha 2026. a): condición para que los tres vectores sean coplanarios, 0,25; ecuación para calcular a , 0,25; soluciones, 0,25. b): fórmula del volumen, 0,25; valor del determinante, 0,25; ecuación con valor absoluto, 0,25; las dos soluciones, 0,5. Si el determinante del a) estuviera mal pero el procedimiento del b) fuera correcto, el b) se da por bueno. La falta de rigor en el ejercicio de geometría puede restar 0,25.

Error típico que te quita puntos. Olvidar el valor absoluto y resolver solo $a^2 + a - 2 = 10$. Aquí la rama de -10 no da soluciones, pero en otros ejercicios sí, y las perderías; y aunque no las dé, hay que demostrarlo.

10 Ejercicio resuelto: puntos coplanarios, área de un triángulo y volumen de un tetraedro (Andalucía 2026)

PAU ANDALUCÍA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 2 (PARTE OBLIGATORIA, 2,5 PUNTOS)

Considera los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(2, m, 1)$, $C(3, 4, 2)$ y $D(1, -1, m)$.

- a) Halla los valores de m para los cuales los puntos anteriores son coplanarios. (1 punto)
- b) Para $m = 1$, calcula el área del triángulo de vértices A, B, C y el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D . (1,5 puntos)

Apartado a)

1. De puntos a vectores, los tres desde A (extremo menos origen): $\overrightarrow{AB} = (1, m - 2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 2)$ y $\overrightarrow{AD} = (0, -3, m)$.
2. Los cuatro puntos están en un mismo plano justo cuando esos tres vectores son coplanarios, es decir, cuando su producto mixto vale 0. Por Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & m-2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & m \end{vmatrix} = (2m + 0 - 6) - (0 + 2m(m - 2) - 6) = -2m^2 + 6m = -2m(m - 3).$$

3. $-2m(m - 3) = 0$ da $m = 0$ o $m = 3$. Para cualquier otro valor, el producto mixto no es 0 y los puntos no son coplanarios.

SOLUCIÓN Son coplanarios si y solo si $m = 0$ o $m = 3$.

Apartado b)

1. Con $m = 1$: $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 2)$ y $\overrightarrow{AD} = (0, -3, 1)$.

2. Área: el triángulo es la mitad del paralelogramo de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2 - 2)\vec{i} - (2 - 2)\vec{j} + (2 + 2)\vec{k} = (-4, 0, 4),$$

de módulo $\sqrt{16 + 0 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Área = $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

3. Volumen: el tetraedro es la sexta parte del paralelepípedo. Atajo: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = (-4, 0, 4) \cdot (0, -3, 1) = 4$, que cuadra con la fórmula del a): $-2 \cdot 1 \cdot (1 - 3) = 4$.

4. $V = \frac{1}{6} |4| = \frac{2}{3}$.

SOLUCIÓN Área del triángulo ABC : $2\sqrt{2} \text{ u}^2$ (unos 2,83 u^2). Volumen del tetraedro $ABCD$: $\frac{2}{3} \text{ u}^3$.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Andalucía 2026: hasta 0,5 puntos por el planteamiento en el a) y hasta 0,5 por el planteamiento en el b). Los generales reservan hasta 0,25 puntos de cada ejercicio para la expresión razonada del proceso y penalizan los errores en las operaciones aritméticas elementales con un máximo de 0,25; y la mera descripción del planteamiento, sin resolverlo, no basta para la valoración completa. Escribe las fórmulas del área y del volumen antes de sustituir, y pon las unidades.

Error típico que te quita puntos. Dar $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ como área del triángulo, o el determinante como volumen del tetraedro: falta el $\frac{1}{2}$ o el $\frac{1}{6}$. Y meter en el determinante las coordenadas de los **puntos** en vez de los vectores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & m & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 6 \text{ da solo } m = 3, \text{ pierde } m = 0 \text{ y ni siquiera usa } D.$$

Conceptos clave

Vector libre

Conjunto de todos los vectores fijos con el mismo módulo, dirección y sentido; se representa por cualquiera de ellos.

Módulo

Longitud de un vector: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Vectores linealmente dependientes

Aquellos en los que alguno es combinación lineal de los demás. Tres vectores lo son si y solo si su determinante vale 0.

Producto escalar

El número $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Producto vectorial

El vector $\vec{u} \times \vec{v}$, perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, de módulo $|\vec{u}| |\vec{v}| \sin \alpha$: el área del paralelogramo que forman.

Vectores coplanarios

Vectores que están en un mismo plano. Tres lo son si y solo si su producto mixto vale 0.

Coordenadas de un vector

Los números (u_1, u_2, u_3) tales que $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$. Las de $\overrightarrow{AB}$ son las de $B - A$.

Vector unitario

Vector de módulo 1. El que tiene la dirección y el sentido de $\vec{u}$ es $\vec{u}/|\vec{u}|$.

Base

Tres vectores linealmente independientes del espacio. Es ortonormal si son perpendiculares dos a dos y de módulo 1, como $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Vectores perpendiculares

También llamados ortogonales. Dos vectores no nulos lo son si y solo si su producto escalar vale 0.

Producto mixto

El número $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$, el determinante de los tres vectores. Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo que forman.

Siete reglas que valen puntos

Entre puntos

$\overrightarrow{AB} = B - A$: extremo menos origen.

Perpendiculares

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (vectores no nulos).

Ángulo

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Vectorial

Determinante con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: signo menos en la componente del medio.

Áreas

Paralelogramo $|\vec{u} \times \vec{v}|$; triángulo $\frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$.

Volúmenes

Paralelepípedo $||[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]||$; tetraedro $\frac{1}{6}$ de eso.

Coplanarios

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$. Con un volumen dado, abre las dos ramas del valor absoluto.

Cómo te lo pueden preguntar

- Comprueba si dos vectores son perpendiculares, o halla el parámetro para que lo sean.
- Halla el módulo de un vector, el vector unitario o el ángulo que forman dos vectores.
- Halla un vector perpendicular a otros dos y con un módulo dado.
- Estudia si tres vectores son linealmente independientes (si forman una base) o coplanarios, a menudo según un parámetro.
- Estudia si cuatro puntos son coplanarios y calcula el área de un triángulo o de un paralelogramo y el volumen de un tetraedro o de un paralelepípedo.
- Halla el parámetro para que un área o un volumen tengan un valor dado (ecuación con valor absoluto).
- Razona, sin coordenadas, si una expresión con productos es un vector o un número y si es paralela o perpendicular a otros vectores.

No lo confundas

- Producto escalar (da un **número**) con producto vectorial (da un **vector**).
- Área del paralelogramo, $|\vec{u} \times \vec{v}|$, con área del triángulo, $\frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$.
- Volumen del paralelepípedo, $||[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]||$, con volumen del tetraedro, $\frac{1}{6} ||[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]||$.
- Vectores **paralelos** ($\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, coordenadas proporcionales) con vectores **perpendiculares** ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).
- Puntos con vectores: para áreas, volúmenes y coplanariedad, primero $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Ponte a prueba

PAU Asturias 2025, Pregunta 4, opción B. Se consideran los puntos siguientes: $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 1, 4)$, $C(3, 0, 5)$ y $D(0, -1, 2)$. Se pide: (a) (1 punto) Estudiar si los puntos pertenecen a un mismo plano. (b) (0,75 puntos) Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C. (c) (0,75 puntos) Calcular el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

Solución: (a) Con $\overrightarrow{AB} = (-3, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, -2, 2)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1, -3, -1)$, el producto mixto es $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -32 \neq 0$: los puntos **no** pertenecen a un mismo plano. (b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 8, 8)$, de módulo $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$; el área es $\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \approx 5,66 \text{ u}^2$. (c) $V = \frac{1}{6} |-32| = \frac{16}{3} \text{ u}^3$.

PAU Castilla y León 2025, Problema 3B (2,5 puntos). Se considera el vector $\vec{u} = (3, -1, 5)$. a) Determinar a para que el vector $\vec{t} = (1, a, 0)$ sea perpendicular a $\vec{u}$. (0,75 puntos) b) Determinar un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u} = (3, -1, 5)$ y $\vec{v} = (2, 6, 0)$. (0,75 puntos) c) Dados $\vec{u} = (3, -1, 5)$, $\vec{v} = (2, 6, 0)$ y $\vec{w} = (-3, 1, 2)$. Determinar el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (1 punto)

Solución: a) $\vec{t} \cdot \vec{u} = 3 - a + 0 = 0$, luego $a = 3$. b) $\vec{u} \times \vec{v} = (-30, 10, 20)$; vale cualquier múltiplo no nulo, por ejemplo $(-3, 1, 2)$. Comprobación: $(-3, 1, 2) \cdot \vec{u} = -9 - 1 + 10 = 0$ y $(-3, 1, 2) \cdot \vec{v} = -6 + 6 + 0 = 0$. c) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (-30, 10, 20) \cdot (-3, 1, 2) = 90 + 10 + 40 = 140$, así que $V = 140 \text{ u}^3$. (El $\vec{w}$ del c) es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, así que el paralelepípedo es recto y también sale $V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| = 10\sqrt{14} \cdot \sqrt{14} = 140$.)

PAU Aragón 2025, Pregunta 2.1 (2,5 puntos). Sean u y v dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen $a = (u \times v) + w$, $b = v \times (v \times w)$ y $c = u \cdot (v \times w)$. Indica si a , b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores u , v y w .

Solución: Como $u \perp v$ y $w = u \times v$ es perpendicular a los dos (y no nulo, porque u y v no son paralelos), u , v y w son no nulos y perpendiculares dos a dos. **a es un vector:** $a = w + w = 2w$, paralelo a w y, por tanto, perpendicular a u y a v . **b es un vector:** $v \times w$ es perpendicular a v y a w , como u , así que $v \times w = \lambda u$ con $\lambda \neq 0$ (no es nulo, porque v y w no son paralelos). Entonces $b = v \times (\lambda u) = \lambda (v \times u) = -\lambda w$: paralelo a w y perpendicular a u y a v (de hecho, $b = -|v|^2 w$). **c es un número** (un producto escalar): es el producto mixto, $c = [v, w, u] = [u, v, w] = (u \times v) \cdot w = w \cdot w = |w|^2 > 0$.

Fuentes

1. [Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato \(Matemáticas II\)](#)
2. [Examen PAU Matemáticas II Extremadura 2026 \(ordinaria\)](#)
3. [Criterios específicos de corrección PAU Matemáticas II Extremadura 2026 \(ordinaria\)](#)
4. [Examen PAU Matemáticas II Castilla-La Mancha 2026 \(ordinaria\)](#)
5. [Soluciones y criterios de corrección PAU Matemáticas II Castilla-La Mancha 2026 \(ordinaria\)](#)
6. [Examen PAU Matemáticas II Andalucía 2026 \(ordinaria\)](#)
7. [Criterios de corrección PAU Matemáticas II Andalucía 2026 \(ordinaria\)](#)
8. [Examen PAU Matemáticas II Asturias 2025 \(ordinaria\)](#)
9. [Examen PAU Matemáticas II Castilla y León 2025 \(ordinaria\)](#)
10. [Examen PAU Matemáticas II Aragón 2025 \(ordinaria\), con criterios específicos de corrección](#)

