

Rectas y planos en el espacio

Más temas y apuntes en farmeandopau.com

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

Una **recta** queda fijada por un punto y un **vector director**; un **plano**, por un punto y dos vectores no paralelos, o por un punto y su **vector normal**, que se lee directamente en su ecuación general: en $Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = (A, B, C)$. Con esas piezas se resuelve casi todo el tema: escribir ecuaciones con condiciones y estudiar **posiciones relativas** comparando directores y normales (o con los rangos del sistema, por Rouché–Frobenius). Hallar la ecuación de un plano con alguna condición aparece en **18 de las 28** convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en **11 comunidades**, casi siempre como paso de otro ejercicio; la posición relativa de recta y plano, en **7**, y la de dos rectas, en **5**.

1 Ecuaciones de la recta

Una **recta** queda determinada por un **punto** $A(a_1, a_2, a_3)$ y un **vector director** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, no nulo, que marca su dirección. Cualquier múltiplo no nulo de $\vec{u}$ también es director, y si te dan dos puntos A y B de la recta, el director es $\overrightarrow{AB}$. Con esas dos piezas se escriben sus cuatro formas de ecuación:

Ecuación	Cómo es	Ejemplo: $A(1, -1, 2)$ y $\vec{u} = (2, 1, -3)$
Vectorial	$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$	$(x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(2, 1, -3)$
Paramétricas	Una ecuación por coordenada: $x = a_1 + \lambda u_1$, $y = a_2 + \lambda u_2$, $z = a_3 + \lambda u_3$	$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$
Continua	Se despeja λ y se iguala: $\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}$	$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{-3}$
Implícitas (o cartesianas)	Dos ecuaciones de planos que se cortan justo en la recta	$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 3y + z + 1 = 0 \end{cases}$

Las implícitas salen de la continua igualando las fracciones de dos en dos: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1}$ da $x - 2y - 3 = 0$, y $\frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-3}$ da $3y + z + 1 = 0$.

2 De unas ecuaciones de la recta a otras

- **Un cero en el director:** la continua se escribe igual que en la tabla de arriba, con el 0 en el denominador por convenio. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{1}$ significa que $y = 3$ en todos los puntos de la recta: no es una división entre cero.
- **De implícitas a paramétricas:** se resuelve el sistema de las dos ecuaciones, que es compatible indeterminado (Tema 3), con una incógnita como parámetro. También vale tomar un punto que cumpla las dos y, como director, el **producto vectorial de los dos normales**, $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$: la recta está en los dos planos, así que es perpendicular a los dos normales.

Combina las ecuaciones

En $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$, sumando desaparecen y y z : $3x = 3$, así que $x = 1$.

Pon una incógnita como parámetro

→ Con $x = 1$, la primera queda $y - z = 0$. Llamando $z = \lambda$: $y = \lambda$.

Escribe y comprueba

$r \equiv x = 1, y = \lambda, z = \lambda$: punto $(1, 0, 0)$ y director $(0, 1, 1)$.
Comprobación: $(1, 1, -1) \times (2, -1, 1) = (0, -3, -3) = -3(0, 1, 1)$.

La misma recta tiene muchas ecuaciones

Con otro punto o con otro múltiplo del director salen ecuaciones distintas de **la misma** recta, y todas valen. Para comprobar tu resultado no lo compares letra a letra con la solución: mira que los directores sean proporcionales y que un punto tuyo cumpla las ecuaciones de la otra.

3 Ecuaciones del plano

Un **plano** queda determinado por un **punto** A y **dos vectores directores** $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no paralelos: sus puntos son $A + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ecuaciones vectorial y paramétricas). O, más corto, por un punto y un **vector normal** $\vec{n} = (A, B, C)$, perpendicular al plano, que da la **ecuación general** $Ax + By + Cz + D = 0$. Como $\vec{n}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, se puede tomar $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ (Tema 4).

- **Ejemplo:** el plano que pasa por $A(1, 0, 2)$ con directores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 2, 1)$. Su normal es $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, -1, 2)$, y con el punto A : $1(x - 1) - 1(y - 0) + 2(z - 2) = 0$, es decir, $x - y + 2z - 5 = 0$.
- **Con un determinante** (el otro camino hacia la general): el vector que va de A a un punto cualquiera $X(x, y, z)$ del plano es coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, así que el determinante de los tres vectores vale cero:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies (x-1) - y + 2(z-2) = 0 \implies x - y + 2z - 5 = 0.$$

- **El normal se lee en los coeficientes** de x, y y z , **también los que valen cero**. En $\pi \equiv 2x + 3y = 0$ el normal es $(2, 3, 0)$: como no tiene z , el plano es vertical (paralelo al eje Z) y, como $D = 0$, pasa por el origen y contiene al eje Z , como en el ejercicio de Canarias 2026.
- **¿Está un punto en el plano?** Se sustituye en la ecuación general. Con $A(1, 0, 2)$ en $x - y + 2z - 5 = 0$: $1 - 0 + 4 - 5 = 0$, sí.
- **De la general a paramétricas:** se despeja una incógnita y las otras dos hacen de parámetros. De $x - y + 2z - 5 = 0$, con $y = \alpha$ y $z = \beta$: $x = 5 + \alpha - 2\beta$.
- **Cortes con los ejes:** el plano $3x + 2y + z = 6$ corta a los ejes en $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 6)$ (se anulan dos coordenadas y se despeja la tercera). Dividiendo entre 6 queda su **ecuación segmentaria**, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$.

Ecuación	Cómo es	Ejemplo: $A(1, 0, 2)$, $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 2, 1)$
Vectorial	$(x, y, z) = A + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$(x, y, z) = (1, 0, 2) + \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 2, 1)$
Paramétricas	Una ecuación por coordenada, con dos parámetros	$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha + 2\beta \\ z = 2 + \beta \end{cases}$
General (o implícita)	$Ax + By + Cz + D = 0$, con normal $\vec{n} = (A, B, C)$	$x - y + 2z - 5 = 0$

Las tres formas describen el mismo plano: el del ejemplo de arriba.

Di de dónde sale cada número

Los criterios de Canarias 2026 lo piden así (criterio I): «En respuestas sobre geometría del espacio, no basta escribir una ecuación pedida (o que se necesite para otro resultado), sino que se requiere una explicación mínima de lo que significa geoméricamente y de dónde provienen los números que aparecen en esta como coeficientes». Basta una frase: «el normal es el producto vectorial de los dos directores, porque es perpendicular a los dos».

4 Planos y rectas con condiciones

Casi todos los ejercicios del tema piden una ecuación con condiciones. El método es siempre el mismo: **traduce cada condición a un punto o a un vector** y monta la ecuación con lo que tengas (para un plano, un punto y dos vectores no paralelos, o un punto y el normal; para una recta, un punto y el director).

- **Plano por tres puntos:** con $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$, los directores son $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$, y el normal, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$: el plano es $x + y + z - 1 = 0$. Si el producto vectorial sale $\vec{0}$, los tres puntos están alineados y hay infinitos planos.
- **Rectas con dos condiciones:** la recta que pasa por P y **corta a dos rectas r y s** es la intersección del plano que contiene a P y a r con el plano que contiene a P y a s (o se busca el punto donde s atraviesa el primero de esos planos). Comprueba al final que no sale paralela a r ni a s : entonces no las cortaría. La que pasa por P y **corta perpendicularmente a r** va de P al punto Q donde r atraviesa el plano perpendicular a r por P . Tienes las dos resueltas en «Ponte a prueba».
- **Haz de planos** (un atajo): si r viene como corte de dos planos, $\pi_1 = 0$ y $\pi_2 = 0$, los planos que la contienen son $\pi_1 + t\pi_2 = 0$, con $t \in \mathbb{R}$ (además del propio π_2). Por ejemplo, los que contienen a la recta $x + y - z = 1$, $2x - y + z = 2$ son $x + y - z - 1 + t(2x - y + z - 2) = 0$; con la otra condición se calcula t .

Saca las piezas

Plano que contiene a $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ y es perpendicular a $\pi \equiv x + y + z = 0$. De r : $A_r(1, 0, -1)$ y $\vec{u}_r = (2, 1, -1)$. De π : $\vec{n}_\pi = (1, 1, 1)$.

Calcula el normal del plano pedido

Tiene que ser perpendicular a $\vec{u}_r$ (el plano contiene a r) y a $\vec{n}_\pi$ (los planos son perpendiculares):
 $\vec{n} = \vec{u}_r \times \vec{n}_\pi = (2, -3, 1)$.

Escribe la ecuación y comprueba

$2(x-1) - 3y + (z+1) = 0$, es decir, $2x - 3y + z - 1 = 0$.
 Comprobación:
 $\vec{n} \cdot \vec{u}_r = 4 - 3 - 1 = 0$ y
 $\vec{n} \cdot \vec{n}_\pi = 2 - 3 + 1 = 0$.

Te piden...	Punto	Vectores
Plano por tres puntos A , B y C no alineados	A	$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$
Plano que contiene a r y pasa por $P \notin r$	P (o A_r)	$\vec{u}_r$ y $\overrightarrow{A_rP}$
Plano que contiene a dos rectas que se cortan	El punto de corte	$\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$
Plano que contiene a dos rectas paralelas distintas	A_r	$\vec{u}_r$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$
Plano que contiene a r y es paralelo a s (r y s no paralelas)	A_r	$\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$
Plano que contiene a r y es perpendicular a π (r no perpendicular a π)	A_r	$\vec{u}_r$ y $\vec{n}_\pi$
Plano por P perpendicular a r	P	Normal: $\vec{n} = \vec{u}_r$
Plano por P paralelo a π	P	El mismo normal, $\vec{n}_\pi$ (solo cambia D)

Te piden...	Punto	Vectores
Recta por P perpendicular a π	P	Director: $\vec{n}_\pi$
Recta por P paralela a r	P	Director: $\vec{u}_r$
Recta intersección de dos planos	Una solución del sistema	Director: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

Resumen de todos los casos. A_r y $\vec{u}_r$ son un punto y el director de la recta r (igual con s); $\vec{n}_\pi$ es el normal del plano π .

Error típico: confundir el normal con el director

Si una recta viene como corte de dos planos, los coeficientes de cada ecuación son el **normal de ese plano**, no el director de la recta. En la recta $s \equiv x = -1, x + 2y + z = 0$ de la Comunidad Valenciana 2025, $(1, 2, 1)$ es perpendicular a s ; su director es $(0, 1, -2)$.

5 Posición relativa de dos rectas

Dos rectas del espacio pueden ser **coincidentes**, **paralelas**, **secantes** (se cortan en un punto) o **cruzarse**: ni se cortan ni son paralelas, porque no están en un mismo plano. Primero se comparan los directores: si son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes (coincidentes si un punto de una está en la otra). Si no lo son, se cortan cuando tienen un punto común y se cruzan cuando no lo tienen.

- **Atajo con el determinante** (si los directores no son proporcionales): sea $\overrightarrow{A_r A_s}$ el vector que une un punto de cada recta. Si $\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{A_r A_s}) = 0$, los tres vectores son coplanarios y las rectas se cortan; si es distinto de cero, se cruzan.
- **Ejemplo:** $r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0)$ y $s \equiv (x, y, z) = (0, 1, 1) + \mu(1, -1, 1)$. Los directores no son proporcionales, y con $\overrightarrow{A_r A_s} = (-1, 1, 1)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{las rectas se cruzan.}$$

Compara los directores

Si son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes: decide si un punto de una está en la otra.



Si no lo son, busca un punto común

Sustituye las paramétricas de una en las ecuaciones de la otra (o iguala las paramétricas de las dos): si el sistema tiene solución, se cortan; si es incompatible, se cruzan.



Si se cortan, saca el punto

Sustituye el valor del parámetro en las paramétricas de su recta. Si te piden el plano que las contiene, ya tienes las piezas: ese punto y los dos directores (ejercicio de la Comunidad Valenciana 2025).

$\text{rg}(\vec{u}_r, \vec{u}_s)$	$\text{rg}(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{A_r A_s})$	Posición	Puntos comunes
1	1	Coincidentes	Todos
1	2	Paralelas	Ninguno
2	2	Secantes	Uno
2	3	Se cruzan	Ninguno

Si las dos rectas vienen en implícitas, se estudia el sistema de las cuatro ecuaciones: $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2$, coincidentes; 2 y 3, paralelas; 3 y 3, secantes; 3 y 4, se cruzan.

Justifica por qué se cortan

La solución oficial de la Comunidad Valenciana 2025 da solo el punto de corte, pero su baremo exige que «los resultados analíticos, numéricos y gráficos» estén «siempre debidamente justificados». Escribe la cadena completa: los directores no son proporcionales, el sistema tiene solución, luego las rectas se cortan en ese punto.

6 Posición relativa de recta y plano

Una recta y un plano pueden ser **secantes** (se cortan en un punto), **paralelos** (sin puntos comunes) o la recta puede estar **contenida** en el plano. Lo decide el producto escalar del director $\vec{u}$ de la recta por el normal $\vec{n}$ del plano: si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, son secantes; si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, la recta va paralela al plano o por dentro, y lo decide un punto de la recta: si cumple la ecuación del plano, está contenida; si no, es paralela.

- **Con un parámetro:** $r \equiv x = 1 + \lambda, y = 2\lambda, z = -1 + a\lambda$ y $\pi \equiv x + y - z = 3$. Con $\vec{u} = (1, 2, a)$ y $\vec{n} = (1, 1, -1)$: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 + 2 - a = 3 - a$. Si $a \neq 3$, son secantes. Si $a = 3$, el punto $(1, 0, -1)$ de r da $1 + 0 + 1 = 2 \neq 3$: son paralelos.
- **El punto de corte:** se sustituyen las paramétricas de la recta en la ecuación del plano y se despeja el parámetro. Con $a = 1$: $(1 + \lambda) + 2\lambda - (-1 + \lambda) = 3$, es decir, $2 + 2\lambda = 3$, $\lambda = \frac{1}{2}$, y el punto es $(\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2})$.
- **Otra forma, sin el producto escalar:** al sustituir la recta en el plano sale una ecuación en λ . Si tiene una solución, secantes; si no tiene ninguna (queda $0 = k$, con $k \neq 0$), paralelos; si la cumple cualquier λ (queda $0 = 0$), contenida.

Condición	Posición	Con rangos (recta en implícitas y plano)
$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$	Secantes: un punto común	$\text{rg } A = \text{rg } A^* = 3$
$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ y un punto de la recta no cumple la ecuación del plano	Paralelos	$\text{rg } A = 2, \text{rg } A^* = 3$
$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ y un punto de la recta sí la cumple	Recta contenida en el plano	$\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2$

Un caso particular de las secantes: si $\vec{u}$ es **proporcional** a $\vec{n}$, la recta es **perpendicular** al plano.

Error típico que te quita puntos

Concluir «paralela» en cuanto $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Eso solo dice que la recta va paralela al plano **o por dentro de él**: falta comprobar un punto. En Canarias 2026, la recta s estaba contenida en el plano.

7 Posición relativa de dos planos

Dos planos pueden ser **secantes** (se cortan en una recta), **paralelos** o **coincidentes**. Se comparan sus normales: si no son proporcionales, son secantes. Si lo son (las razones entre los coeficientes de x, y y z son iguales), decide el término independiente: si su razón es la misma, coincidentes; si es distinta, paralelos.

- **Ejemplo:** $\pi_1 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv -2x + 4y - 2z - 1 = 0$. Las razones de los coeficientes valen $\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$, y la de los términos independientes, $\frac{-3}{-1} = 3$, es distinta: son **paralelos**. Con $+6$ en lugar de -1 en π_2 serían coincidentes, porque $\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$.
- **Planos perpendiculares:** sus normales son perpendiculares, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Por ejemplo, $x + y + z = 0$ y $x - y = 5$: $(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 0) = 0$.

- La **recta de corte** de dos planos secantes sale de resolver el sistema con un parámetro, como en el ejercicio de Aragón 2026; su director es $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Con $\pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $\pi_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$	Posición	Con rangos
$\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ no proporcionales	Secantes: una recta común	$\text{rg } A = 2$
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	Paralelos	$\text{rg } A = 1, \text{rg } A^* = 2$
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$	Coincidentes	$\text{rg } A = \text{rg } A^* = 1$

Si algún coeficiente es 0, en lugar de las razones mira si un normal es múltiplo del otro, $\vec{n}_2 = k \vec{n}_1$.

Un parámetro en el término independiente no gira el plano

Si el parámetro solo aparece en D , el normal no cambia: el plano se desplaza paralelo a sí mismo. Por eso, en Aragón 2026, $\pi_d \equiv 2x - 3y + 6z = d$ cortaba a π **para cualquier** d . Que haya un parámetro no obliga a que exista un valor especial.

8 Posición relativa de tres planos

Con tres planos se estudia el sistema de sus tres ecuaciones por **Rouché-Frobenius** (Tema 3), con A , la matriz de coeficientes, y A^* , la ampliada con los términos independientes. Si $\text{rg } A = 3$, se cortan en un punto. Si $\text{rg } A = \text{rg } A^* < 3$, tienen infinitos puntos comunes: una recta (rango 2) o todo un plano (rango 1). Si $\text{rg } A < \text{rg } A^*$, no tienen ningún punto común; con $\text{rg } A = 2$ y ningún par de normales proporcional, se cortan dos a dos en tres rectas paralelas, como las caras de un prisma. La tabla del final recoge todos los casos.

- **Ejemplo con parámetro:** $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$, $\pi_2 \equiv x - y + z = 3$ y $\pi_3 \equiv 2x + 2z = a$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(la tercera fila es la suma de las otras dos) y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$: $\text{rg } A = 2$. Orlando con los

términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = 8 - 2a$.

- Si $a = 4$: $\text{rg } A^* = 2$, y los tres planos tienen una **recta común**, $x = 2 - \lambda$, $y = -1$, $z = \lambda$. Si $a \neq 4$: $\text{rg } A^* = 3$, no hay puntos comunes y, como ningún par de normales es proporcional, los planos **se cortan dos a dos** (forman un prisma).

Calcula $|A|$

Si $|A| \neq 0$, $\text{rg } A = 3$: los tres planos se cortan en un punto, que sale de resolver el sistema.

Si $|A| = 0$, calcula los rangos

Busca en A un menor de orden 2 distinto de cero y órlalo con la columna de términos

→ independientes para el rango de A^* .

Si todos los menores de orden 2 de A valen 0, $\text{rg } A = 1$ (los tres normales son proporcionales) y se mira el rango de A^* .

Compara los normales

Con los rangos sabes cuántos puntos comunes hay; con los normales proporcionales, cuál de las figuras es.

Rangos	Puntos comunes	Cómo están
$\text{rg } A = \text{rg } A^* = 3$	Uno (compatible determinado)	Se cortan en un punto
$\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2$	Una recta (compatible indeterminado)	Tres planos distintos con una recta común, o dos coincidentes y el tercero secante
$\text{rg } A = 2, \text{rg } A^* = 3$	Ninguno (incompatible)	Se cortan dos a dos en tres rectas paralelas (como las caras de un prisma), o dos son paralelos y el tercero los corta
$\text{rg } A = \text{rg } A^* = 1$	Todo un plano	Los tres coincidentes
$\text{rg } A = 1, \text{rg } A^* = 2$	Ninguno (incompatible)	Paralelos: los tres distintos, o dos coincidentes y el tercero paralelo

Para elegir entre los casos de una misma fila, mira qué normales son proporcionales y, en esos, si también lo es el término independiente.

Justifica los rangos

Los criterios de Canarias 2026 (criterio H): «Los rangos de las matrices hay que justificarlos (puede hacerse por la técnica de menores orlados o reduciendo la matriz a una escalonada por filas equivalentes)». Escribe el menor que no se anula y qué determinantes valen cero, y nombra el teorema de Rouché–Frobenius.

9 Ejercicio resuelto: posición de dos planos con parámetro (Aragón 2026)

PAU ARAGÓN 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 3 (OBLIGATORIA, 2 PUNTOS)

Sean los planos $\pi \equiv x - 2y + 4z + 1 = 0$ y $\pi_d \equiv 2x - 3y + 6z = d$, con $d \in \mathbb{R}$.

- a) ¿Hay algún valor de $d \in \mathbb{R}$ para el cual los planos π y π_d no se corten? (1 punto)
b) Calcula, para $d = -2$, los puntos de corte entre los planos π y π_d . (1 punto)

Apartado a)

- Los normales se leen en los coeficientes de x, y y z : $\vec{n}_\pi = (1, -2, 4)$ y $\vec{n}_{\pi_d} = (2, -3, 6)$. El parámetro d está en el término independiente, no en el normal: si cambia, el plano se desplaza, pero no gira.
- ¿Son proporcionales? $\frac{2}{1} = 2$ y $\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$. Como $2 \neq \frac{3}{2}$, **no** lo son, y no hace falta mirar la tercera razón. Dos planos con normales no proporcionales son secantes: se cortan en una recta.
- Con rangos, el otro camino que aceptan los criterios: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ tiene el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - (-2) \cdot 2 = 1 \neq 0$, así que $\text{rg } A = 2$; y $\text{rg } A^* = 2$, porque contiene ese menor y solo tiene dos filas. Por Rouché–Frobenius, como $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$, el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado para cualquier d : hay una recta de puntos comunes.

SOLUCIÓN No. Para todo $d \in \mathbb{R}$, π y π_d son secantes: se cortan en una recta.

Apartado b)

1. Con $d = -2$, los puntos de corte son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = -1 \\ 2x - 3y + 6z = -2 \end{cases}$$

(el $+1$ de π pasa al otro miembro como -1).

2. Por reducción, a la segunda ecuación le restamos el doble de la primera: la x desaparece y queda $y - 2z = 0$.

3. Con $z = \lambda$: $y = 2\lambda$, y en la primera ecuación, $x - 4\lambda + 4\lambda = -1$, así que $x = -1$ sea cual sea λ .

4. Comprobación: el director $\vec{v} = (0, 2, 1)$ es perpendicular a los dos normales, porque la recta está en los dos planos: $\vec{v} \cdot \vec{n}_\pi = 0 - 4 + 4 = 0$ y $\vec{v} \cdot \vec{n}_{\pi_d} = 0 - 6 + 6 = 0$. (También $\vec{v} = \vec{n}_\pi \times \vec{n}_{\pi_d}$.)

SOLUCIÓN Los puntos de corte forman la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$: pasa por $(-1, 0, 0)$ y su director es $(0, 2, 1)$.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Aragón 2026. a) (1 punto): «Se puede obtener la calificación máxima observando que el sistema es compatible para cualquier valor de d , o también viendo que los dos vectores normales son linealmente independientes». b) (1 punto): la máxima, si se argumenta que los puntos de corte son los de la recta intersección de los planos, o si se resuelve el sistema compatible indeterminado y se dan las paramétricas de esa recta. Los criterios generales restan hasta 0,2 puntos por pregunta por falta de rigor (por ejemplo, «No poner dónde se mueve una variable libre o un parámetro»: escribe $\lambda \in \mathbb{R}$) y 0,1 por un pequeño error puntual de cuentas.

Error típico que te quita puntos. Buscar a la fuerza un valor especial de d , como si todo parámetro escondiera un caso raro: aquí la respuesta es «no». Y pasar el $+1$ de π al otro miembro sin cambiarle el signo: con $x - 2y + 4z = 1$ saldría otra recta, paralela a la buena.

10 Ejercicio resuelto: recta perpendicular a un plano y posición de recta y plano (Canarias 2026)

PAU CANARIAS 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 3 (BLOQUE 3, GEOMETRÍA, OBLIGATORIA; 2 PUNTOS)

En el espacio tridimensional se conocen el siguiente plano y punto: $\pi : 2x + 3y = 0$; $P(1, -5, 1)$.

a) Hallar la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P . (0,5 puntos)

b) Estudiar la posición relativa de la recta $s : \begin{cases} -x + 3y - 3z = -3 \\ 4x + 9y - 2z = -2 \end{cases}$ con el plano π . (1,5 puntos)

Apartado a)

1. El normal de π se lee en sus coeficientes, contando el de z , que es 0: $\vec{n} = (2, 3, 0)$. Sin término independiente, π pasa por el origen, y sin z es un plano vertical que contiene al eje Z .

2. Una recta perpendicular a un plano lleva la dirección de su normal: director $\vec{v}_r = \vec{n} = (2, 3, 0)$, y pasa por $P(1, -5, 1)$.

3. Paramétricas: cada coordenada, la del punto más λ por la del vector.

SOLUCIÓN $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 + 3\lambda \\ z = 1 \end{cases}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ ($z = 1$ porque la tercera coordenada del director es 0).

Apartado b)

1. Como s es el corte de dos planos, su director es perpendicular a los dos normales, $(-1, 3, -3)$ y $(4, 9, -2)$, y lo da su producto vectorial:

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 4 & 9 & -2 \end{vmatrix} = (21, -14, -21) = 7(3, -2, -3).$$

Tomamos $\vec{u}_s = (3, -2, -3)$: dividir entre 7 no cambia la dirección.

2. $\vec{n} \cdot \vec{u}_s = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) = 0$: son perpendiculares, así que s es paralela a π o está contenida en él. Falta un punto.
3. Un punto de s : con $z = 0$ queda el sistema $-x + 3y = -3$, $4x + 9y = -2$, de determinante $(-1) \cdot 9 - 3 \cdot 4 = -21 \neq 0$ (solución única). De la primera, $x = 3y + 3$; en la segunda, $21y = -14$, así que $y = -\frac{2}{3}$ y $x = 1$: $Q(1, -\frac{2}{3}, 0)$.
4. ¿Está Q en π ? $2 \cdot 1 + 3 \cdot (-\frac{2}{3}) = 2 - 2 = 0$. Sí: la recta no es paralela, está contenida.
5. Comprobación con rangos, el otro camino de la solución oficial. Con las tres ecuaciones:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 4 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

y el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, así que $\text{rg } A = 2$. En A^* , la columna de términos independientes, $(0, -3, -2)$, es igual que la de la z : cada menor de orden 3 es $|A|$ o tiene dos columnas iguales, y vale 0. Entonces $\text{rg } A^* = 2$: compatible indeterminado, infinitos puntos comunes.

SOLUCIÓN La recta s está **contenida** en el plano π .

Lo que puntúa. Canarias 2026 publica la solución oficial (a: 0,5 puntos; b: 1,5) sin reparto de puntos dentro de cada apartado, y resuelve el b) por los dos caminos, vectores y rangos. Sus criterios generales: «Se valorará todo lo escrito en cada respuesta y no sólo el resultado final» (A); «Los rangos de las matrices hay que justificarlos» (H); y, en geometría del espacio, una explicación mínima de lo que significa cada ecuación y «de dónde provienen los números que aparecen en esta como coeficientes» (I). (En la solución oficial, el director de s aparece como $(3, -2, -2)$: es una errata por $(3, -2, -3)$ que no cambia el producto escalar, porque la tercera coordenada de $\vec{n}$ es 0.)

Error típico que te quita puntos. Ver $\vec{n} \cdot \vec{u}_s = 0$, escribir «paralela» y seguir. Aquí es falso: sin comprobar un punto de la recta, la respuesta se queda a medias.

11 Ejercicio resuelto: rectas que se cortan y plano que las contiene (Comunidad Valenciana 2025)

PAU COMUNIDAD VALENCIANA 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 3, APARTADO 3.1 (A ELEGIR ENTRE 3.1 Y 3.2; 2,5 PUNTOS)

Dada la recta $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s : \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

3.1.1) Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas. (1 punto)

3.1.2) La ecuación del plano que contiene a ambas rectas. (1 punto)

3.1.3) La distancia del punto $P = (1, 0, 2)$ a dicho plano. (0,5 puntos)

Apartado 3.1.1)

1. Pasamos s a paramétricas: $x = -1$; llamando $y = \mu$, de $x + 2y + z = 0$ sale $z = 1 - 2\mu$. Así, s pasa por $(-1, 0, 1)$ con director $\vec{u}_s = (0, 1, -2)$.
2. El director de r se lee en sus paramétricas: $\vec{u}_r = (2, 1, -1)$. No es proporcional a $\vec{u}_s$ (donde uno tiene un 0, el otro tiene un 2): las rectas se cortan o se cruzan.
3. Sustituimos el punto genérico de r , $(1 + 2\lambda, \lambda, 2 - \lambda)$, en las dos ecuaciones de s . Primera: $1 + 2\lambda = -1$, así que $\lambda = -1$. Segunda: $(1 + 2\lambda) + 2\lambda + (2 - \lambda) = 3 + 3\lambda = 0$, otra vez $\lambda = -1$. Las dos piden el mismo λ : hay un punto común y las rectas **se cortan**.
4. Con $\lambda = -1$ en r : $(1 + 2 \cdot (-1), -1, 2 - (-1)) = (-1, -1, 3)$. Comprobación en s : $x = -1$ y $-1 + 2 \cdot (-1) + 3 = 0$.

SOLUCIÓN Las rectas se cortan en el punto $(-1, -1, 3)$.

Apartado 3.1.2)

1. Como se cortan, caben en un plano: el que pasa por el punto de corte y tiene como directores $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$, que no son paralelos. En forma vectorial, $(x, y, z) = (-1, -1, 3) + \alpha(2, 1, -1) + \beta(0, 1, -2)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Para la general: el vector $(x + 1, y + 1, z - 3)$, que va del punto de corte a un punto cualquiera del plano, es coplanario con los dos directores, así que

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Desarrollando por la primera fila: $(x + 1) \cdot (-1) - (y + 1) \cdot (-4) + (z - 3) \cdot 2 = -x + 4y + 2z - 3 = 0$. Cambiando el signo para que la x quede positiva: $x - 4y - 2z + 3 = 0$.
4. Comprobación con el normal $\vec{n} = (1, -4, -2)$: $\vec{n} \cdot \vec{u}_r = 2 - 4 + 2 = 0$ y $\vec{n} \cdot \vec{u}_s = 0 - 4 + 4 = 0$.

SOLUCIÓN $\pi \equiv x - 4y - 2z + 3 = 0$.

Apartado 3.1.3)

1. Tiene truco: $P = (1, 0, 2)$ es el punto de r con $\lambda = 0$, $(1 + 2 \cdot 0, 0, 2 - 0)$. Como r está contenida en π , P también.
2. Comprobación en π : $1 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 3 = 0$. Con la fórmula de la distancia de un punto a un plano (Tema 6) sale lo mismo: $\frac{|1 - 0 - 4 + 3|}{\sqrt{1 + 16 + 4}} = \frac{0}{\sqrt{21}} = 0$.

SOLUCIÓN $d(P, \pi) = 0$: el punto está en el plano.

Lo que puntúa. La Comunidad Valenciana publica solo las soluciones: «3.1.1 Punto de corte $(-1, -1, 3)$. 3.1.2 Plano $-x + 4y + 2z - 3 = 0$. 3.1.3 Distancia 0». El plano oficial es el nuestro con todos los signos cambiados: es el mismo. No reparte puntos dentro de cada subapartado (1, 1 y 0,5), pero el baremo exige que «los resultados analíticos, numéricos y gráficos» estén «siempre debidamente justificados», y el examen pide escribir «todos los pasos del razonamiento utilizado». Di por qué se cortan, no solo el punto.

Error típico que te quita puntos. Tomar $(1, 2, 1)$, los coeficientes de $x + 2y + z = 0$, como director de s . Es el normal de uno de los planos que la forman, perpendicular a la recta. El director es $(0, 1, -2)$: sale de las paramétricas o del producto vectorial de los dos normales, $(1, 0, 0) \times (1, 2, 1) = (0, -1, 2)$.

Conceptos clave

Vector director

Vector no nulo con la dirección de una recta. Cualquier múltiplo no nulo suyo también lo es.

Ecuaciones paramétricas

Las que dan cada coordenada en función de un parámetro (recta) o de dos (plano).

Ecuaciones implícitas de la recta

Las de dos planos no paralelos que se cortan en ella. Su director es $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Rectas secantes

Rectas con un único punto común; están en un mismo plano.

Recta contenida en un plano

Todos sus puntos están en el plano: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ y un punto de la recta cumple la ecuación del plano.

Haz de planos

Todos los planos que contienen a una misma recta; si la recta es $\pi_1 = \pi_2 = 0$, son $\pi_1 + t\pi_2 = 0$ (y π_2).

Vector normal

Vector perpendicular a un plano. En $Ax + By + Cz + D = 0$, es $\vec{n} = (A, B, C)$.

Ecuación continua de la recta

$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}$, con $A(a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Ecuación general del plano

$Ax + By + Cz + D = 0$; los coeficientes de x, y y z forman su vector normal.

Rectas que se cruzan

Rectas que no se cortan ni son paralelas: no hay ningún plano que contenga a las dos.

Planos paralelos

Planos sin puntos comunes: sus normales son proporcionales y sus términos independientes, no.

Siete reglas que valen puntos

Normal

En $Ax + By + Cz + D = 0$,
 $\vec{n} = (A, B, C)$, ceros incluidos.

Recta de dos planos

Director $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, o resuelve el sistema con un parámetro.

Plano

Un punto y dos vectores no paralelos: normal $\vec{u} \times \vec{v}$ o determinante igual a 0.

Dos rectas

Directores proporcionales: paralelas o coincidentes. Si no, punto común: se cortan; sin él, se cruzan.

Recta y plano

$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$: secantes. Si es 0, prueba un punto: contenida o paralela.

Dos planos

Normales no proporcionales: secantes. Si lo son, el término independiente decide.

Tres planos

$\text{rg } A$ y $\text{rg } A^*$ por Rouché-Frobenius, justificando los menores.

Cómo te lo pueden preguntar

- Halla la ecuación de un plano con condiciones: por tres puntos, que contiene a una recta y pasa por un punto, que contiene a dos rectas, perpendicular a una recta o a otro plano.
- Escribe una recta en paramétricas o en continua a partir de sus implícitas (o al revés), o la recta perpendicular a un plano por un punto.
- Estudia la posición relativa de una recta y un plano, a menudo según un parámetro, y halla el punto de corte.
- Estudia la posición relativa de dos rectas y, si se cortan, el punto de corte y el plano que las contiene.
- Estudia la posición de dos o de tres planos según un parámetro y halla su recta (o su punto) común.
- Halla la recta que pasa por un punto y corta a otras dos, o la que corta perpendicularmente a una recta dada.

No lo confundas

- Director** de una recta con **normal** de un plano: en una recta en implícitas, los coeficientes de cada ecuación son normales, no directores.
- Recta **paralela** a un plano con recta **contenida**: las dos dan $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$; las distingue un punto.
- Rectas **paralelas** (directores proporcionales) con rectas que **se cruzan** (ni se cortan ni son paralelas).
- Planos **paralelos** con **coincidentes**: en los dos los normales son proporcionales; solo en los coincidentes lo es también el término independiente.
- Recta **perpendicular** a un plano ($\vec{u}$ proporcional a $\vec{n}$) con recta **paralela** al plano ($\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$).

Ponte a prueba

PAU Galicia 2025, Pregunta 4, apartado 4.1 (2,5 puntos). Determine el valor que debe tomar k para que los planos

$$\pi_1 : kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : 3x + 4y + z + 3 = 0$$

sean paralelos. Calcule también el valor de k que hace que esos mismos planos sean perpendiculares.

Solución: Paralelos: los normales $(k, 1, \frac{1}{4})$ y $(3, 4, 1)$ tienen que ser proporcionales, $\frac{k}{3} = \frac{1}{4} = \frac{1/4}{1}$. La segunda igualdad se cumple sola, y la primera da $k = \frac{3}{4}$. Además, $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{4}$: con $k = \frac{3}{4}$ los planos son paralelos y no coincidentes (multiplicando π_1 por 4 queda $3x + 4y + z + 8 = 0$, que solo se diferencia de π_2 en el término independiente).

Perpendiculares: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3k + 4 + \frac{1}{4} = 0$, así que $k = -\frac{17}{12}$.

PAU Navarra 2025, Pregunta B1 (bloque B, a elegir entre B1 y B2; 2,5 puntos). Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$ y corta a las siguientes rectas:

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z - 6 = 0 \\ 2x - 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Solución: La recta t está en el plano que contiene a P y a r . Con $A_r(-1, 0, -2)$, $\vec{u}_r = (2, 1, 1)$ y $\overrightarrow{A_rP} = (3, 0, 1)$, su normal es $\vec{u}_r \times \overrightarrow{A_rP} = (1, 1, -3)$, y el plano, $x + y - 3z - 5 = 0$. Restando las ecuaciones de s sale $y = -2$, y en paramétricas $s \equiv (4 + 3\mu, -2, 2\mu)$. Sustituyendo en el plano: $(4 + 3\mu) - 2 - 6\mu - 5 = 0$, es decir, $\mu = -1$: s lo atraviesa en $Q(1, -2, -2)$. La recta t une P y Q , con director $\overrightarrow{QP} = (1, 2, 1)$:

$$t \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Comprobación: t corta a r en $(3, 2, 0)$ y a s en Q , y su director no es paralelo ni a $\vec{u}_r$ ni a $\vec{u}_s = (3, 0, 2)$.

PAU Andalucía 2025, Ejercicio 5 (bloque con optatividad 2; 2,5 puntos). Considera el punto

$P(1, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$. a) [1 punto] Halla el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r . b) [1,5 puntos] Halla la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r .

Solución: a) Con el punto $A(1, 2, 3)$ de r , los directores del plano son $\vec{u}_r = (1, 2, 2)$ y $\overrightarrow{AP} = (0, -1, -2)$, y su normal, $\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP} = (-2, 2, -1)$. El plano es $-2(x-1) + 2(y-1) - (z-1) = 0$, es decir, $2x - 2y + z - 1 = 0$. b) El plano perpendicular a r por P tiene como normal $\vec{u}_r$: $x + 2y + 2z = 5$. Sustituyendo $r \equiv (1 + \lambda, 2 + 2\lambda, 3 + 2\lambda)$: $11 + 9\lambda = 5$, así que $\lambda = -\frac{2}{3}$, y r lo atraviesa en $Q(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3})$. La recta pedida une P y Q : $\overrightarrow{QP} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, proporcional a $(2, 1, -2)$, así que

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

Comprobación: $(2, 1, -2) \cdot (1, 2, 2) = 2 + 2 - 4 = 0$. (Los criterios de Andalucía dan hasta 0,5 puntos por calcular los vectores directores del plano en el a) y hasta 0,75 por el planteamiento en el b).)

Fuentes

1. [Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato \(Matemáticas II: «Expresiones algebraicas de los objetos geométricos en el espacio»\)](#)
2. [Examen PAU Matemáticas II Aragón 2026 \(ordinaria\), con criterios específicos de corrección](#)
3. [Examen PAU Matemáticas II Canarias 2026 \(ordinaria\)](#)
4. [Examen PAU Matemáticas II Canarias 2026 \(ordinaria\), con criterios de calificación y solución oficial](#)
5. [Examen PAU Matemáticas II Comunidad Valenciana 2025 \(ordinaria\)](#)
6. [Soluciones PAU Matemáticas II Comunidad Valenciana 2025 \(ordinaria\)](#)
7. [Examen PAU Matemáticas II Galicia 2025 \(ordinaria\)](#)
8. [Examen PAU Matemáticas II Navarra 2025 \(ordinaria\)](#)
9. [Examen PAU Matemáticas II Andalucía 2025 \(ordinaria\)](#)
10. [Criterios de corrección PAU Matemáticas II Andalucía 2025 \(ordinaria\)](#)

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios. ¿Un error? contacto@farmeandopau.com.