

# Ángulos, distancias, áreas y volúmenes

Más temas y apuntes en [farmeandopau.com](http://farmeandopau.com)

## LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

Con los productos del Tema 4 y las ecuaciones del Tema 5 se **mide** el espacio. Los **ángulos** salen del producto escalar de los vectores directores y normales (con valor absoluto, para quedarte con el menor). Las **distancias** tienen tres fórmulas que conviene saber de memoria: de un punto a un plano, de un punto a una recta y entre dos rectas que se cruzan. Y casi todo lo demás se reduce a ellas: **primero estudia la posición relativa** (si se cortan, la distancia es 0) y después mide desde un punto. La distancia de un punto a un plano y el simétrico (o la proyección ortogonal) de un punto sobre un plano salieron cada uno en **6 de las 28** convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026.

## 1 Ángulos entre rectas y planos

Todo ángulo del espacio se calcula con el ángulo de dos **vectores**: los directores de las rectas ( $\vec{u}, \vec{v}$ ) y los normales de los planos ( $\vec{n}$ , que son los coeficientes de  $x, y, z$  en la ecuación general). Como dos rectas o dos planos forman dos ángulos (uno y su suplementario), se toma siempre el **menor**: entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . Por eso las fórmulas llevan **valor absoluto** arriba.

- **Por qué recta y plano van con el seno** (las tres fórmulas, en la tabla de abajo): el vector normal  $\vec{n}$  es perpendicular al plano, así que el ángulo  $\beta$  que forman  $\vec{v}$  y  $\vec{n}$  es el **complementario** del que buscas:  $\alpha = 90^\circ - \beta$ , y  $\cos \beta = \sin \alpha$ .
- **Dos planos**:  $\pi_1 \equiv x + y - 1 = 0$  y  $\pi_2 \equiv y + z - 2 = 0$  tienen  $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$  y  $\vec{n}_2 = (0, 1, 1)$ :

$$\cos \alpha = \frac{|0 + 1 + 0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \implies \alpha = 60^\circ.$$

- **Recta y plano**: la recta de vector director  $\vec{v} = (0, 1, 1)$  y el plano  $z = 0$ , de normal  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ :  
 $\sin \alpha = \frac{|1|}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , así que  $\alpha = 45^\circ$ . Tiene sentido: la recta sube lo mismo que avanza.
- **El eje Z** (o cualquier eje) es una recta más: pasa por el origen con vector director  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ . El ángulo se mide con las direcciones aunque las rectas **se crucen** y no tengan ningún punto común.

| Ángulo entre...              | Fórmula                                                                     | Caso especial                                                                                                                             |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Dos rectas $r$ y $s$         | $\cos \alpha = \frac{ \vec{u} \cdot \vec{v} }{ \vec{u}   \vec{v} }$         | Perpendiculares si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (se corten o se crucen)                                                                    |
| Recta $r$ y plano $\pi$      | $\sin \alpha = \frac{ \vec{v} \cdot \vec{n} }{ \vec{v}   \vec{n} }$         | $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ : $r$ paralela a $\pi$ o contenida ( $\alpha = 0^\circ$ ); $\vec{v}$ proporcional a $\vec{n}$ : $r \perp \pi$ |
| Dos planos $\pi_1$ y $\pi_2$ | $\cos \alpha = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1   \vec{n}_2 }$ | Perpendiculares si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$                                                                                        |

El ángulo de una recta y un plano es el que forma la recta con su proyección sobre el plano.

## Seno para recta y plano, coseno para lo demás

Si usas el coseno con  $\vec{v}$  y  $\vec{n}$ , te sale el ángulo **complementario**. En el ejercicio de Castilla-La Mancha 2025 de «Ponte a prueba», el bueno es de unos  $80^\circ$ ; con el coseno saldrían unos  $10^\circ$ . Y sin el valor absoluto puede salir un ángulo obtuso (con el coseno) o negativo (con el seno), y el ángulo entre rectas y planos siempre está entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ .

## 2 Distancia de un punto a un plano (y entre planos paralelos)

La **distancia entre dos puntos** es el módulo del vector que los une:  $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$ . Por ejemplo, de  $A(1, 2, 0)$  a  $B(3, -1, 6)$ :  $\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$ . La distancia de un punto a un plano es la **más corta**, la que va por la perpendicular.

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \text{con } P(x_0, y_0, z_0) \text{ y } \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0.$$

- Arriba, el plano **igualado a cero** con el punto sustituido; abajo, el módulo del vector normal. De  $P(3, 1, -2)$  a  $\pi \equiv x + 2y - 2z + 1 = 0$ :

$$d(P, \pi) = \frac{|3 + 2 + 4 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{10}{3} \text{ u.}$$

- Dos planos paralelos:** se toma un punto de uno y se mide al otro. Si están escritos con **los mismos coeficientes**  $A, B, C$ , hay atajo:  $d(\pi, \pi') = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ . Entre  $\pi \equiv x + 2y - 2z + 1 = 0$  y  $\pi' \equiv x + 2y - 2z - 8 = 0$ :  $\frac{|1 - (-8)|}{3} = 3 \text{ u.}$
- Si los coeficientes son proporcionales pero no iguales, divide antes:  $2x + 4y - 4z - 16 = 0$  es el mismo plano  $\pi'$ , y con el  $-16$  sin dividir el atajo daría  $\frac{17}{3}$ , que está mal.
- El signo de  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$  dice a qué **lado** del plano está el punto: dos puntos que dan valores opuestos (el mismo valor absoluto, con distinto signo) están a la misma distancia, uno a cada lado. Para que sean simétricos falta, además, que  $\overrightarrow{PP'}$  sea proporcional a  $\vec{n}$ .

## Error típico que te quita puntos

Sustituir el punto sin pasar el término independiente al lado de la  $x$ . Con  $\pi \equiv 2x + 2y - z = 13$  y  $P(2, 0, 0)$  sale  $\frac{|4|}{3} = \frac{4}{3}$ , y está mal: hay que escribir  $2x + 2y - z - 13 = 0$ , y entonces  $\frac{|4-13|}{3} = 3$ . Y olvidar el valor absoluto: una distancia nunca es negativa.

## 3 Distancia de un punto a una recta

Para medir de un punto  $P$  a una recta  $r$  hace falta un punto  $A$  de la recta y su vector director  $\vec{v}$ . El paralelogramo de lados  $\overrightarrow{AP}$  y  $\vec{v}$  tiene área  $|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|$  (Tema 4), su base mide  $|\vec{v}|$  y su **altura** es justo la distancia:

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

- Ejemplo:**  $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$  pasa por  $A(0, 0, 0)$  con  $\vec{v} = (1, 2, 2)$ , y  $P(3, 0, 3)$ . Entonces  $\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = (3, 0, 3) \times (1, 2, 2) = (-6, -3, 6)$ , de módulo  $\sqrt{81} = 9$ , y  $|\vec{v}| = 3$ :  $d(P, r) = \frac{9}{3} = 3 \text{ u.}$

- **Otro camino** (el de los libros que no usan el producto vectorial): busca el punto  $M$  de  $r$  más cercano a  $P$ , la **proyección ortogonal**, con los tres pasos de abajo. La distancia es  $|\overrightarrow{PM}|$ .

#### Plano perpendicular a $r$ por $P$

Su vector normal es  $\vec{v}$ . En el ejemplo:  $x + 2y + 2z = 3 + 0 + 6$ , es decir,  $x + 2y + 2z = 9$ .

#### Córtalo con $r$

Con las paramétricas  $(\lambda, 2\lambda, 2\lambda)$ :  
 $\rightarrow 9\lambda = 9, \lambda = 1$  y  $M(1, 2, 2)$ . (Equivale a pedir  $\overrightarrow{PX} \cdot \vec{v} = 0$  para el punto genérico  $X$  de  $r$ .)

#### Mide $|\overrightarrow{PM}|$

$\overrightarrow{PM} = (-2, 2, -1)$  y  
 $|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{9} = 3$ : la misma distancia.

### Comprueba antes si el punto está en la recta

Si  $P \in r$ , la distancia es 0 y no hay nada que calcular. Los criterios de Castilla-La Mancha 2025 (Ejercicio 2, a.2) empiezan así la solución oficial: comprueban que el punto no pertenece a la recta y después aplican  $\frac{|\overrightarrow{PB} \times \vec{r}_2|}{|\vec{r}_2|}$ .

## 4 Distancias según la posición relativa

Antes de medir entre una recta y un plano, entre dos planos o entre dos rectas, **estudia su posición** (Tema 5). Si se cortan o coinciden, la distancia es 0. Si son paralelos, todos los puntos de uno están a la misma distancia del otro: basta con medir **desde un punto**.

- **Ejemplo (Madrid 2026):**  $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$  y  $\pi \equiv 2x + 2y - z = 13$ .  $\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 0$  y el punto  $(2, 0, 0)$  de  $r$  no está en  $\pi$  ( $4 \neq 13$ ): son paralelos y  $d(r, \pi) = 3$  u. Está resuelto entero más abajo.

#### Saca puntos y vectores

Un punto y el vector director de cada recta; el vector normal de cada plano.

#### Decide la posición

Con productos escalares (recta-plano), proporcionalidad (planos o rectas paralelas) o el producto mixto (rectas que no son paralelas).

#### Mide desde un punto

Si son paralelos, elige el punto más sencillo y usa la fórmula de punto-plano o de punto-recta.

| Distancia entre...      | Si se cortan o coinciden                                      | Si no                                                                                                                 |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Recta $r$ y plano $\pi$ | 0 (se cortan si $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$ )              | Paralelos ( $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ y un punto $A$ de $r$ fuera de $\pi$ ):<br>$d(r, \pi) = d(A, \pi)$            |
| Dos planos              | 0 si se cortan (normales no proporcionales) o coinciden       | Paralelos: $d(\pi, \pi') = d(A, \pi')$ con $A \in \pi$                                                                |
| Dos rectas paralelas    | 0 si coinciden                                                | $d(r, s) = d(A, s)$ con $A \in r$ : distancia punto-recta                                                             |
| Dos rectas no paralelas | 0 si se cortan: $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$ | Se cruzan: $d(r, s) = \frac{ [\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] }{ \vec{u} \times \vec{v} }$ (sección siguiente) |

### Justificar el paralelismo puntúa

Los criterios de Madrid 2026 (Pregunta 3, b1) dan «Determinación del paralelismo entre la recta y el plano: 0.2 puntos», antes del planteamiento (0,4) y la resolución (0,4). Si te saltas ese paso y das solo la fórmula, pierdes esa parte aunque el número esté bien.

## 5 Rectas que se cruzan: distancia y perpendicular común

Dos rectas **se cruzan** si no son paralelas y no se cortan: no hay ningún plano que las contenga a las dos. Con  $A \in r, B \in s$  y sus vectores directores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  no proporcionales, se cruzan si y solo si  $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] \neq 0$ .

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

- **Por qué:** el valor absoluto del producto mixto es el **volumen** del paralelepípedo de  $\overrightarrow{AB}, \vec{u}$  y  $\vec{v}$ ;  $|\vec{u} \times \vec{v}|$  es el área de su **base**; y volumen entre base es la **altura**, que es la distancia entre los dos planos paralelos que contienen a cada recta, es decir, la distancia entre las rectas.
- **Ejemplo sencillo:** el eje X ( $A(0, 0, 0), \vec{u} = (1, 0, 0)$ ) y la recta  $s \equiv x = 0, z = 2$  ( $B(0, 0, 2), \vec{v} = (0, 1, 0)$ ).  $\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, 1)$  y  $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 2$ :  $d = \frac{2}{1} = 2$ . La perpendicular común es el tramo del eje Z entre  $(0, 0, 0)$  y  $(0, 0, 2)$ .
- **La perpendicular común** es la recta que corta a las dos y es perpendicular a ambas. Sus puntos de apoyo  $P \in r$  y  $Q \in s$  son los más cercanos entre sí, y  $|\overrightarrow{PQ}| = d(r, s)$ . Se hallan con los pasos de abajo. Otro camino: es la intersección del plano que contiene a  $r$  con dirección  $\vec{u} \times \vec{v}$  y el que contiene a  $s$  con esa misma dirección.

### Puntos genéricos

$P$  en la primera recta con su parámetro ( $t$ ) y  $Q$  en la segunda con el suyo ( $\mu$ , o  $s$  si así viene en el enunciado). Escribe  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ .

### Doble perpendicularidad

$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$  y  $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$ : un sistema de dos ecuaciones con los dos parámetros.

### Sustituye y comprueba

Con los parámetros salen  $P$  y  $Q$ .  
→ Comprueba que  $|\overrightarrow{PQ}|$  coincide con la fórmula y que  $\overrightarrow{PQ}$  es proporcional a  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

### Error típico que te quita puntos

Dar como distancia  $|\overrightarrow{AB}|$ , el módulo del vector entre los puntos que salen con el parámetro igual a 0. Esos dos puntos no son, en general, los más cercanos: en el ejercicio de Asturias 2025,  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{27} \approx 5,2$  y la distancia es 3.

## 6 Proyecciones ortogonales y puntos simétricos

La **proyección ortogonal** de un punto  $P$  sobre un plano o una recta es el punto  $M$  donde cae la perpendicular desde  $P$ : el punto del plano o de la recta **más cercano** a  $P$ . El **simétrico**  $P'$  está al otro lado, en la misma perpendicular y a la misma distancia, así que  $M$  es el punto medio de  $P$  y  $P'$ .

- **Sobre un plano**, con los tres pasos de abajo. En Madrid 2026,  $P(2, 0, 0)$  y  $\pi \equiv 2x + 2y - z = 13$  dan  $\lambda = 1$ ,  $M(4, 2, -1)$  y  $P'(6, 4, -2)$ . Resuelto entero más abajo.
- **Sobre una recta**: se corta  $r$  con el plano perpendicular a  $r$  por  $P$  (sección «Distancia de un punto a una recta»). Con  $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$  y  $P(3, 0, 3)$ :  $M(1, 2, 2)$  y el simétrico respecto a la recta es  $P' = 2M - P = (-1, 4, 1)$ .
- **Respecto a un punto  $Q$** :  $Q$  es directamente el punto medio,  $P' = 2Q - P$ . Es lo que pide Galicia 2026 (4.1.1): el simétrico de  $P(1, 0, 1)$  respecto a  $Q(0, 1, 0)$  es  $P' = (0, 2, 0) - (1, 0, 1) = (-1, 2, -1)$ .
- **Proyección de una recta sobre un plano**: si la recta corta al plano, es la recta que une el punto de corte con la proyección de otro de sus puntos; y si  $r$  no es perpendicular a  $\pi$ , también es la intersección de  $\pi$  con el plano que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$  (si  $r \perp \pi$ , la proyección es solo

el punto de corte). En Madrid 2026, como  $r \parallel \pi$ , sale la paralela a  $r$  por  $M$ :  
 $(x, y, z) = (4, 2, -1) + \mu(1, 1, 4)$ .

### Recta perpendicular a $\pi$ por $P$

Con el vector normal  $\vec{n}$  como vector director:  $(x, y, z) = P + \lambda \vec{n}$ .

### Corte con $\pi$ : la proyección $M$

→ Sustituye las paramétricas en la ecuación del plano y despeja  $\lambda$ .

### Punto medio: el simétrico

→  $M = \frac{P + P'}{2}$ , así que  $P' = 2M - P$ .

## Comprueba el simétrico en diez segundos

Sustituye  $P$  y  $P'$  en la ecuación del plano igualada a cero: deben salir dos números **opuestos** (en Madrid 2026,  $-9$  y  $9$ ). Y  $\overrightarrow{PP'}$  tiene que ser proporcional a  $\vec{n}$ :  $(4, 4, -2) = 2(2, 2, -1)$ . Si una de las dos falla, hay un error de signo.

## 7 Áreas, volúmenes y puntos a una distancia dada

Las áreas y los volúmenes se calculan con los productos vectorial y mixto del Tema 4 (fórmulas en la tabla de abajo), sacando antes los **vectores** desde un vértice ( $\overrightarrow{AB} = B - A...$ ).

- **Ejemplo:**  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ .  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0) \times (-1, 0, 1) = (1, 1, 1)$ , así que el triángulo mide  $\frac{1}{2} |(1, 1, 1)| = \frac{\sqrt{3}}{2} u^2$ . Con  $D = O(0, 0, 0)$ , el tetraedro  $OABC$  tiene volumen  $\frac{1}{6} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6} u^3$ .
- **Altura de un tetraedro** = distancia del vértice al plano de la base. Comprobación en el ejemplo: el plano  $ABC$  es  $x + y + z - 1 = 0$ ,  $d(O, \pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  y  $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}$ .
- **Puntos de una recta a una distancia dada de un punto:** punto genérico de la recta en paramétricas, distancia igual al dato y **al cuadrado**. Sale una ecuación de segundo grado: dos puntos, uno (la recta es tangente a la esfera) o ninguno.
- **Puntos (o planos) a una distancia dada de un plano:** el valor absoluto da **dos** ecuaciones. Los planos paralelos a  $\pi \equiv x + 2y - 2z + 1 = 0$  a distancia 1 son  $x + 2y - 2z + D = 0$  con  $\frac{|D-1|}{3} = 1$ :  $D = 4$  o  $D = -2$ , uno a cada lado.
- **Puntos que equidistan de  $A$  y  $B$ :** forman el **plano mediador**, perpendicular a  $\overrightarrow{AB}$  por el punto medio. Con  $A(1, 3, -2)$  y  $B(3, -1, 2)$ , como en Extremadura 2026 (3.A a): punto medio  $(2, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (2, -4, 4)$  y el plano  $x - 2y + 2z = 0$ .

| Figura                                                                                    | Fórmula                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Paralelogramo de lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$                      | $S =  \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} $                              |
| Triángulo $ABC$                                                                           | $S = \frac{1}{2}  \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} $                  |
| Paralelepípedo de aristas $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ | $V =  [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] $             |
| Tetraedro $ABCD$                                                                          | $V = \frac{1}{6}  [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] $ |

Las áreas van en  $u^2$  y los volúmenes en  $u^3$  (unidades de superficie y de volumen).

### Error típico: perder una solución

Al despejar de  $\lambda^2 = k$  o de  $|\dots| = d$  hay **dos** soluciones cuando  $k > 0$  (o  $d > 0$ ). En la Comunidad Valenciana 2026 había dos puntos de la recta a distancia 4 del origen, con  $\lambda = \pm \frac{\sqrt{26}}{2}$ ; dar solo uno deja el apartado a medias.

## 8 Ejercicio resuelto: simétrico de un punto respecto a un plano y distancia recta-plano (Madrid 2026)

### PAU MADRID 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 3 (OBLIGATORIA, 2 PUNTOS)

Dados el plano  $\pi : 2x + 2y - z = 13$  y la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}.$$

- a) Halle el punto simétrico del punto  $P(2, 0, 0)$  respecto al plano  $\pi$ . (1 punto)
- b) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes: b1) Halle la distancia entre el plano  $\pi$  y la recta  $r$ . b2) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta  $r$  y es ortogonal al plano  $\pi$ . (1 punto)

#### Apartado a)

- El vector normal de  $\pi$  son los coeficientes de  $x, y, z$ :  $\vec{n} = (2, 2, -1)$ . La recta normal a  $\pi$  por  $P$  es  $(x, y, z) = (2, 0, 0) + \lambda(2, 2, -1)$ , es decir,  $x = 2 + 2\lambda$ ,  $y = 2\lambda$ ,  $z = -\lambda$ .
- Corte con  $\pi$ :  $2(2 + 2\lambda) + 2(2\lambda) - (-\lambda) = 13$  (ojo:  $-(-\lambda) = +\lambda$ ), así que  $4 + 9\lambda = 13$  y  $\lambda = 1$ . El punto de corte es  $M(4, 2, -1)$ , la **proyección ortogonal** de  $P$  sobre  $\pi$ : si te piden la proyección, ya has terminado.
- $M$  es el punto medio de  $P$  y su simétrico:  $M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow P' = 2M - P = (8, 4, -2) - (2, 0, 0) = (6, 4, -2)$ .
- Comprobación: en  $2x + 2y - z - 13$ ,  $P$  da  $4 - 13 = -9$  y  $P'$  da  $12 + 8 + 2 - 13 = 9$ , misma distancia y lados opuestos; y  $\overrightarrow{PP'} = (4, 4, -2) = 2\vec{n}$ , perpendicular a  $\pi$ .

**SOLUCIÓN** El simétrico de  $P$  respecto a  $\pi$  es  $P'(6, 4, -2)$ .

#### Apartado b1)

- Posición: el vector director de  $r$  sale de los denominadores,  $\vec{v}_r = (1, 1, 4)$ , y  $\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 0$ . Los vectores son perpendiculares, así que  $r$  es paralela a  $\pi$  o está contenida en él.
- Un punto de  $r$ , de los numeradores (cambiando el signo:  $x - 2 \rightarrow x_0 = 2$ ):  $(2, 0, 0)$ , que es otra vez  $P$ . En  $\pi$ :  $2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 0 = 4 \neq 13$ , así que  $P \notin \pi$  y  $r \parallel \pi$ .
- Al ser paralelos, todos los puntos de  $r$  están a la misma distancia de  $\pi$ , y basta con uno:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 0 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3.$$

- Otro camino con el a): como  $P \in r$ , la distancia es la de  $P$  a su proyección  $M$ :  $\overrightarrow{PM} = (2, 2, -1)$  y  $|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{9} = 3$ .

**SOLUCIÓN**  $r$  y  $\pi$  son paralelos y  $d(r, \pi) = 3$  u.

#### Apartado b2)

- Es de planos (Tema 5): el vídeo no lo resuelve. La idea: el plano pasa por  $(2, 0, 0)$  y tiene como vectores directores  $\vec{v}_r = (1, 1, 4)$  y  $\vec{n} = (2, 2, -1)$ ; su vector normal es  $\vec{v}_r \times \vec{n} = (-9, 9, 0)$ , proporcional a  $(1, -1, 0)$ .

**SOLUCIÓN**  $x - y - 2 = 0$ .

**Lo que puntúa.** Criterios específicos de Madrid 2026. a) Recta normal, 0,2 puntos; punto de corte de recta y plano, 0,3; uso de la fórmula del punto medio, 0,3; respuesta correcta, 0,2. b1) Determinación del paralelismo entre la recta y el plano, 0,2; planteamiento, 0,4; resolución, 0,4. Y para toda la prueba: «Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión». En el a), los pasos del método valen 0,8 de 1: escríbelos todos.

**Error típico que te quita puntos.** Meter  $P$  en la fórmula de la distancia sin igualar el plano a cero:  $\frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 0|}{3} = \frac{4}{3}$ , que está mal (falta el  $-13$ ). Y dar la distancia sin justificar que  $r$  y  $\pi$  son paralelos: en Madrid, eso son 0,2 puntos.

## 9 Ejercicio resuelto: rectas que se cruzan y perpendicular común (Asturias 2025)

### PAU ASTURIAS 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 4, OPCIÓN A (2,5 PUNTOS)

Se están construyendo dos puentes rectos en un tramo de autovía para los dos carriles. Los puentes siguen las ecuaciones siguientes:

$$r_1(t) = (2 + t, -1 - 2t, 3 + 2t); \quad r_2(s) = (1 + 2s, 4 - s, 4 - 2s).$$

Se pide:

- a)** Estudia si los puentes son paralelos, se cortan o se cruzan (1,25 puntos)
- b)** La empresa quiere construir un puente de servicio que los una, y quiere que sea lo más corto posible, ¿qué longitud tendrá la vía de servicio? Indica los puntos inicio y final del pasadizo. (1,25 puntos)

#### Apartado a)

- De cada recta, un punto (con el parámetro igual a 0) y un vector director (lo que multiplica al parámetro):  $r_1$  pasa por  $A(2, -1, 3)$  con  $\vec{u} = (1, -2, 2)$ , y  $r_2$  pasa por  $B(1, 4, 4)$  con  $\vec{v} = (2, -1, -2)$ .
- ¿Paralelas?  $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1} = 2$ :  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  no son proporcionales, así que ni son paralelas ni coinciden. Se cortan o se cruzan.
- Si se cortaran, estarían en un mismo plano, y con ellas  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\overrightarrow{AB}$ : su producto mixto valdría 0. Con  $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 5, 1)$ , desarrollando por la primera fila:  
$$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 + 2) - 5 \cdot (-2 - 4) + 1 \cdot (-1 + 4) = -6 + 30 + 3 = 27 \neq 0.$$
- Otro camino, el de la solución oficial: igualar  $r_1(t) = r_2(s)$  da un sistema incompatible, así que no tienen ningún punto común.

**SOLUCIÓN** Los puentes **se cruzan**: no son paralelos ni se cortan.

#### Apartado b)

1. El puente más corto es la **perpendicular común**, y su longitud es la distancia entre las rectas:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

(el volumen del paralelepípedo entre el área de su base, que es su altura).

2.  $\vec{u} \times \vec{v} = (1, -2, 2) \times (2, -1, -2) = (6, 6, 3)$  y  $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$ . Con el 27 del a):  
 $d(r_1, r_2) = \frac{27}{9} = 3$ .
3. Extremos: un punto genérico de cada recta,  $P = (2 + t, -1 - 2t, 3 + 2t)$  y  
 $Q = (1 + 2s, 4 - s, 4 - 2s)$ , con  $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1 + 2s - t, 5 - s + 2t, 1 - 2s - 2t)$ .
4. Doble perpendicularidad:  $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -9 - 9t = 0 \Rightarrow t = -1$ , y  $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -9 + 9s = 0 \Rightarrow s = 1$ . Sustituyendo:  $P = r_1(-1) = (1, 1, 1)$  y  $Q = r_2(1) = (3, 3, 2)$ .
5. Comprobación:  $\overrightarrow{PQ} = (2, 2, 1)$ ,  $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{9} = 3$ , y  $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}(6, 6, 3) = \frac{1}{3}(\vec{u} \times \vec{v})$ : perpendicular a las dos rectas.

**SOLUCIÓN** La vía de servicio mide 3 u y va de  $P(1, 1, 1)$  a  $Q(3, 3, 2)$ . (El enunciado no da unidades; la solución oficial lo expresa como 3 decámetros, 30 metros.)

**Lo que puntúa.** Criterios específicos de Asturias 2025 (Pregunta 4, opción A): «Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado», sin reparto por pasos; la pregunta corresponde a los saberes de los bloques B (sentido de la medida) y C (sentido espacial) y vale el 25 % de la prueba. La solución oficial resuelve el a) igualando las dos rectas (sistema incompatible y vectores no proporcionales) y el b) con  $d = \frac{27}{9} = 3$  y los puntos  $(1, 1, 1)$  y  $(3, 3, 2)$ . Por cualquiera de los dos caminos del a), no te saltes el paso de descartar que sean paralelas.

**Error típico que te quita puntos.** Dar como distancia  $|\vec{AB}| = \sqrt{27} \approx 5,2$ :  $A$  y  $B$  son los puntos con parámetro 0, no los más cercanos. La distancia mínima va siempre por la perpendicular común.

## 10 Ejercicio resuelto: puntos a una distancia dada y ángulo con el eje Z (Comunidad Valenciana 2026)

### PAU COMUNIDAD VALENCIANA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 3, APARTADO 3.2 (A ELEGIR ENTRE 3.1 Y 3.2; 2,5 PUNTOS)

Consideramos la recta  $s$  del espacio con ecuación:

$$\frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}.$$

Se pide:

- 3.2.1)** Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto  $(1, 1, 1)$  y es perpendicular a  $s$ . (0,5 puntos)
- 3.2.2)** Encontrar los puntos de la recta  $s$  que están a distancia 4 del origen. (1 punto)
- 3.2.3)** Calcular el ángulo que forma la recta  $s$  con el eje Z. (1 punto)

#### Apartado 3.2.1)

1. Es de planos (Tema 5): el vídeo no lo resuelve. La idea: el vector director de  $s$ ,  $\vec{v} = (0, 1, -1)$  (ver el 3.2.2), es normal al plano, que pasa por  $(1, 1, 1)$ :  $0(x-1) + 1(y-1) - 1(z-1) = 0$ .

**SOLUCIÓN**  $y - z = 0$ .

### Apartado 3.2.2)

1. Un 0 en un denominador de la ecuación continua no es dividir entre cero: debajo van las coordenadas del vector director, y un 0 significa que la recta no avanza en  $x$ . Con el 1 que no se ve bajo  $y - 1$ :  $s$  pasa por  $(1, 1, 1)$  con  $\vec{v} = (0, 1, -1)$ .
2. En paramétricas:  $x = 1, y = 1 + \lambda, z = 1 - \lambda$ . El punto genérico es  $X(1, 1 + \lambda, 1 - \lambda)$ .
3. Distancia al origen igual a 4, elevando al cuadrado:  $1 + (1 + \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2 = 16$ . Al desarrollar, los dobles productos  $2\lambda$  y  $-2\lambda$  se anulan:  $3 + 2\lambda^2 = 16$ , así que  $\lambda^2 = \frac{13}{2}$ .
4. Dos soluciones:  $\lambda = \pm\sqrt{\frac{13}{2}} = \pm\frac{\sqrt{26}}{2}$  (racionalizando), es decir, dos puntos. Comprobación:  $1 + \left(1 \pm \frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 + \left(1 \mp \frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 = 3 + 2 \cdot \frac{13}{2} = 16 = 4^2$ .

**SOLUCIÓN**  $P_1\left(1, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}\right) \approx (1; 3,55; -1,55)$  y  $P_2\left(1, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}\right) \approx (1; -1,55; 3,55)$ .

### Apartado 3.2.3)

1. El ángulo de dos rectas es el de sus vectores directores, tomando el menor (entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ ):  
 $\cos \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{v}| |\vec{k}|}$ . El eje Z pasa por el origen con vector director  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ .
2.  $\vec{v} \cdot \vec{k} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$ , en valor absoluto 1;  $|\vec{v}| = \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2}$  y  $|\vec{k}| = 1$ . Así que  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
3.  $s$  y el eje Z ni siquiera se cortan (en  $s$ , la  $x$  vale siempre 1; en el eje, 0): se cruzan, pero el ángulo se mide igual, con sus direcciones. Y tiene sentido:  $\vec{v}$  avanza lo mismo en  $y$  que en  $z$ , así que va a medio camino entre las dos direcciones.

**SOLUCIÓN**  $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$ , es decir,  $\frac{\pi}{4}$  rad.

**Lo que puntúa.** Los criterios de corrección de la Comunidad Valenciana 2026 no reparten la puntuación por pasos: dan las soluciones ( $y - z = 0$ ; los puntos  $\left(1, 1 \pm \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 \mp \frac{\sqrt{26}}{2}\right)$ ; y  $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$  radianes) y avisan: «En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado». El examen añade que los resultados «deberán estar siempre debidamente justificados», que a partir de la tercera falta de ortografía se deducen 0,10 puntos (hasta un máximo de un punto) y que por la redacción y la presentación se puede deducir hasta medio punto. Cierra cada apartado con una frase completa.

**Error típico que te quita puntos.** Olvidar el  $\pm$  y dar un solo punto. Y quitar el valor absoluto del coseno: con  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  saldrían  $135^\circ$ , y entre dos rectas el ángulo nunca pasa de  $90^\circ$ .

# Conceptos clave

## Ángulo de dos rectas

El menor de los que forman sus vectores directores, entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ :  $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$ . Se define también para rectas que se cruzan.

## Ángulo de dos planos

El menor de los que forman sus vectores normales:  $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$ .

## Distancia de un punto a un plano

La longitud del segmento perpendicular del punto al plano:  $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

## Rectas que se cruzan

Rectas no paralelas y sin ningún punto común; no hay un plano que las contenga a las dos. Su producto mixto  $[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]$  es distinto de 0.

## Proyección ortogonal

El pie  $M$  de la perpendicular trazada desde un punto a un plano o a una recta: el punto del plano o de la recta más cercano al punto.

## Plano mediador

El plano de los puntos que equidistan de  $A$  y de  $B$ : perpendicular a  $\vec{AB}$  por el punto medio del segmento.

## Ángulo de una recta y un plano

El que forma la recta con su proyección sobre el plano; es el complementario del de  $\vec{v}$  y  $\vec{n}$ :  $\sin \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| |\vec{n}|}$ .

## Vector normal de un plano

Vector perpendicular al plano. En  $Ax + By + Cz + D = 0$  es  $\vec{n} = (A, B, C)$ .

## Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto a su proyección sobre la recta:  $\frac{|\vec{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$ , con  $A \in r$ .

## Perpendicular común

La recta que corta a dos rectas que se cruzan y es perpendicular a las dos. El segmento entre los puntos de corte mide la distancia entre las rectas.

## Punto simétrico

El punto  $P'$  tal que el centro de simetría (o la proyección  $M$ , si es respecto a un plano o una recta) es el punto medio de  $P$  y  $P'$ :  $P' = 2M - P$ .

## Siete reglas que valen puntos

### Ángulos

Valor absoluto arriba: siempre entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ .

### Recta-plano

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| |\vec{n}|} \text{ (seno, no coseno).}$$

### Punto-plano

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ con el plano igualado a cero.}$$

### Punto-recta

$$\frac{|\vec{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}, \text{ con } A \in r.$$

### Se cruzan

$$\frac{|[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}; \text{ los extremos, con } \vec{PQ} \perp \vec{u} \text{ y } \vec{PQ} \perp \vec{v}.$$

### Paralelos

Primero justifica la posición; si se cortan, la distancia es 0. Si son paralelos, mide desde un punto.

### Simétrico

Proyección  $M$  y después  $P' = 2M - P$ . Comprueba con la ecuación del plano.

## Cómo te lo pueden preguntar

- Calcula la distancia de un punto a un plano: salió en 6 de las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, casi siempre como un apartado de un ejercicio más largo.
- Halla el simétrico de un punto respecto a un plano o su proyección ortogonal sobre él (también en 6 de las 28).
- Estudia la posición de una recta y un plano, o de dos rectas, y calcula la distancia entre ellos.
- Halla la distancia entre dos rectas que se cruzan y los puntos de la perpendicular común.
- Calcula la distancia de un punto a una recta o el simétrico de un punto respecto a una recta o a otro punto.
- Calcula el ángulo entre dos rectas, entre una recta y un plano o entre dos planos.
- Encuentra los puntos de una recta, o los valores de un parámetro, que están a una distancia dada de un punto o de un plano.
- Calcula el área de un triángulo o el volumen de un tetraedro dados por sus vértices.

## No lo confundas

- Ángulo recta-plano (con el **seno**) con el ángulo de dos rectas o de dos planos (con el **coseno**).
- La proyección  $M$  (en el plano) con el simétrico  $P' = 2M - P$  (al otro lado).
- $|\vec{AB}|$ , entre los puntos con parámetro 0, con la distancia entre dos rectas que se cruzan.
- Rectas **perpendiculares** ( $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ; pueden cortarse o cruzarse) con rectas que **se cruzan** (no están en un mismo plano).
- $[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$  con «se cortan»: también vale 0 si las rectas son paralelas. Mira antes si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son proporcionales.
- El atajo  $\frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$  (solo con los mismos  $A, B, C$  en los dos planos) con planos que solo tienen coeficientes proporcionales: divide antes.

## Ponte a prueba

**PAU Castilla-La Mancha 2025, Ejercicio 2, apartado b)** (a elegir entre a) y b); 2,5 puntos). Sea la recta  $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$  y el plano  $\pi \equiv x - y + 3z = 0$ . b.1) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a la recta  $r$  y es perpendicular al plano  $\pi$ . b.2) [1,25 puntos] Calcula el ángulo entre la recta  $r$  y el plano  $\pi$  teniendo en cuenta que se cortan en el punto  $A(0, 0, 0)$ .

**Solución:** b.1) El plano pasa por  $A(0, 0, 0)$  y tiene como vectores directores  $\vec{v}_r = (1, -1, 2)$  y  $\vec{n} = (1, -1, 3)$ . Su vector normal es  $\vec{v}_r \times \vec{n} = (-1, -1, 0)$ , así que es  $x + y = 0$  (la solución oficial lo deja en paramétricas:  $(x, y, z) = \lambda(1, -1, 2) + \gamma(1, -1, 3)$ ). b.2) Recta y plano, con el seno:  $\sin \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}_r| |\vec{n}|} = \frac{|1 + 1 + 6|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}} = \frac{8}{\sqrt{66}} \approx 0,9847$ , y  $\alpha \approx 79,98^\circ$  (unos 1,396 rad). La solución oficial redondea antes el seno a 0,9847 y da  $79,96^\circ$ .

**PAU Cantabria 2026, Apartado 3** (Bloque C, 2,5 puntos). Considera los puntos  $A = (0, 0, 4)$ ,  $B = (-3, 0, 0)$  y  $C = (0, -2, 0)$ . a) [0,5 puntos] Halla la ecuación general o implícita del plano que contiene a  $A$ ,  $B$  y  $C$ . b) [1 punto] Calcula la distancia entre el punto  $P = (1, 1, 1)$  y la recta que contiene a  $A$  y  $B$ . c) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro formado por los vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D = (0, 0, 0)$ .

**Solución:** a)  $\overrightarrow{AB} = (-3, 0, -4)$  y  $\overrightarrow{AC} = (0, -2, -4)$ ;  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-8, -12, 6)$ , proporcional a  $(4, 6, -3)$ . Por  $A$ :  $4x + 6y - 3z + 12 = 0$ . b) Con  $\overrightarrow{AP} = (1, 1, -3)$ :  $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = (-4, 13, 3)$ , de módulo  $\sqrt{194}$ , y  $|\overrightarrow{AB}| = 5$ , así que  $d = \frac{\sqrt{194}}{5} \approx 2,79$  u. c)  $V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}] \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{24}{6} = 4$  u<sup>3</sup>. (Las tres aristas que salen de  $D$  son perpendiculares y miden 4, 3 y 2:  $\frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4$ .)

**PAU Galicia 2026, Pregunta 4, apartado 4.2** (2 puntos). Considérense los puntos  $P(1, 0, 1)$ ,  $Q(0, 1, 0)$  y  $R(1, 1, 1)$ . 4.2.1. Demuestre que  $P$ ,  $Q$  y  $R$  no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano  $\pi$  que pasa por ellos. 4.2.2. Calcule el valor o valores de  $a$  que hacen que la distancia del punto  $S(a, 0, 0)$  a ese plano  $\pi$  sea igual a  $\sqrt{2}$  unidades de longitud.

**Solución:** 4.2.1.  $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, -1)$  y  $\overrightarrow{PR} = (0, 1, 0)$ , con  $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (1, 0, -1) \neq \vec{0}$ : no son proporcionales, así que  $P$ ,  $Q$  y  $R$  no están alineados. Con esa normal y el punto  $P$ :  $\pi \equiv x - z = 0$  (comprobación:  $Q$  y  $R$  también lo cumplen). 4.2.2.  $d(S, \pi) = \frac{|a - 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \iff |a| = 2$ : dos valores,  $a = 2$  y  $a = -2$ .

## Fuentes

1. [Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato \(Matemáticas II\)](#)
2. [Examen PAU Matemáticas II Madrid 2026 \(ordinaria\), con criterios específicos de corrección](#)
3. [Examen PAU Matemáticas II Asturias 2025 \(ordinaria\), con criterios específicos de corrección y soluciones](#)
4. [Examen PAU Matemáticas II Comunidad Valenciana 2026 \(ordinaria\)](#)
5. [Criterios de corrección PAU Matemáticas II Comunidad Valenciana 2026 \(ordinaria\)](#)
6. [Examen PAU Matemáticas II Castilla-La Mancha 2025 \(ordinaria\)](#)
7. [Soluciones y criterios de corrección PAU Matemáticas II Castilla-La Mancha 2025 \(ordinaria\)](#)
8. [Examen PAU Matemáticas II Cantabria 2026 \(ordinaria\)](#)
9. [Criterios de corrección PAU Matemáticas II Cantabria 2026 \(ordinaria\)](#)
10. [Examen PAU Matemáticas II Galicia 2026 \(ordinaria\)](#)
11. [Examen PAU Matemáticas II Extremadura 2026 \(ordinaria\)](#)

Apuntes de Farmeando PAU · [farmeandopau.com](#) · Revisados frente a fuentes. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios. ¿Un error? [contacto@farmeandopau.com](#).