Límites y continuidad

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en **farmeandopau.com** ›

Última revisión: 8 de noviembre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

Un **límite** dice a qué valor se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a un punto o se va al infinito, aunque en ese punto la función ni exista. Primero se **sustituye**: si sale un número, ese es el límite. El trabajo está en las **indeterminaciones** ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞…), que se deshacen con álgebra: factorizar, comparar grados, multiplicar por el conjugado o usar el número e. Con los límites se define la **continuidad**: f es continua en a si el límite existe y vale $f(a)$. De ahí sale el ejercicio de este tema que más se repite: **el valor del parámetro que hace continua una función a trozos**. El tema se cierra con el **teorema de Bolzano**, que asegura que una ecuación tiene solución. Los límites salieron en **9 de las 28** convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, y la continuidad con parámetros, junto con la derivabilidad del Tema 8, en **10 de las 28**.

1 Límites: laterales, en un punto y en el infinito

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se acerca tanto como quieras a L cuando x se acerca a a, sin llegar a valer a. Lo que pase **en** $x = a$ no cuenta: puede que $f(a)$ ni exista. Si x se acerca solo por la izquierda ($x < a$) se escribe $x \to a^-$, y solo por la derecha ($x > a$), $x \to a^+$: son los **límites laterales**.

- **El límite existe si y solo si existen los dos laterales y coinciden.** Es la herramienta para los puntos donde cambia la fórmula (funciones a trozos) y donde se anula un denominador.
- **Ejemplo:** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ no existe en $x = 1$, pero para $x \neq 1$ vale $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$, así que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Su gráfica es la recta $y = x + 1$ con un **agujero** en $(1, 2)$.
- **Límite infinito:** $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$. Los laterales no coinciden, así que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ **no existe**. Siempre que salga $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$, los límites laterales son infinitos y su **signo** se decide con cada lado: si coinciden, el límite es $+\infty$ o $-\infty$; si no, el límite no existe.
- **Límites en el infinito** (lo que pasa «a largo plazo»): un polinomio se comporta como su término de mayor grado; $e^x \to +\infty$ si $x \to +\infty$ y $e^x \to 0$ si $x \to -\infty$; $\ln x \to +\infty$ si $x \to +\infty$ y $\ln x \to -\infty$ si $x \to 0^+$.
- **Jerarquía de infinitos** (cuando $x \to +\infty$): $\ln x$ crece más despacio que cualquier potencia x^n con $n > 0$, y las potencias, más despacio que a^x con $a > 1$. Por eso $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = 0$. En la PAU conviene justificarlo con L'Hôpital (Tema 8).
- Lo que **no** es indeterminación, en la tabla de abajo.

Si al sustituir sale…	El límite es…	Ejemplo
$\frac{k}{\pm\infty}$ (k un número)	0	$\lim_{x\to+\infty} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = 0$
$\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$	$\pm\infty$ (signo con los laterales)	$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$
$(+\infty)+(+\infty)$, $(-\infty)+(-\infty)$, $\infty \cdot \infty$ o $k \cdot \infty$ con $k \neq 0$	$\pm\infty$ (regla de los signos)	$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 + e^x\right) = +\infty$
$a^{+\infty}$ con $a \geq 0$	$+\infty$ si $a > 1$; 0 si $0 \leq a < 1$	$\lim_{x\to+\infty} 0{,}5^x = 0$

Son indeterminaciones (el resultado depende de la función y hay que transformarla): $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, ∞^0 y 0^0. No todas entran en todas las comunidades: en **Murcia** solo entran $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ y $\frac{0}{0}$: el acta de coordinación de 16-09-2026 excluye 1^∞, 0^0 y una tercera que imprime ∞^∞ (seguramente quería decir ∞^0); las Orientaciones 2026-27 de **Andalucía** solo nombran $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ y $\frac{0}{0}$, y la guía 2027 de **Canarias**, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ y $0 \cdot \infty$.

$\frac{k}{0}$ no es 0 ni es una indeterminación

Con $\frac{k}{0}$ y $k \neq 0$ el límite es infinito: calcula los dos laterales para saber el signo. En Cantabria 2025 (resuelto más abajo), $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ en $x = -2$ da $\frac{-16}{0}$: por la izquierda $-\infty$ y por la derecha $+\infty$. En $x = 2$, en cambio, da $\frac{0}{0}$, que sí es una indeterminación.

2 Indeterminaciones ∞/∞ y ∞ - ∞

Aparecen sobre todo en los límites en el infinito. La idea es siempre la misma: quedarte con lo que **manda** (el término de mayor grado) o transformar la expresión hasta que deje de ser indeterminada. Para un cociente de polinomios, mira la tabla de abajo.

- **Con raíces cuenta el grado «efectivo»:** $\sqrt{x^2+1}$ se comporta como $|x|$. Así, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 2$, pero $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -2$, porque cuando $x < 0$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.
- $\infty - \infty$ **con raíces:** multiplica y divide por el **conjugado**.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{3}{2}.$$

- $\infty - \infty$ **con fracciones:** pasa a común denominador. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$.
- **Polinomios:** $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - 5x^3\right)$ es $\infty - \infty$, pero manda el término de mayor grado: $-5x^3 \to -\infty$.
- **«A largo plazo»**, en un problema con contexto, significa $\lim_{t\to+\infty} f(t)$. En Canarias 2025 (resuelto más abajo), la concentración de un fármaco, $\frac{9}{\sqrt{5x-1}}$, tiende a 0: el fármaco acaba desapareciendo de la sangre.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ cuando $x \to \pm\infty$	Límite	Ejemplo ($x \to +\infty$)
Grado de P menor que el de Q	0	$\frac{2x+1}{x^2+1} \to 0$
Grado de P igual al de Q	El cociente de los coeficientes principales	$\frac{3x^2-x}{x^2+5} \to 3$
Grado de P mayor que el de Q	$\pm\infty$ (según los signos de los coeficientes y de x)	$\frac{x^3}{x^2-4} \to +\infty$

Para justificarlo, divide el numerador y el denominador por la mayor potencia de x del denominador.

Error típico: raíces cuando $x \to -\infty$

Escribir $\sqrt{x^2+1} \approx x$ cuando $x \to -\infty$. Para x negativo, $\sqrt{x^2} = -x$, y el signo del resultado cambia: $\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ tiende a -2, no a 2. Si dudas, cambia x por $-t$ y haz $t \to +\infty$.

3 Indeterminación 0/0: factorizar o multiplicar por el conjugado

Sale al sustituir $x = a$ en un cociente cuyo numerador y denominador se anulan los dos. Si son polinomios, los dos son divisibles por $(x-a)$: se **factoriza** (con Ruffini o con identidades notables), se **simplifica** el factor común y se vuelve a sustituir. Los tres pasos, abajo.

- **Polinomios:**

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{4}{1} = 4.$$

- **Con raíces**, el conjugado:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+4)-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

- **Con sen, e^x o ln** (como $\frac{e^x-1}{x}$ o $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, que tienden a 1) no hay nada que factorizar: se resuelven con la **regla de L'Hôpital** del Tema 8. Es lo que piden, por ejemplo, Andalucía 2025, Aragón 2026 y Galicia 2026.

Sustituye

Si sale un número, ese es el límite. Si sale $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$, es infinito. Solo si sale $\frac{0}{0}$ sigues.

→

Factoriza y simplifica

Saca el factor $(x-a)$ del numerador y del denominador y simplifícalo: se puede, porque mientras te acercas $x \neq a$.

→

Vuelve a sustituir

Si sigue saliendo $\frac{0}{0}$, repite. Con raíces cuadradas, en vez de factorizar, multiplica por el conjugado.

Una discontinuidad evitable se arregla con el límite

Si $\frac{0}{0}$ sale en un punto donde la fórmula no está definida, el límite (si existe y es finito) es el valor que tiene que tomar f ahí para ser continua. En Cantabria 2025 se pedía el parámetro k para que $f(2) = e^k$ coincidiera con $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = 3$: $k = \ln 3$.

4 Indeterminación «1 elevado a infinito» y el número e

Aparece en las potencias $f(x)^{g(x)}$ en las que la base tiende a 1 y el exponente a infinito. No vale 1: 1^∞ es una indeterminación. El modelo es el número e: $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2{,}718$. Ojo: en **Murcia** no se evalúa en 2027 (acta de 16-09-2026), y las listas oficiales de Andalucía y de Canarias no la nombran.

- **La fórmula que se usa en la PAU:** si $f(x) \to 1$ y $g(x) \to \infty$,

$$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\,(f(x)-1)}.$$

  Sale de escribir $f^g = e^{g \ln f}$ y de que $\ln f$ se comporta como $f-1$ cuando $f \to 1$.

- **Ejemplo:** $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x = e^{\lim x \cdot \frac{3}{x}} = e^3$.

- **Ejemplo con un cociente:** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{2x}$. La base tiende a 1 y el exponente a $+\infty$. Como $\frac{x+2}{x-1}-1=\frac{3}{x-1}$:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\frac{3}{x-1}=6 \implies \text{el límite es } e^6.$$

- **Las otras tres** ($0\cdot\infty$, ∞^0 y 0^0) se pasan a cociente o se toman logaritmos, y se terminan con L'Hôpital (Tema 8). Por ejemplo, $\lim_{x\to0^+} x\ln x=0$.
- $0\cdot\infty$**: pásalo a cociente.** Baja uno de los dos factores al denominador y queda $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$: $x\ln x=\dfrac{\ln x}{1/x}$, que cuando $x\to0^+$ es $\frac{-\infty}{+\infty}$ y se resuelve con L'Hôpital (Tema 8): $\lim_{x\to0^+}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$. Elige como denominador el factor que se deriva fácil; casi nunca el logaritmo. En Baleares 2026 (ordinaria, $\frac{4x^3}{x^2+1}\ln x$ cuando $x\to0^+$, que vale 0) los criterios daban 0,25 puntos por reconocer la indeterminación $0\cdot\infty$ y otros 0,25 por transformarla en $\frac{\infty}{\infty}$.
- ∞^0 **y** 0^0**: toma logaritmos.** Si $L=\lim f(x)^{g(x)}$, entonces $\ln L=\lim g(x)\ln f(x)$, que es un $0\cdot\infty$. Por ejemplo, $\lim_{x\to0^+}x^x$: $\ln L=\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$, así que $L=e^0=1$. En Murcia el acta de 2027 excluye «1^∞, 0^0, ∞^∞» (así lo escribe: ∞^∞ no es una indeterminación, y probablemente quiere decir ∞^0).

Error típico que te quita puntos

Decir que el límite vale 1 «porque la base tiende a 1». Con el exponente yendo a infinito, 1^∞ puede dar cualquier cosa: $\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\to e^3$, pero $\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^x\to e^0=1$. Escribe siempre la indeterminación $[1^\infty]$ antes de aplicar la fórmula: en Castilla-La Mancha 2026 (5.1 a), «resolver correcta y razonadamente el límite» vale 0,75 de 1 punto.

5 Continuidad y tipos de discontinuidad

Una función f es **continua en** $x=a$ si se cumplen tres cosas: existe $f(a)$; existe $\lim_{x\to a}f(x)$ (los dos laterales existen, son finitos y son iguales); y los dos valores coinciden:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Gráficamente, la curva pasa por a sin levantar el lápiz. Es continua en un intervalo si lo es en todos sus puntos (en un extremo cerrado basta con el lateral de dentro).

- **Funciones continuas en su dominio:** polinomios (en todo $\mathbb{R}$); racionales (salvo donde se anula el denominador); raíces de índice par (donde el radicando es ≥0); $\ln f(x)$ (donde $f(x)>0$); exponenciales, $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ (en todo $\mathbb{R}$); $\operatorname{tg}x$ (salvo en $\frac{\pi}{2}+k\pi$). Las sumas, productos, cocientes (con denominador no nulo) y composiciones de funciones continuas son continuas.
- **Dónde mirar:** en los puntos que anulan un denominador y, en las funciones a trozos, en los **puntos de cambio**. En el resto, la continuidad se justifica con la frase anterior.
- **Cómo se clasifica** una discontinuidad: con los dos límites laterales (tabla y figura de abajo).

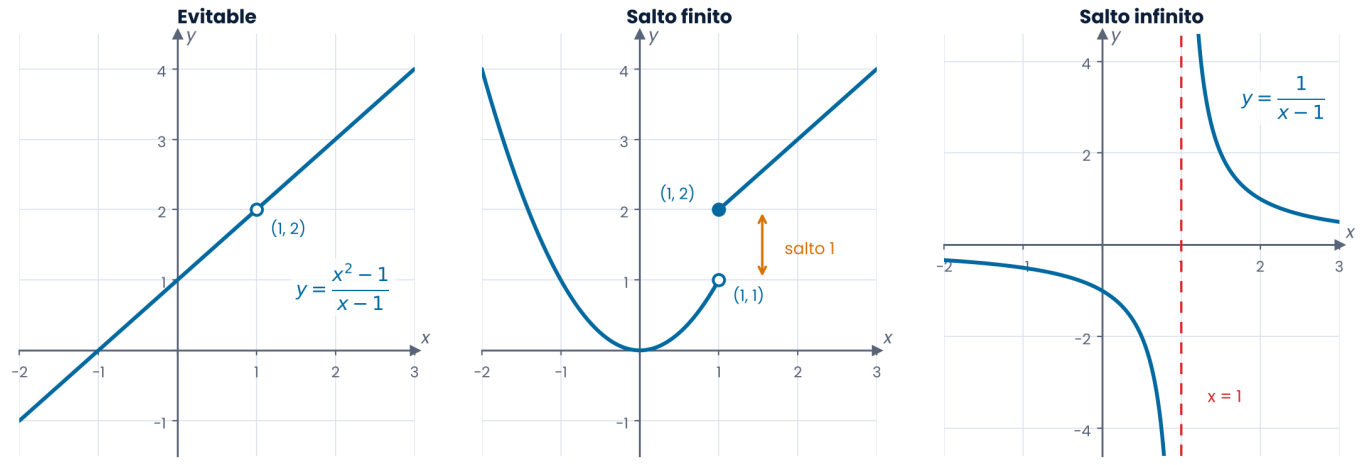
Discontinuidad en $x=a$	Qué pasa	Ejemplo
Evitable	Existe $\lim_{x\to a}f(x)$ y es finito, pero $f(a)$ no existe o es distinto	$\frac{x^2-1}{x-1}$ en $x=1$ (el límite es 2)
De salto finito	Los dos laterales son finitos pero distintos; el salto es su diferencia	x^2 si $x<1$ y $x+1$ si $x\geq1$: laterales 1 y 2, salto 1

Discontinuidad en $x = a$	Qué pasa	Ejemplo
De salto infinito (asintótica)	Algún lateral es $\pm\infty$: hay una asíntota vertical	$\dfrac{1}{x-1}$ en $x = 1$
Esencial	Algún lateral no existe: la función oscila sin acercarse a nada	$\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ en $x = 0$

Las tres últimas son **inevitables**: ningún valor de $f(a)$ las arregla. En la evitable basta con definir $f(a)$ como el límite.

«No está definida en a» no te dice el tipo

Que $f(a)$ no exista solo te dice que f no es continua en a. Para clasificar la discontinuidad tienes que **calcular los laterales**: si coinciden y son finitos, es evitable; si son finitos y distintos, de salto finito; si alguno es infinito, de salto infinito (asintótica); y si alguno no existe, esencial.



Los tres tipos de discontinuidad más habituales. A la izquierda, evitable: $\frac{x^2-1}{x-1}$ es la recta $y = x + 1$ con un agujero en $(1, 2)$. En el centro, salto finito: x^2 hasta $x = 1$ (punto hueco en $(1, 1)$) y $x + 1$ desde $x = 1$ (punto relleno en $(1, 2)$). A la derecha, salto infinito: $\frac{1}{x-1}$ y su asíntota vertical $x = 1$.

6 Funciones a trozos y parámetros

Es el ejercicio de continuidad que más se repite: una función definida con dos o tres fórmulas y uno o dos **parámetros** que hay que ajustar para que «encaje» en los puntos de cambio. Cada trozo suele ser continuo en su intervalo (polinomios, exponenciales…); el peligro está en las **fronteras**.

- **Ejemplo sin parámetro (Asturias 2025, Pregunta 2, opción A):** $f(x) = \dfrac{x}{2}$ si $0 \le x < 4$ y $f(x) = 3 - (x-5)^2$ si $4 \le x$. Por la izquierda de 4, $\frac{4}{2} = 2$; por la derecha, $3 - (4-5)^2 = 2$; y $f(4) = 2$. Es continua en $x = 4$ y, por tanto, en todo su dominio, $[0, +\infty)$.
- **Ejemplo con parámetro:** $f(x) = x^2 + a$ si $x < 1$ y $f(x) = 2x + 3$ si $x \ge 1$. Los laterales valen $1 + a$ y 5, y $f(1) = 5$. Es continua si $1 + a = 5$, es decir, si $a = 4$. Para $a \neq 4$, en $x = 1$ hay un salto finito de $|a - 4|$.
- **Valor absoluto:** escríbelo a trozos antes de nada. $|x-2| = -(x-2)$ si $x < 2$ y $x - 2$ si $x \ge 2$; es continua en todo $\mathbb{R}$.
- **Un parámetro puede salir doble:** si la condición es de segundo grado, comprueba cada solución en los **demás** puntos de cambio. En Cataluña 2026 («Ponte a prueba»), $x = 0$ da $m = \pm 2$, pero $x = 2$ solo admite $m = -2$.
- Los pasos, abajo; la figura muestra un modelo continuo a trozos.

Cada trozo en su intervalo

Justifica que cada fórmula es continua donde se usa: polinómica, denominador que no se anula, radicando positivo… Si no lo es en algún punto, ese punto también hay que estudiarlo.

Cada punto de cambio $x = a$

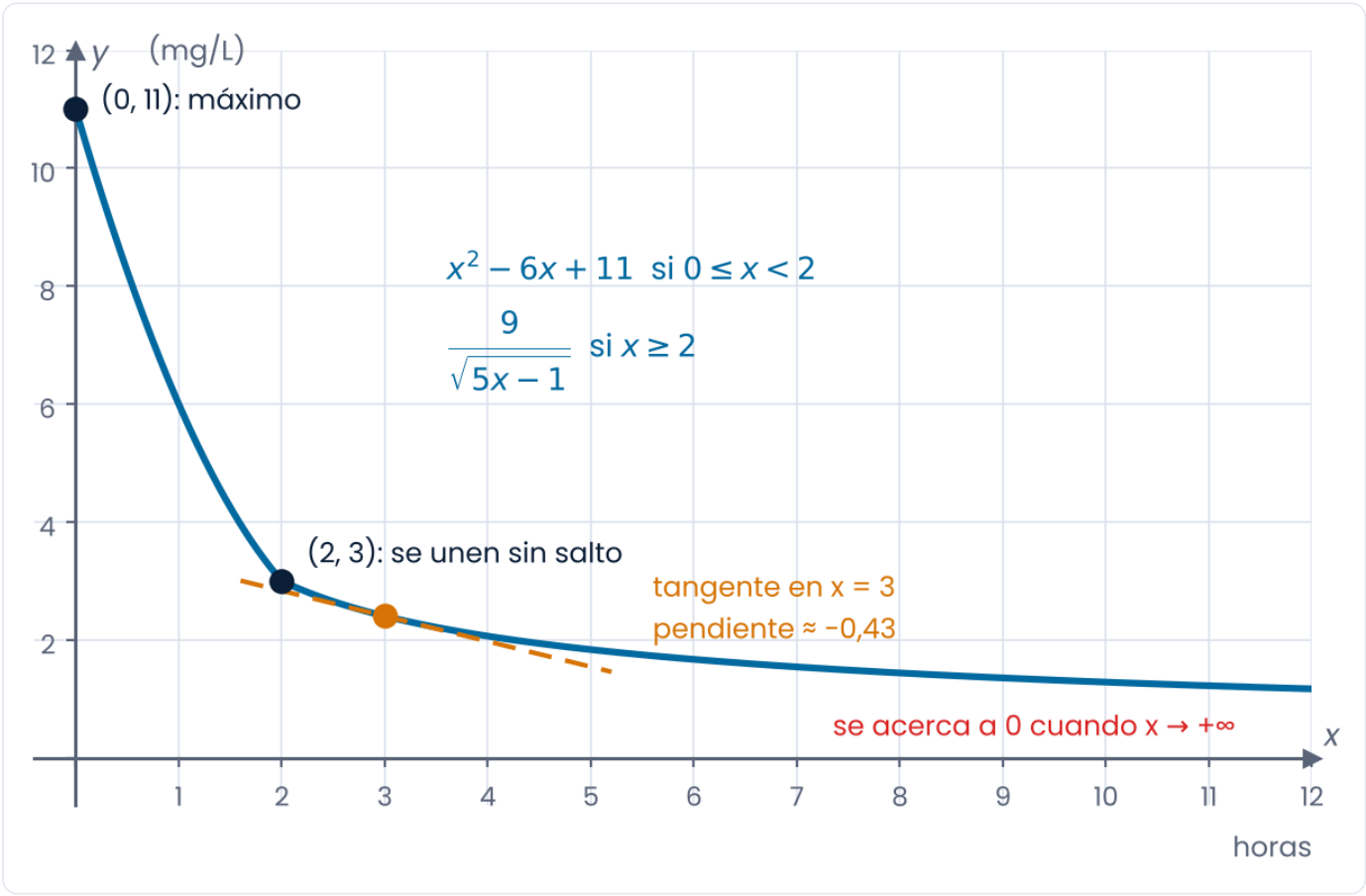
Calcula $f(a)$ con la fórmula que incluye $x = a$ (la del «$\leq$», la del «$\geq$» o la del «si $x = a$»), y los dos laterales, cada uno con la fórmula de su lado.

Iguala y resuelve

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ da una ecuación por cada punto de cambio. Con dos parámetros y un solo punto, la continuidad deja una relación entre ellos: la otra condición suele ser la derivabilidad (Tema 8).

Escribe los tres valores y la igualdad

Los dos laterales y $f(a)$, y después la conclusión. Es lo que hace la solución oficial de Canarias 2025: calcula $f(2)$ y los dos límites laterales y concluye que, como $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$, la función es continua en $x = 2$. Sus criterios avisan: «Se valorará todo lo escrito en cada respuesta y no sólo el resultado final».



El modelo del fármaco de Canarias 2025 (resuelto más abajo). Los dos trozos se unen en $(2, 3)$ sin salto: la función es continua. Baja desde 11 mg/L y se acerca a 0 a largo plazo, así que el eje OX $(y = 0)$ es una asíntota horizontal. La recta discontinua es la tangente en $x = 3$, de pendiente $f'(3) \approx -0{,}43$.

7 Teorema de Bolzano (y otros dos de funciones continuas)

Teorema de Bolzano. Si f es **continua en el intervalo cerrado** $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen **signos distintos** ($f(a) \cdot f(b) < 0$), existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Si la gráfica empieza por debajo del eje y acaba por encima sin levantar el lápiz, tiene que cruzarlo. En **Murcia**, el acta de coordinación de 16-09-2026 dice que el teorema de Bolzano no se evaluará en 2027; las listas oficiales de Andalucía (Orientaciones 2026-27) y de Canarias (guía 2027) no lo nombran.

- **Ejemplo:** la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una solución en $(0, 1)$. $f(x) = x^3 + x - 1$ es polinómica, continua en $[0, 1]$, con $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$. Es **única** porque $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f es estrictamente creciente y solo puede cortar al eje una vez (figura de abajo).

- **Afinar el intervalo** (método de la bisección): $f(0{,}5) = -0{,}375 < 0$, así que la raíz está en $(0{,}5;\ 1)$; $f(0{,}75) \approx 0{,}172 > 0$, así que está en $(0{,}5;\ 0{,}75)$. Vale, aproximadamente, $0{,}682$.
- **Teorema de los valores intermedios** (consecuencia de Bolzano): si f es continua en $[a, b]$, toma **todos** los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Sirve para preguntas del tipo «¿alcanza el valor k?»: aplica Bolzano a $f(x) - k$.
- **Teorema de Weierstrass:** si f es continua en $[a, b]$, alcanza en ese intervalo un **máximo** y un **mínimo absolutos**. Lo usarás con los extremos absolutos (Tema 9).
- **«Con un error menor que una décima»** (Cataluña 2024, reserva; Extremadura 2023: «con un error menor que una décima»; Extremadura 2026: «menor de una décima»): tantea por décimas (o parte el intervalo por la mitad) hasta que mida $0{,}1$ **o menos**, y da cualquier punto de él: estará a menos de una décima de la raíz. Con $x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$ (Extremadura 2026, extraordinaria): $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 2 > 0$; $f(1{,}5) = -0{,}125 < 0$, raíz en $(1{,}5;\ 2)$; $f(1{,}6) = 0{,}176 > 0$, raíz en $(1{,}5;\ 1{,}6)$, que mide $0{,}1$: la solución es $x \approx 1{,}5$ (vale $1{,}54\ldots$). Y si la ecuación es $f(x) = g(x)$, aplica Bolzano a $h(x) = f(x) - g(x)$.
- **Lo que Bolzano no dice.** Es una implicación en un solo sentido: si $f(a) \cdot f(b) > 0$, puede haber raíces o no ($x^2 - 1$ en $[-2, 2]$ tiene dos), y si f no es continua, puede no haberlas aunque cambie de signo ($\frac{1}{x}$ en $[-1, 1]$). Y al revés: con cambio de signo puede haber **varias** raíces, salvo que f sea además estrictamente monótona. Galicia 2026 (ordinaria, 3.1 b y c) lo pregunta así: dibuja, cuando sea posible, una función continua con $f(a) \cdot f(b) < 0$ que corte al eje en más de un punto, primero sin más condiciones y después con $f' > 0$ (imposible).

Define la función

Para una ecuación $g(x) = h(x)$, usa $f(x) = g(x) - h(x)$: sus ceros son las soluciones.

Comprueba las hipótesis

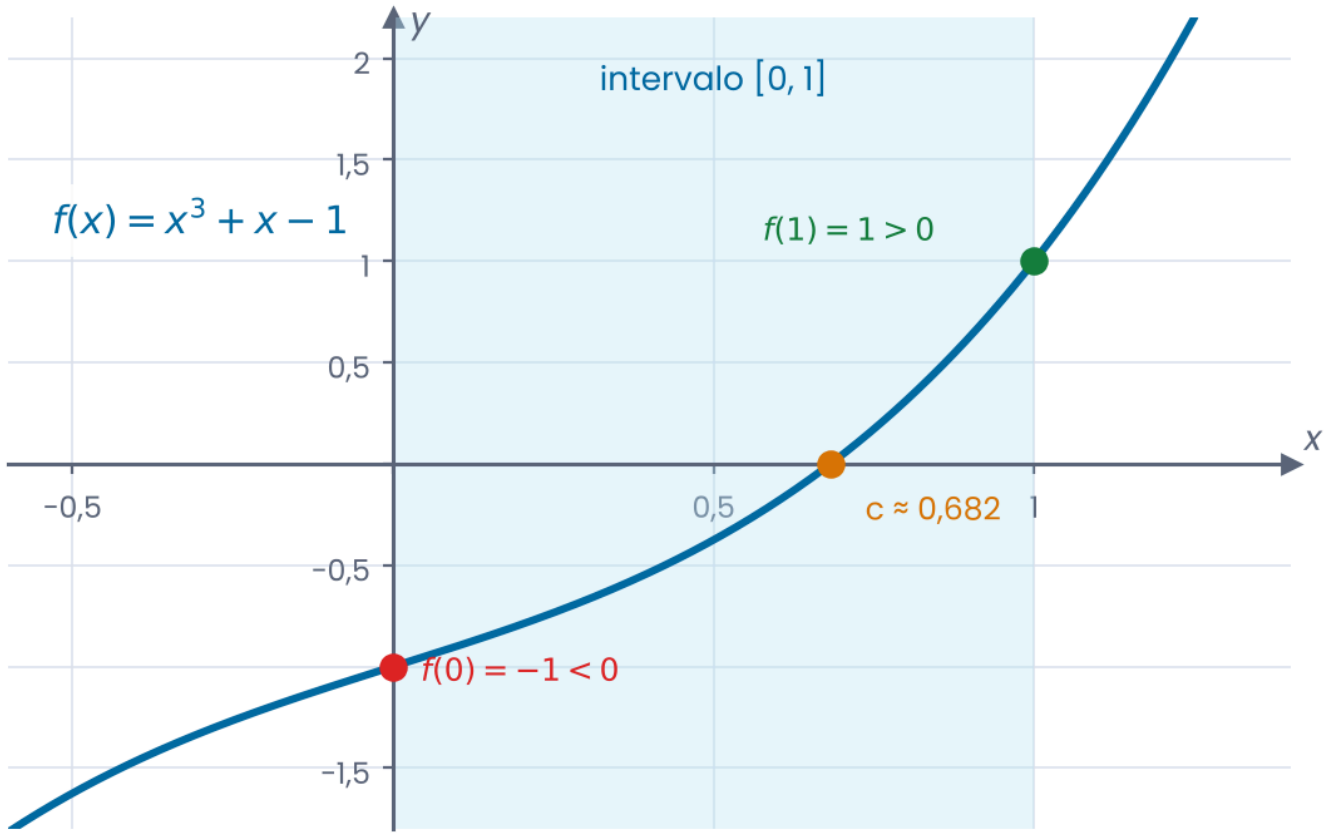
La continuidad en $[a, b]$ (dilo con palabras) y los signos de $f(a)$ y $f(b)$, con los números.

Concluye (y la unicidad, si la piden)

Bolzano da **al menos** una raíz en (a, b). Para ver que es **única**, demuestra que f es estrictamente monótona ($f' > 0$ o $f' < 0$) en todo el dominio si piden una sola raíz real, o en $[a, b]$ si piden una sola en ese intervalo (Tema 9).

Error típico: olvidar la continuidad

Sin continuidad en todo $[a, b]$ no hay Bolzano. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cumple $f(-1) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$, y nunca vale 0: no es continua en $x = 0$. Y Bolzano no dice cuántas raíces hay ni dónde están: solo «al menos una en (a, b)». En Castilla y León 2026, probar que la raíz es única vale 0,5 puntos aparte.



El teorema de Bolzano en el ejemplo $f(x) = x^3 + x - 1$. Es continua en $[0, 1]$, empieza por debajo del eje ($f(0) = -1$) y acaba por encima ($f(1) = 1$): tiene que cortarlo en algún $c \in (0, 1)$. Aquí, $c \approx 0{,}682$.

8 Ejercicio resuelto: valor del parámetro para que una función sea continua (Cantabria 2025)

PAU CANTABRIA 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · APARTADO 2 (BLOQUE B), CUESTIÓN 2A (A ELEGIR ENTRE 2A Y 2B; 2,5 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & \text{si } x \neq 2 \\ e^k, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$ un parámetro a determinar.

a) Determina el valor del parámetro k para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$. (0,75 puntos)

b) Si existen, halla las asíntotas de $f(x)$ y especifica de qué tipo son. (1 punto)

c) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$. (0,75 puntos)

Apartado a)

1. Fuera de $x = 2$, f es un cociente de polinomios: continua salvo donde se anula el denominador, $x^2 - 4 = 0$, es decir, en $x = \pm 2$. En $x = 2$ la función se define aparte, $f(2) = e^k$, y hay que ver si coincide con el límite.

2. Al sustituir, $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ da $\frac{8-8}{4-4}=\frac{0}{0}$: indeterminación. Los dos polinomios se anulan en $x=2$, así que los dos llevan el factor $(x-2)$: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ (diferencia de cubos, o Ruffini) y $x^2-4=(x-2)(x+2)$.

3. Simplificando:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{4+4+4}{4}=3.$$

   El límite existe: la expresión simplificada es continua en $x=2$, así que los dos laterales valen 3.

4. Continuidad en $x=2$: $f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)\iff e^k=3\iff k=\ln 3\approx 1{,}099$. Con cualquier otro k, en $x=2$ habría una discontinuidad **evitable**.

SOLUCIÓN f es continua en $x=2$ si y solo si $k=\ln 3$.

Apartado b)

1. Es del Tema 10 (asíntotas); aquí, la idea. **Vertical:** en $x=-2$ el numerador vale $-16\neq 0$ y el denominador 0: $\frac{-16}{0}$. Con la expresión simplificada $\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$, cuyo numerador vale 4 en $x=-2$, por la izquierda sale $-\infty$ y por la derecha $+\infty$: $x=-2$ es asíntota vertical. En $x=2$ no hay asíntota, porque el límite es finito.

2. **Horizontal:** no hay. El grado del numerador (3) es mayor que el del denominador (2), y $f(x)\to\pm\infty$ cuando $x\to\pm\infty$.

3. **Oblicua** $y=mx+n$: $m=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8}{x^3-4x}=1$ y $n=\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x-8}{x^2-4}=0$. Otra forma: al dividir, $\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}=x+\dfrac{4}{x+2}$.

SOLUCIÓN Asíntota vertical $x=-2$ y asíntota oblicua $y=x$ (en $+\infty$ y en $-\infty$). No tiene asíntotas horizontales.

Apartado c)

1. Es del Tema 8 (recta tangente): $y-f(1)=f'(1)(x-1)$. Cerca de $x=1$, $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$, y $f(1)=\dfrac{1-8}{1-4}=\dfrac{7}{3}$.

2. Derivando la forma $f(x)=x+\dfrac{4}{x+2}$ (válida para $x\neq\pm 2$): $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x+2)^2}$, así que $f'(1)=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$. Con la regla del cociente sobre la fórmula original sale lo mismo.

3. Tangente: $y-\dfrac{7}{3}=\dfrac{5}{9}(x-1)$, es decir, $y=\dfrac{5}{9}x+\dfrac{16}{9}$.

SOLUCIÓN $y=\dfrac{5x+16}{9}$.

Lo que puntúa. Rúbrica específica de Cantabria 2025 (Ejercicio 2A). a) «Calcula el valor del parámetro para que f sea continua en $x=2$»: 0,75 puntos, todo el apartado. b) Cálculo de la asíntota vertical, 0,30; comprobación de asíntotas horizontales, 0,30; cálculo de asíntotas oblicuas, 0,40. c) «Expresión de la recta tangente»: 0,75. Además, se puede penalizar «con hasta 0,25 por bloque si el rigor y la precisión de las respuestas no son adecuados», y los

errores numéricos en operaciones elementales restan como mucho 0,25 por bloque. En el a), escribe la indeterminación, la factorización y la igualdad $e^k = 3$: todo el apartado depende de ese razonamiento.

Error típico que te quita puntos. Sustituir $x = 2$, ver $\frac{0}{0}$ y concluir que «no hay límite» o que no existe k: $\frac{0}{0}$ no es un resultado, es la señal de que hay que factorizar. Y confundir la discontinuidad de $x = 2$ (evitable) con la de $x = -2$ (asíntota vertical).

9 Ejercicio resuelto: continuidad de un modelo a trozos y comportamiento a largo plazo (Canarias 2025)

PAU CANARIAS 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · BLOQUE 1 (ANÁLISIS), PREGUNTA 1 (2,5 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/L), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:

• Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.

• Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ \dfrac{9}{\sqrt{5x-1}} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

a) Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta. (0,5 puntos)

b) La concentración residual varía con el tiempo, comprobar que la velocidad de crecimiento instantánea de la concentración residual a las 3 horas de administrar Metabolix es mayor que -0.5 $(mg/L)/h$. (0,75 puntos)

c) ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averiguar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración. (0,75 puntos)

d) Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento? (0,5 puntos)

Apartado a)

1. **Cada trozo.** En $[0, 2)$, $x^2 - 6x + 11$ es polinómica: continua. En $[2, +\infty)$, $5x - 1 \geq 9 > 0$, así que la raíz y el cociente están bien definidos (el denominador no se anula): también es continua.
2. **Punto de cambio** $x = 2$. $f(2) = \dfrac{9}{\sqrt{10-1}} = \dfrac{9}{3} = 3$ (el $x = 2$ va con el segundo trozo). Por la izquierda, $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(x^2 - 6x + 11\right) = 4 - 12 + 11 = 3$. Por la derecha, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{9}{\sqrt{5x-1}} = \dfrac{9}{3} = 3$.
3. Los dos laterales coinciden con $f(2)$: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3 = f(2)$.

SOLUCIÓN Sí: el modelo es continuo en todo su dominio, $[0, +\infty)$.

Apartado b)

1. Es del Tema 8: la velocidad instantánea es la **derivada**. Para $x > 2$, con la regla de la cadena:

$$f(x) = 9\,(5x-1)^{-1/2} \implies f'(x) = 9 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)(5x-1)^{-3/2} \cdot 5 = \frac{-45}{2(5x-1)\sqrt{5x-1}}.$$

2. En $x = 3$: $5 \cdot 3 - 1 = 14$, así que $f'(3) = \dfrac{-45}{28\sqrt{14}} \approx -0{,}43$ (mg/L)/h.
3. Como $-0{,}43 > -0{,}5$, la afirmación es cierta: la concentración baja, pero más despacio que $0{,}5$ mg/L por hora.

SOLUCIÓN $f'(3) = -\dfrac{45}{28\sqrt{14}} \approx -0{,}43 > -0{,}5$: es cierto.

Apartado c)

1. Es del Tema 9 (monotonía). En $(0, 2)$, $f'(x) = 2x - 6 < 0$, porque $x < 2$ da $2x - 6 < -2$. En $(2, +\infty)$, $f'(x) = \dfrac{-45}{2(5x-1)\sqrt{5x-1}} < 0$. En $x = 2$ la función no es derivable (las derivadas laterales valen -2 y $-\frac{5}{6}$), pero es continua, así que no hay ningún salto que la haga subir.
2. Por tanto, f es **decreciente** en todo $[0, +\infty)$ y el máximo está al principio: $f(0) = 11$.

SOLUCIÓN Sí, siempre disminuye. La concentración es máxima en $x = 0$, en el momento de la administración, y vale 11 mg/L.

Apartado d)

1. «Pasado un largo periodo de tiempo» es el límite cuando $x \to +\infty$, con el segundo trozo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = \left[\frac{9}{+\infty}\right] = 0.$$

SOLUCIÓN La concentración tiende a 0 mg/L: el fármaco acaba desapareciendo de la sangre. En la gráfica, $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Lo que puntúa. Canarias 2025 no reparte la puntuación por pasos: cada apartado vale lo que indica el examen (0,5, 0,75, 0,75 y 0,5) y se aplican los criterios generales. Los que más pesan aquí: «Se valorará todo lo escrito en cada respuesta y no sólo el resultado final»; «Los cálculos intermedios hay que hacerlos siempre en forma exacta» (deja $f'(3) = \frac{-45}{28\sqrt{14}}$ y aproxima solo al final); y «Se exige utilizar correctamente los signos de igualdad y de aproximación» ($\approx$, no $=$, con $-0{,}43$). La solución oficial sigue los mismos pasos: continuidad de cada tramo, límites laterales en $x = 2$, $f'(3) \approx -0{,}43$, $f(0) = 11$ mg/L y límite 0.

Error típico que te quita puntos. Estudiar solo los trozos y olvidar el punto de cambio $x = 2$, que es lo que de verdad se pregunta en el a). Y en el b), escribir $f'(3) = -0{,}43$ con «$=$»: es un valor aproximado.

10 Ejercicio resuelto: una sola raíz real con el teorema de Bolzano (Castilla y León 2026)

PAU CASTILLA Y LEÓN 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · APARTADO 2, PROBLEMA 2A (A ELEGIR ENTRE 2A Y 2B; 2,5 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

a) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-5}{\sqrt{x}}\,dx$. (1,25 puntos)

b) Probar que la función $f(x)=2-e^x$ posee una sola raíz real, encontrando un intervalo que la contenga. (1,25 puntos)

Apartado a)

1. Es del Tema 12 (integral definida). Se separa en potencias: $\dfrac{x^3-5}{\sqrt{x}} = x^{5/2} - 5x^{-1/2}$, y una primitiva es $F(x) = \dfrac{2}{7}x^{7/2} - 10\sqrt{x}$.
2. Barrow: $F(1) - F(0) = \left(\dfrac{2}{7} - 10\right) - 0 = -\dfrac{68}{7}$. Es lo que puntúan los criterios (hasta 0,25 por la Regla de Barrow).
3. **Un detalle de rigor:** el integrando no está definido en $x=0$ y, además, no está acotado (por el $-\frac{5}{\sqrt{x}}$, tiende a $-\infty$ cuando $x \to 0^+$), así que no se cumple la hipótesis de Barrow (f continua en $[0,1]$): es una integral **impropia**, que en 2.º no se estudia. Se calcula integrando en $[t,1]$, con $0<t<1$, y haciendo $t \to 0^+$:

$$\int_0^1 \frac{x^3-5}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left(F(1)-F(t)\right) = -\frac{68}{7} - \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{2}{7}t^{7/2} - 10\sqrt{t}\right) = -\frac{68}{7}.$$

Sale lo mismo que con Barrow porque F es continua en $x=0$. Si no lo fuera, Barrow daría un resultado falso: con $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ «saldría» -2, negativo con un integrando positivo, y esa integral ni siquiera existe.

SOLUCIÓN $-\dfrac{68}{7} \approx -9{,}714$.

Apartado b)

1. **Al menos una raíz (Bolzano).** $f(x)=2-e^x$ es continua en todo $\mathbb{R}$ (diferencia de una constante y una exponencial) y, en particular, en $[0,1]$. Además, $f(0)=2-1=1>0$ y $f(1)=2-e\approx -0{,}718<0$.
2. Es continua en $[0,1]$ y cambia de signo entre los extremos: por el teorema de Bolzano, existe al menos un $c\in(0,1)$ con $f(c)=0$.
3. **A lo sumo una raíz.** $f'(x)=-e^x<0$ para todo x: f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$, así que no puede valer 0 en dos puntos distintos (si $c_1<c_2$, entonces $f(c_1)>f(c_2)$).
4. Comprobación: esta ecuación se puede resolver a mano, $e^x=2 \iff x=\ln 2\approx 0{,}693$, que está en $(0,1)$.

SOLUCIÓN f tiene exactamente una raíz real, y está en el intervalo $(0, 1)$: es $x = \ln 2$.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Castilla y León 2026 (Problema 2A). a) «Hasta 1 por el cálculo de la integral indefinida. Hasta 0,25 por la aplicación correcta de la Regla de Barrow.» b) «Hasta 0,5 por probar que existe a lo sumo una raíz real. Hasta 0,75 por probar que existe al menos una raíz real, indicando un intervalo que la contenga.» Las dos partes del b) puntúan por separado: Bolzano solo da la existencia. Los criterios generales penalizan la falta de justificación «en el 25% de la valoración» de la tarea: cita el teorema y comprueba sus hipótesis (continuidad y signos) con palabras. Y el examen pide «Respuestas numéricas exactas o con tres dígitos decimales».

Error típico que te quita puntos. Quedarse en Bolzano y decir que «tiene una sola raíz»: Bolzano asegura **al menos** una; la unicidad sale de la monotonía ($f' < 0$). Y no mencionar la continuidad: sin ella, el cambio de signo no garantiza nada.

COMPARATIVA FINAL

Indeterminaciones: qué hacer con cada una

Sale…	Qué haces	Ejemplo	Lo que cambia en tu comunidad
$\frac{k}{0}$, $k \neq 0$	No es indeterminación: $\pm\infty$; el signo, con los laterales	$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$	Nada
$\frac{\infty}{\infty}$	Divide por la mayor potencia (o compara grados); con exponenciales y logaritmos, L'Hôpital	$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3$	Entra en todas
$\infty - \infty$	Opera (común denominador) o multiplica por el conjugado	$\sqrt{x^2+5} - (x+2) \to -2$	Casi en todas; la guía de Canarias no la nombra y la lista de Cataluña solo dice «límites de funciones racionales»
$\frac{0}{0}$	Factoriza, conjugado o L'Hôpital (Tema 8)	$\frac{x^2-1}{x-1} \to 2$	Baleares: nombra L'Hôpital; si no, es error leve (del 20 al 50 % del apartado en las especificaciones de 2027; $-0{,}2$ en la ordinaria de 2026)
$0 \cdot \infty$	Pásalo a cociente	$x \ln x \to 0$	Baleares, Murcia, Andalucía y Canarias la nombran en sus listas 2026-27; cayó en Baleares y Galicia 2026
1^∞	$e^{\lim g\,(f-1)}$	$\left(1+\frac{3}{x}\right)^x \to e^3$	Baleares: sí (matriz 2026-27); Murcia: excluida (acta 2027); Andalucía y Canarias: no la nombran; Cataluña: solo «límites de funciones racionales»
∞^0, 0^0	Logaritmos: $\ln L = \lim g \ln f$	$x^x \to 1$ $(x \to 0^+)$	Murcia excluye 0^0 (su acta pone también «∞^∞», que no es indeterminación); Andalucía y Canarias no las nombran
¿Hay una raíz en (a, b)?	Bolzano: continua en $[a, b]$ y cambio de signo; para que sea única, monotonía	$x^3 + x - 1$ en $[0, 1]$	Murcia: no se evalúa (acta 2027); Andalucía y Canarias no lo nombran

Lo que cambia en cada comunidad sale de su documento oficial de 2026-27 (o de 2025-26 si aún no hay otro): está en la página de tu comunidad, en «Qué entra en Matemáticas II». Que una lista no nombre algo no quiere decir que no entre: mira el aviso de tu comunidad en el apartado de cada indeterminación.

Errores que te quitan puntos

Lo que más se confunde en este tema, y cómo decirlo bien.

✗ «Con la calculadora: $f(0{,}01) \approx 2$, $f(0{,}001) \approx 2$… el límite es 2».

✓ Una tabla de valores no demuestra el límite: hay que **calcularlo** (factorizar, conjugado, L'Hôpital…). Los criterios de Baleares 2026 (ordinaria) lo dicen sin rodeos: «La resolució per mitjà d'una taula de valors és incorrecta», y sus especificaciones de 2027 lo cuentan como error grave, que se penaliza con el 100 % del apartado: «Calcular el límits d'una funció calculant-la en valors "propers"». Usa la tabla solo para comprobar tu resultado.

Apartado 1: Límites: laterales, en un punto y en el infinito

✗ «$\lim_{x\to 2} \cdots = \frac{2}{3}$» (el resultado, sin pasos).

✓ Lo que puntúa son los pasos: los criterios de Aragón 2024 (extraordinaria, ejercicio 2) dicen que «los pasos en el cálculo del límite deben estar claros y justificarse», que «no es suficiente con decir que (x-2) tiende a 0 cuando x tiende a 2 para justificar que el numerador tiende a 2» y que, si se da el valor sin justificar, «la nota será 0,5 puntos» (de 2). Justifica el límite de cada parte y, si sale una indeterminación, escribe cuál es y cómo la resuelves.

Apartado 1: Límites: laterales, en un punto y en el infinito

✗ «$0 \cdot \infty = 0$, porque cero por cualquier cosa es cero».

✓ Es una **indeterminación**: cuando $x \to 0^+$, $x \cdot \frac{1}{x} \to 1$, $x^2 \cdot \frac{1}{x} \to 0$ y $x \cdot \frac{1}{x^2} \to +\infty$. Pásala a cociente ($\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$). En Baleares 2026 (ordinaria) reconocerla y transformarla valían 0,25 puntos cada cosa; Baleares, Murcia, Andalucía y Canarias la nombran en sus listas de 2026-27, y cayó también en Galicia 2026 (ordinaria, 3.2 d: $\sqrt{x}\ln x$).

Apartado 4: Indeterminación «1 elevado a infinito» y el número e

✗ «$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{x}\right)^x$: exponente que va a infinito, así que aplico $e^{\lim g\,(f-1)}$».

✓ La fórmula del número e solo vale si la **base tiende a 1**. Aquí $\frac{2x+1}{x} \to 2$: no hay indeterminación, es $2^{+\infty} = +\infty$. Calcula siempre primero el límite de la base y el del exponente; solo si sale 1^∞ (como en Aragón 2023, con $\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}$) se usa la fórmula.

Apartado 4: Indeterminación «1 elevado a infinito» y el número e

✗ «Para que la función a trozos sea continua basta con que lo sea en el punto de cambio».

✓ También tienes que decir que **cada trozo es continuo en su intervalo** (polinomios, exponenciales…, y que el denominador no se anula allí). Los criterios de Aragón 2024 lo penalizan con 0,4 puntos en la ordinaria y en la extraordinaria (ejercicio 1 a); en la ordinaria lo dicen así: si «sólo se centra en el 0 para calcular el valor de a y no indica la continuidad en el resto del dominio se penalizará con 0,4 puntos».

Apartado 6: Funciones a trozos y parámetros

✗ «$f(a) \cdot f(b) > 0$, así que f no se anula en (a, b)».

✓ Bolzano no dice nada en ese caso: $x^2 - 1$ cumple $f(-2) \cdot f(2) > 0$ y se anula dos veces. El teorema solo asegura una raíz cuando hay cambio de signo y continuidad, y no dice cuántas: para que sea una sola hace falta además que f sea estrictamente monótona.

Apartado 7: Teorema de Bolzano (y otros dos de funciones continuas)

✗ «Con error menor que una décima: $f(1{,}5) < 0$ y $f(2) > 0$, así que la raíz es $1{,}5$».

✓ El error lo da la **longitud del intervalo** que contiene la raíz: hay que llegar a uno que mida $0{,}1$ o menos, como $(1{,}5;\ 1{,}6)$. Lo piden Cataluña 2024 (reserva: «un intervalo de una décima de longitud») y Extremadura 2023 («con un error menor que una décima») y 2026 («menor de una décima»). Escribe cada paso con su signo.

Apartado 7: Teorema de Bolzano (y otros dos de funciones continuas)

✗ «$f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$: hay una raíz en $(0, 1)$» (sin decir de dónde sale).

✓ Nombra el teorema y comprueba sus hipótesis: «f es continua en $[0, 1]$ y cambia de signo, luego **por el teorema de Bolzano** existe $c \in (0, 1)$ con $f(c) = 0$». Extremadura 2026 (extraordinaria) lo pide en el enunciado («indicando los teoremas en los que te basas») y las especificaciones de Baleares para 2027 cuentan como error leve, del 20 al 50 % del apartado, «No enunciar el nom del teorema/resultat», con el ejemplo «pel teorema de Bolzano tenim que...».

Apartado 7: Teorema de Bolzano (y otros dos de funciones continuas)

Conceptos clave

Límite lateral

El valor al que se acerca $f(x)$ cuando $x \to a$ solo por la izquierda (a^-) o solo por la derecha (a^+). El límite existe si los dos laterales existen y coinciden.

Límite infinito

Cuando $f(x)$ crece (o decrece) sin cota al acercarse a a: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. Da una asíntota vertical.

Límite en el infinito

El valor al que se acerca $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Describe el comportamiento a largo plazo y, si es un número, da una asíntota horizontal.

Indeterminación

Expresión ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0) cuyo resultado no se conoce de antemano: hay que transformar la función para calcular el límite.

Número e

$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2{,}718$. Es la base de los límites 1^∞: $\lim f^g = e^{\lim g\,(f-1)}$.

Conjugado

El de $\sqrt{A} - B$ es $\sqrt{A} + B$. Al multiplicarlos queda $A - B^2$, sin la raíz. Sirve para $\frac{0}{0}$ e $\infty - \infty$ con raíces.

Función continua en un punto

f es continua en a si existe $f(a)$, existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y los dos son iguales.

Discontinuidad evitable

El límite en a existe y es finito, pero $f(a)$ no existe o es distinto. Se arregla definiendo $f(a)$ como el límite.

Discontinuidad de salto

Los laterales son distintos: de salto finito si los dos son finitos; de salto infinito (asintótica) si alguno es $\pm\infty$.

Teorema de Bolzano

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe al menos un $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

Teorema de los valores intermedios

Una función continua en $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Teorema de Weierstrass

Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza en él un máximo y un mínimo absolutos.

Función continua en un intervalo

La que es continua en todos sus puntos; en un intervalo cerrado $[a, b]$, por la derecha en a y por la izquierda en b.

Método de la bisección

Aproximar una raíz partiendo el intervalo por la mitad y quedándose con el trozo en el que cambia el signo, hasta la precisión pedida.

MODO PAU

Nueve reglas que valen puntos

Sustituye primero

Si sale un número, ya está. Solo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞… son indeterminaciones.

k/0

$\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$ es infinito: el signo, con los dos laterales.

0/0

Factoriza (Ruffini) o multiplica por el conjugado; con sen, e^x o $\ln$, L'Hôpital (Tema 8).

∞/∞

Compara grados. Con raíces y $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2} = -x$.

1 elevado a ∞

$e^{\lim g\,(f-1)}$, escribiendo antes $[1^\infty]$.

Continuidad

Los dos laterales y $f(a)$, los tres, en cada punto de cambio.

Bolzano

Continua en $[a, b]$ y signos opuestos: al menos una raíz. Para la unicidad, f' de signo constante.

Sin tablas

Un límite se calcula, no se adivina con valores: escribe la indeterminación y cómo la resuelves.

Cero por infinito

Pásalo a cociente: $f \cdot g = \frac{f}{1/g}$, y queda $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Cómo te lo pueden preguntar

- Calcula el valor de uno o dos parámetros para que una función a trozos sea continua (y a menudo también derivable, Tema 8): el tipo «continuidad y derivabilidad» salió en 10 de las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en 8 comunidades; en 7 de ellas, con uno o dos parámetros.
- Calcula límites con indeterminaciones ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞) o el comportamiento «a largo plazo» de un modelo: los límites salieron en 9 de las 28, en 6 comunidades.
- Estudia la continuidad de una función en su dominio y clasifica sus discontinuidades.
- Halla el valor de un parámetro para que una discontinuidad sea evitable: el límite $\frac{0}{0}$ tiene que existir y ser finito.
- Demuestra con el teorema de Bolzano que una ecuación tiene solución en un intervalo y, a veces, que es única: los teoremas de Bolzano, Rolle o Lagrange salieron en 5 de las 28.
- Decide si un modelo alcanza un valor (valores intermedios) o qué le pasa cuando el tiempo crece.

No lo confundas

- $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$ (el límite es infinito) con $\frac{0}{0}$ (indeterminación: hay que factorizar).
- «No existe $f(a)$» con «no existe el límite en a»: $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ no existe en $x = 1$, pero su límite sí, y vale 2.
- 1^∞ con 1: la base tiende a 1, pero el límite puede ser e^3, e^6…
- Discontinuidad evitable (el límite existe) con discontinuidad de salto (los laterales no coinciden).
- «Al menos una raíz» (Bolzano) con «una sola raíz» (Bolzano y, además, monotonía).
- $\sqrt{x^2} = x$ (solo si $x \geq 0$) con $\sqrt{x^2} = |x|$ (siempre).

Ponte a prueba

PAU Cataluña 2026, Ejercicio 1 (obligatorio, 2,5 puntos). Considere la siguiente función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}5e^{2x} & x\leq 0\\ (x+m)^2+1 & 0<x<2\\ 1 & 2\leq x\end{cases},$$

donde m es un parámetro real. 1.1. [1 punto] Determine los valores de m que hacen que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. Justifique la respuesta. 1.2. [1 punto] Haga un esbozo de la gráfica de $y=f(x)$ para el caso $m=-2$, y calcule el área delimitada por esta gráfica, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=3$. 1.3. [0,5 puntos] Para $m=-2$, encuentre un punto donde la recta tangente a $y=f(x)$ sea paralela a $y=-2x$. Calcule la ecuación de esta recta tangente.

Solución: 1.1. Los tres trozos son continuos en sus intervalos (exponencial, polinomio y constante). En $x=0$: $f(0)=5$ y $\lim_{x\to 0^+}\left((x+m)^2+1\right)=m^2+1$, así que $m^2+1=5$ y $m=\pm 2$. En $x=2$: $f(2)=1$ y, por la izquierda, $(2+m)^2+1$, así que $(2+m)^2=0$ y $m=-2$. En los dos puntos a la vez: **solo** $m=-2$. 1.2. (Tema 12) Con $m=-2$ la función es positiva, y el área es $\int_{-1}^{0}5e^{2x}\,dx+\int_{0}^{2}\left((x-2)^2+1\right)dx+\int_{2}^{3}1\,dx=\frac{5}{2}\left(1-e^{-2}\right)+\frac{14}{3}+1=\frac{49}{6}-\frac{5}{2e^2}\approx 7{,}83$ u². 1.3. (Tema 8) Pendiente -2: en el primer trozo, $f'(x)=10e^{2x}>0$, y en el tercero, $f'(x)=0$; en el segundo, $f'(x)=2(x-2)=-2$ da $x=1$, con $f(1)=2$. La tangente en $(1,2)$ es $y-2=-2(x-1)$, es decir, $y=-2x+4$.

PAU Castilla-La Mancha 2026, Pregunta 5.1, apartado a) (a elegir entre 5.1 y 5.2; 1 punto). Calcula justificadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x$

Solución: La base tiende a 1 y el exponente a $+\infty$: indeterminación $[1^\infty]$. Como $\frac{2x+1}{2x-3}-1=\frac{4}{2x-3}$:

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{4}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x-3}=2\implies\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x=e^2\approx 7{,}389.$$

Los criterios dan 0,75 puntos por resolver correcta y razonadamente el límite y 0,25 por la solución correcta. (El apartado b) es una integral por partes, del Tema 11.)

PAU Asturias 2026, Pregunta 2, opción B (2,5 puntos). Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax + 11 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Se pide (a) (0,75 puntos) Calcular el valor de A para el que f es una función continua. (b) (1,25 puntos) Si $A = 6$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. (c) (0,5 puntos) Para $A = 6$ ¿es $x = 2$ un extremo relativo de la función? ¿de qué tipo?.

Solución: (a) Los dos trozos son continuos (un polinomio, y una raíz con $5x - 1 > 0$ para $x \geq 2$). En $x = 2$: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 - 2A + 11 = 15 - 2A$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \sqrt{9} = 3$ y $f(2) = 3$. Es continua si $15 - 2A = 3$: $A = 6$. (b) (Tema 9) Para $x < 2$, $f'(x) = 2x - 6 < 0$: decrece en $(-\infty, 2)$. Para $x > 2$, $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-1}} > 0$: crece en $(2, +\infty)$. (c) Es continua en $x = 2$, decrece antes y crece después: $x = 2$ es un **mínimo relativo**, con $f(2) = 3$, aunque f no es derivable ahí (las derivadas laterales valen -2 y $\frac{5}{6}$).

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (Matemáticas II)
2. Examen PAU Matemáticas II Cantabria 2025 (ordinaria)
3. Criterios de corrección PAU Matemáticas II Cantabria 2025 (ordinaria)
4. Examen PAU Matemáticas II Canarias 2025 (ordinaria)
5. Examen PAU Matemáticas II Canarias 2025 (ordinaria), con criterios de calificación y soluciones
6. Examen PAU Matemáticas II Castilla y León 2026 (ordinaria)
7. Criterios de corrección PAU Matemáticas II Castilla y León 2026 (ordinaria)
8. Examen PAU Matemáticas II Cataluña 2026 (ordinaria)
9. Examen PAU Matemáticas II Castilla-La Mancha 2026 (ordinaria)
10. Soluciones y criterios de corrección PAU Matemáticas II Castilla-La Mancha 2026 (ordinaria)
11. Examen PAU Matemáticas II Asturias 2026 (ordinaria), con criterios específicos de corrección y soluciones
12. Examen PAU Matemáticas II Asturias 2025 (ordinaria), con criterios específicos de corrección y soluciones
13. Matemáticas II, Baleares 2026 (ordinaria): criterios de corrección (Universitat de les Illes Balears)
14. Matemáticas II, Aragón 2024 (extraordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Zaragoza – Comisión Organizadora de la PAU de Aragón)
15. Matemáticas II, Aragón 2024 (ordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Zaragoza – Comisión Organizadora de la PAU de Aragón)
16. Matemáticas II, Extremadura 2026 (extraordinaria): examen (Universidad de Extremadura)
17. Matemáticas II, Extremadura 2023 (ordinaria): examen (Universidad de Extremadura)
18. Matemáticas II, Cataluña 2024 (reserva): criterios de corrección (Generalitat de Catalunya)
19. Matemáticas II, Galicia 2026 (ordinaria): examen (CiUG)
20. Matemàtiques II · Especificacions dels criteris de correcció 2027 (UIB, 13-10-2026; en catalán)
21. Directrices y orientaciones generales. Curso 2026-2027. Matemáticas II (Distrito Único Andaluz)
22. Guía de contenidos evaluables de Matemáticas II, PAU 2027 (Subcomisión de Matemáticas II, PAU Canarias)
23. Acta de la reunión de coordinación de Matemáticas II para PAU2027 (Universidad de Murcia, 16-09-2026)
24. Matemàtiques II · Matriu d'especificacions (UIB, 22-9-2026; en catalán)
25. Matemàtiques: estructura del examen y saberes de la materia (Generalitat de Catalunya)
26. Real Decreto 534/2024, de 11 de junio, requisitos de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado y características básicas de la prueba de acceso (BOE, texto consolidado)

Imágenes: Tipos de discontinuidad: Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · Modelo del fármaco de Canarias 2025: Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · Teorema de Bolzano: Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta.

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 8 de noviembre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.