Derivadas

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en **farmeandopau.com** ›

Última revisión: 9 de noviembre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

La **derivada** $f'(a)$ mide lo rápido que cambia f en $x = a$: es la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica en ese punto, y se define como un límite. En las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026 no se pide calcularla por la definición: se usan las **reglas de derivación**, con la **regla de la cadena**, para tres cosas. La primera, decidir si una función a trozos es **derivable**: tiene que ser continua y sus derivadas laterales tienen que coincidir. La segunda, escribir la **recta tangente** $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Y la tercera, calcular límites $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ con la **regla de L'Hôpital**. El tipo «continuidad y derivabilidad» de funciones a trozos salió en **10 de las 28** convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026 (en 4, con dos parámetros y la derivabilidad), y la recta tangente, en **9**.

1 Derivada en un punto: la pendiente de la tangente

La **tasa de variación media** de f en $[a, a+h]$ es $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$: la pendiente de la **recta secante** que une los puntos de abscisas a y $a+h$. Si $h \to 0$, la secante se convierte en la **tangente**, y su pendiente es la **derivada**:

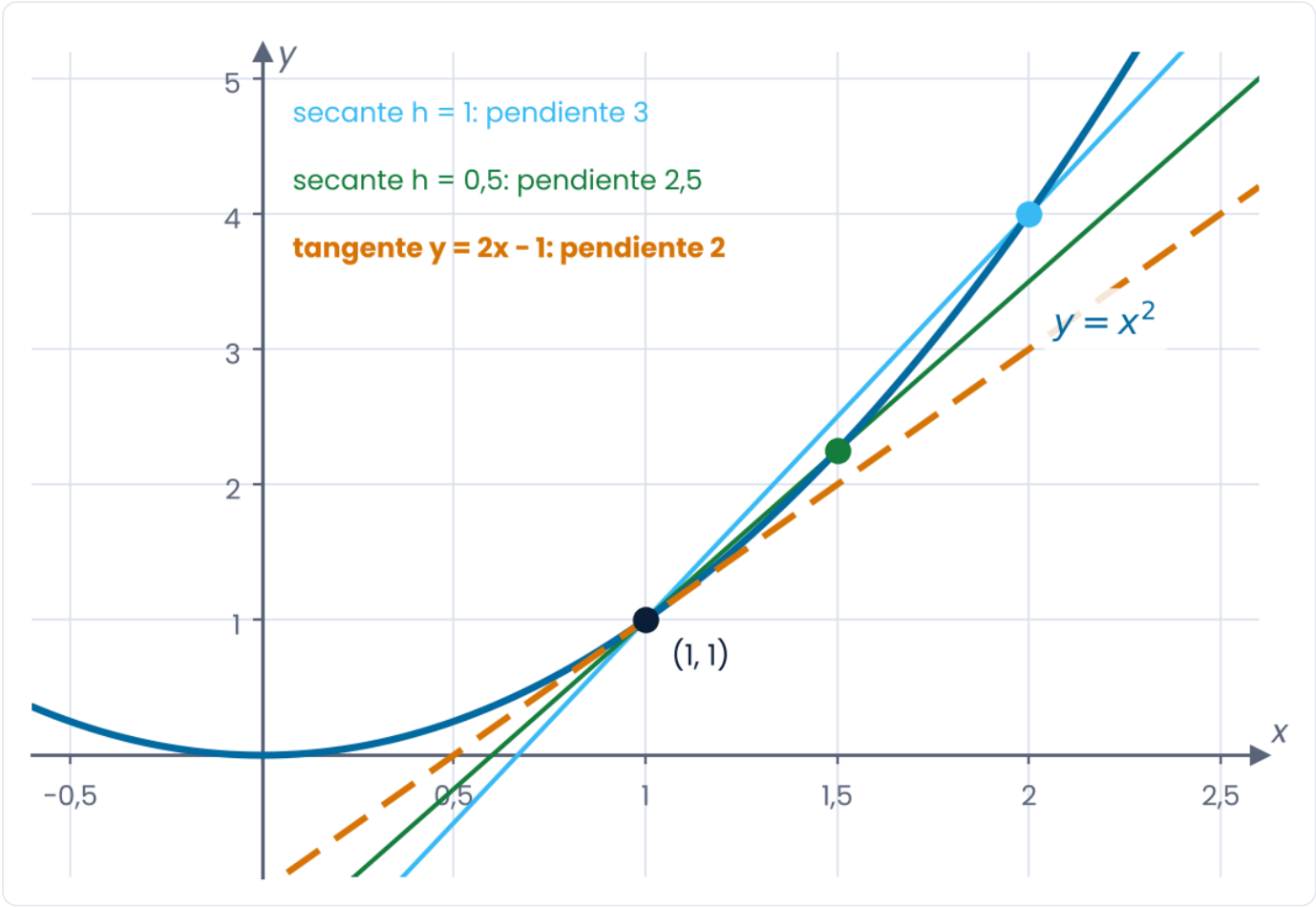
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Si este límite existe y es finito, f es **derivable** en a.

- **Por la definición, $f(x) = x^2$ en $a = 1$:** $\dfrac{(1+h)^2 - 1}{h} = \dfrac{2h + h^2}{h} = 2 + h \to 2$. Así que $f'(1) = 2$: la tangente en $(1, 1)$ tiene pendiente 2 y es $y = 2x - 1$ (figura de abajo).
- **La tasa de variación media, con unidades.** En Canarias 2025 (extraordinaria) la colonia de hormigas $H(t) = \dfrac{6400}{1 + 159\,e^{-0{,}5t}}$ (t en meses) pasa de 40 a unas 4591 hormigas el primer año: la solución oficial calcula $\mathrm{TVM}[0, 12] = \dfrac{H(12) - H(0)}{12 - 0} \approx 379$ **hormigas por mes**, y el segundo año unas 150. Interpretar es decir qué significa: crece cada vez más despacio. Divide siempre por la longitud del intervalo y di las unidades.
- **La función derivada** $f'(x)$ da la pendiente en cada punto. Por la definición, para $f(x) = \dfrac{1}{x}$: $\dfrac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \dfrac{-1}{x(x+h)} \to -\dfrac{1}{x^2}$, así que $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
- **Otra forma del mismo límite:** $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Es la cómoda para las derivadas laterales en un punto de cambio.
- **Como velocidad:** si $f(t)$ es una posición, una población o una concentración, $f'(t)$ es su **velocidad instantánea** de cambio, en unidades de f por unidad de tiempo. Canarias 2025 la llama «velocidad de

crecimiento instantánea»: allí $f'(3) \approx -0{,}43$ (mg/L)/h (resuelto en el Tema 7).

- **El signo de $f'(a)$:** si es positivo, la función sube en ese punto; si es negativo, baja; si es cero, la tangente es horizontal. Es la base del Tema 9.



De las secantes a la tangente. Para $f(x) = x^2$ en $a = 1$, las secantes con $h = 1$ y $h = 0{,}5$ tienen pendientes 3 y $2{,}5$. Al hacer $h \to 0$ se acercan a la tangente $y = 2x - 1$, de pendiente $f'(1) = 2$.

2 Derivabilidad y continuidad

Las **derivadas laterales** son los límites del cociente incremental por cada lado:

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \qquad f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

f es derivable en a si y solo si las dos existen, son **finitas** y **coinciden**.

- **Derivable implica continua.** Si f es derivable en a, es continua en a. Por eso, si no es continua, **no es derivable**: estudia siempre primero la continuidad.
- **El recíproco es falso.** $f(x) = |x|$ es continua en 0, pero $f'(0^-) = -1$ y $f'(0^+) = 1$: en $x = 0$ hay un **punto anguloso** (la gráfica hace un pico) y no es derivable. Tampoco lo es $\sqrt[3]{x}$ en 0: allí la tangente es vertical y la derivada sería infinita.
- **Atajo para funciones a trozos:** si f es continua en a, cada trozo es derivable a su lado y existen los límites laterales de $f'(x)$ (la derivada de cada trozo), entonces $f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} f'(x)$ y $f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$. Es el método que usan las soluciones oficiales. Si alguno de esos límites no existe, calcula la derivada lateral con la definición.
- **Con valor absoluto, escríbela a trozos.** $|u(x)|$ vale $u(x)$ donde $u \geq 0$ y $-u(x)$ donde $u < 0$. Así, $f(x) = \dfrac{1 + |x|}{1 - |x|}$ (Andalucía 2025, reserva 3, ejercicio 3) es $\dfrac{1 - x}{1 + x}$ si $x < 0$ y $\dfrac{1 + x}{1 - x}$ si $x \geq 0$: es continua

en 0, pero $f'(0^-) = -2$ y $f'(0^+) = 2$, así que no es derivable ahí (pico). Con $|f(x)|$ en general (Madrid 2023, extraordinaria): donde $f(a) = 0$ y $f'(a) \neq 0$, $|f|$ tiene un pico y **no es derivable**; en el resto es derivable. Con $f(x) = 2 + 2x - 2x^2$, eso pasa en $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, donde $f' = \mp 2\sqrt{5}$.

- **Si el punto va aparte, usa la definición.** Con $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ (Madrid 2026, modelo), no hay «trozo» que derivar en 0:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(h^2+1)}{h^2} = 1,$$

con L'Hôpital o con $\ln(1+t) \sim t$. Es derivable en 0 y la tangente allí es $y = x$.

- **Raíces y logaritmos:** $\sqrt{u}$ es derivable donde $u > 0$ (donde $u = 0$ la fórmula $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ no vale: si $u' \neq 0$, la derivada se va a infinito, y si también $u' = 0$, decide la definición, porque $\sqrt{x^2} = |x|$ tiene un pico y $\sqrt{x^4} = x^2$ es derivable), y $\ln u$, donde $u > 0$. Navarra 2024 (extraordinaria) pide demostrar que $\sqrt{2x^2 + 2x + 3}$ es continua en $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$: el discriminante de $2x^2 + 2x + 3$ es $4 - 24 < 0$, así que el radicando es siempre positivo y basta con decirlo. Y $\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ (Madrid 2023, ordinaria) no es derivable en $x = 1$: sus derivadas laterales son $-\infty$ y $+\infty$ (un pico con tangente vertical).
- Los casos posibles, en la tabla de abajo.

En $x = a$…	¿Continua?	¿Derivable?
Los laterales de f son distintos (salto)	No	No
Es continua, pero $f'(a^-) \neq f'(a^+)$ (pico)	Sí	No
Es continua, pero alguna derivada lateral es infinita (tangente vertical)	Sí	No
Es continua y $f'(a^-) = f'(a^+)$, finitas	Sí	Sí: la unión es «suave»

Error típico: igualar derivadas sin mirar la continuidad

Con $f(x) = x$ si $x < 0$ y $f(x) = x + 1$ si $x \geq 0$, las derivadas de los dos trozos valen 1, pero f no es derivable en 0: tiene un salto (0 por la izquierda y 1 por la derecha). El atajo de igualar f' por los dos lados solo vale **después** de comprobar que f es continua.

3 Funciones a trozos con parámetros: continua y derivable

Es el ejercicio tipo del tema: una función a trozos con uno o dos parámetros que hay que ajustar para que sea **continua y derivable** en el punto de cambio. La continuidad da una ecuación y la derivabilidad, otra. Los pasos, abajo.

- **Ejemplo (Galicia 2025, Pregunta 3, apartado 3.1):** $f(x) = kx^2 + 2x$ si $x \leq 1$ y $f(x) = x^2 - m$ si $x > 1$. Continuidad en $x = 1$: $k + 2 = 1 - m$, es decir, $k + m = -1$. Las derivadas valen $2kx + 2$ a la izquierda y $2x$ a la derecha; en $x = 1$, $2k + 2 = 2$, así que $k = 0$ y, con la primera ecuación, $m = -1$.
- **Con funciones que no son polinómicas** se hace igual. En Madrid 2026 (resuelto más abajo), $3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + b$ y $\dfrac{2e^x}{1+x^2}$ se unen en $x = 0$: la continuidad da $b = 2$ y la derivabilidad, $a = -2$ (figura de abajo).
- **Si un trozo da $\frac{0}{0}$ en el punto de cambio**, como $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ en $x = 1$ (Castilla-La Mancha 2026, en «Ponte a prueba»), simplifica antes de derivar: para $x \neq 1$ es $x + 1$.

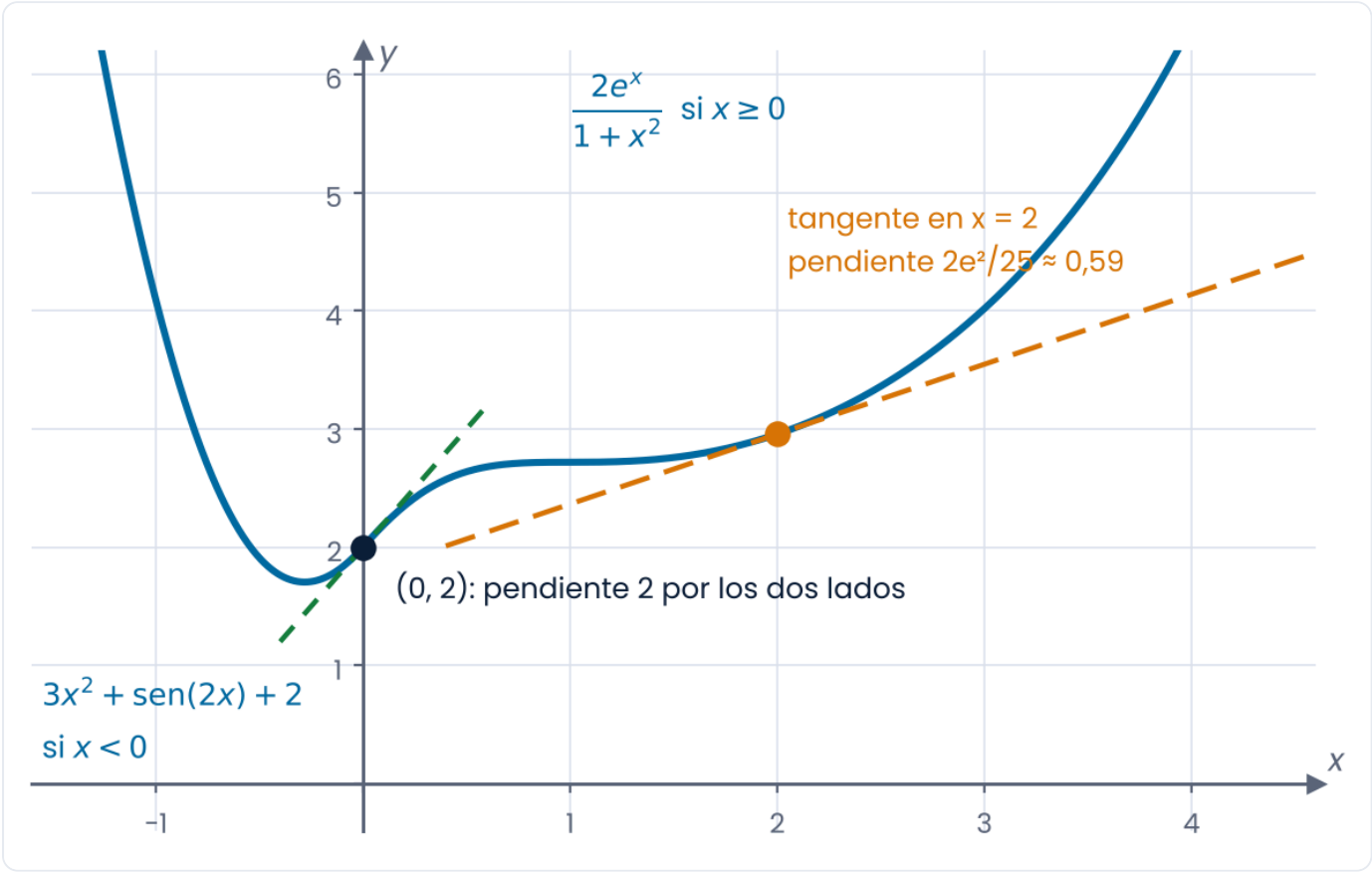
Continuidad en $x = a$
$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$: primera ecuación.

Deriva cada trozo
En los intervalos abiertos, con las reglas de derivación. En $x = a$ no se deriva «la fórmula»: se calculan los laterales.

Iguala las derivadas laterales
$f'(a^-) = f'(a^+)$: segunda ecuación. Resuelve el sistema y da la función resultante.

Plantear también puntúa

Los criterios de Castilla-La Mancha 2026 (5.2) reparten así los 2 puntos: plantear la condición de continuidad, 0,25; determinarla, 0,5; plantear la condición de derivabilidad, 0,25; calcular $f'(x)$, 0,5; determinar la condición de derivabilidad, 0,25; y obtener la solución correcta, 0,25. Escribe las condiciones con palabras y con límites, aunque las cuentas sean cortas.



La función de Madrid 2026 con $a = -2$ y $b = 2$ (resuelta más abajo). Los dos trozos se unen en $(0, 2)$ sin salto y sin pico: los dos llegan con pendiente 2 (recta discontinua corta). A la derecha, la tangente en $x = 2$, de pendiente $\frac{2e^2}{25} \approx 0{,}59$.

4 Reglas de derivación y regla de la cadena

Con la tabla de abajo y cuatro reglas se deriva cualquier función del Bachillerato. La **regla de la cadena** es la que más se olvida: si dentro hay otra función $u(x)$, se deriva «de fuera hacia dentro» y se multiplica por $u'(x)$:

$$\big(f(u(x))\big)' = f'\big(u(x)\big) \cdot u'(x).$$

- **Operaciones:** $(f \pm g)' = f' \pm g'$; $(k\,f)' = k\,f'$; $(f \cdot g)' = f'g + fg'$; $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- **Ejemplos:** $\big((x^2+1)e^{3x}\big)' = 2x\,e^{3x} + (x^2+1) \cdot 3e^{3x} = (3x^2 + 2x + 3)\,e^{3x}$; $\big(\ln(x^2+1)\big)' = \frac{2x}{x^2+1}$; $\big(\sqrt{5x-1}\big)' = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$; $\left(\frac{2e^x}{1+x^2}\right)' = \frac{2e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$.

- **Derivada logarítmica**, para potencias $f(x)^{g(x)}$: toma logaritmos y deriva. Con $y = x^x$: $\ln y = x \ln x$, $\dfrac{y'}{y} = \ln x + 1$, así que $y' = x^x(\ln x + 1)$. En **Canarias** no entra: el acta de coordinación de 30-09-2026 aclara que la derivación logarítmica «no será objeto de evaluación».
- **De la primitiva a la función:** si F es una primitiva de f, entonces $f = F'$, y basta con derivar. En Asturias 2026 (ordinaria, pregunta 3, opción A, a), con $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x^2\right) \cdot \pi x = \tfrac{\pi x}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x^2\right).$$

  La regla de la cadena da el πx.
- **Derivadas sucesivas:** f'' es la derivada de f', y así sucesivamente. Para $f(x) = x^3 - 3x$: $f'(x) = 3x^2 - 3$ y $f''(x) = 6x$.

Función	Derivada	Con la regla de la cadena ($u = u(x)$)
k (constante)	0	—
x^n	$n\,x^{n-1}$	$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^x	e^x	$(e^u)' = e^u\,u'$
a^x	$a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$(\operatorname{sen} u)' = \cos u \cdot u'$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$(\cos u)' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$
$\operatorname{tg} x$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$\operatorname{arc\,sen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arc\,sen} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arc\,cos} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arc\,cos} u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arc\,tg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arc\,tg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

Los ángulos, en radianes: con grados, estas fórmulas no valen.

Dónde va la cadena

$\left(\operatorname{sen}(x^2)\right)' = 2x\cos(x^2)$, pero $\left(\operatorname{sen}^2 x\right)' = \left((\operatorname{sen} x)^2\right)' = 2\operatorname{sen} x \cos x$. Y $\left(\operatorname{sen}(ax)\right)' = a\cos(ax)$: en Madrid 2026, sin esa a la derivada lateral sale -1 y no hay ningún valor de a que la iguale a 2.

5 Recta tangente (y recta normal)

La recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ pasa por $\big(a, f(a)\big)$ y tiene pendiente $f'(a)$:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a).$$

La **recta normal** es la perpendicular a la tangente en ese mismo punto: $y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a)$ (si $f'(a) = 0$, la normal es la recta vertical $x = a$). Si te examinas en **Murcia**: el acta de coordinación de 16-09-

2026 dice que la «recta tangente y normal a la gráfica de una función en un punto» no se evaluará en 2027.

- **Ejemplo:** $f(x) = x^3 - 3x$ en $x = 2$: $f(2) = 2$ y $f'(x) = 3x^2 - 3$, así que $f'(2) = 9$. Tangente: $y - 2 = 9(x - 2)$, es decir, $y = 9x - 16$. Normal: $y - 2 = -\frac{1}{9}(x - 2)$.
- **Paralela a una recta:** misma pendiente. En Cataluña 2026 (Tema 7, «Ponte a prueba»), la tangente paralela a $y = -2x$ sale de $f'(x) = -2$ en el trozo $(x - 2)^2 + 1$: $x = 1$ e $y = -2x + 4$.
- **Por un punto exterior:** el punto P no es el de tangencia. Escribe la tangente en un punto genérico $(a, f(a))$, sustituye P y resuelve en a (pasos de abajo; es el ejercicio de País Vasco 2026, resuelto más abajo).
- Los tres casos que te pueden plantear, en la tabla de abajo.
- **Condiciones que se convierten en ecuaciones.** «La tangente en $x = a$ es $y = mx + n$» da **dos**: $f(a) = ma + n$ y $f'(a) = m$ (País Vasco 2026, extraordinaria: tangente $y = 3 - 3x$ en $x = 0$, así que $f(0) = 3$ y $f'(0) = -3$). «Tangentes paralelas en $x = a$ y $x = b$»: $f'(a) = f'(b)$. «Tangente perpendicular a $y = x + 2$»: pendiente -1, porque $m \cdot m' = -1$. «Tangente horizontal»: $f'(a) = 0$. Y «la recta $y = x - 1$ es tangente» (Madrid 2026, reserva 1, 5.1 a) sin decir dónde: el punto de tangencia a es otra incógnita, con $f(a) = a - 1$ y $f'(a) = 1$. Con extremos y puntos de inflexión ($f' = 0$, $f'' = 0$) se sigue en el Tema 9.
- **Cortes con los ejes y el triángulo que forman.** La tangente corta al eje OY con $x = 0$ y al OX con $y = 0$. Con $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = k > 0$ (Cataluña 2023, extraordinaria): $y = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}(x - k)$ corta en $(2k, 0)$ y $\left(0, \frac{2}{k}\right)$, y el triángulo con los semiejes tiene área $\frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \frac{2}{k} = 2$, la misma para todo k. Y la tangente **de pendiente mínima** (Madrid 2023, reserva 1) es la del mínimo de f' (Tema 9): con $f(x) = x^3 + x^2 + x$, $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ es mínima en $x = -\frac{1}{3}$, con pendiente $\frac{2}{3}$, y la recta es $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{27}$.

Tangente genérica
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$, con a desconocido.

→

Impón el punto $P(x_0, y_0)$
$y_0 = f(a) + f'(a)(x_0 - a)$: una ecuación en a.

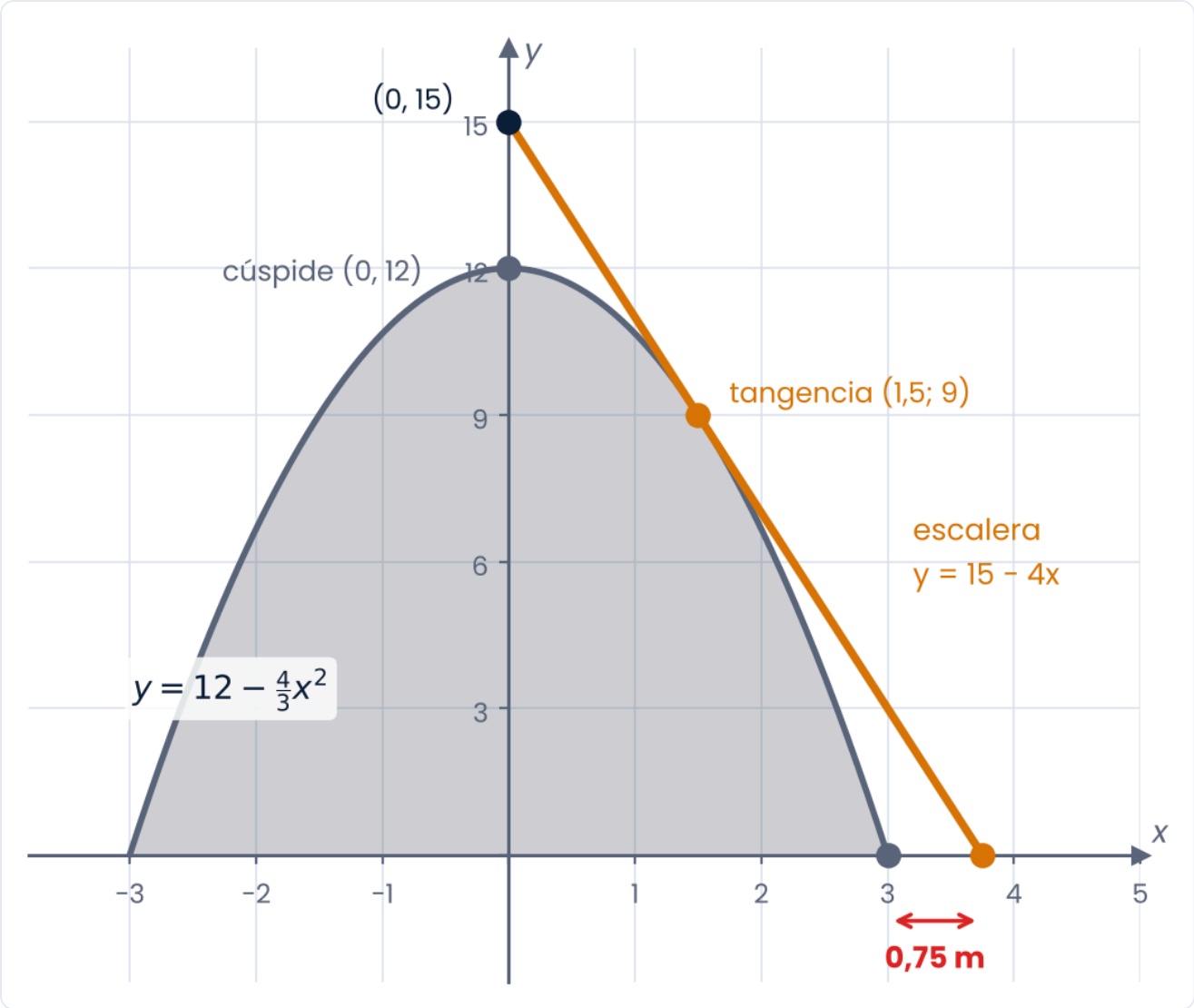
→

Resuelve y sustituye
Cada solución a da una tangente. Quédate con las que tengan sentido en el problema.

Te dan…	Qué no sabes	Cómo se plantea
La abscisa a del punto	Nada	Calcula $f(a)$ y $f'(a)$ y sustituye
La pendiente m (paralela a una recta, o tangente horizontal: $m = 0$)	La abscisa a	Resuelve $f'(a) = m$ y comprueba que a está en el trozo que usas
Un punto P exterior a la curva por el que pasa	La abscisa a del punto de tangencia	Tangente genérica en $(a, f(a))$ e impón que pase por P

Error típico: la pendiente con f en vez de con f'

Usar como pendiente $f(a)$ en lugar de $f'(a)$, o sustituir a antes de derivar. Y, en un problema de punto exterior, tomar P como punto de tangencia: en País Vasco 2026, $(0, 15)$ no está en la parábola ($f(0) = 12$), así que la tangente no se calcula en $x = 0$.



La escalera de País Vasco 2026 (resuelta más abajo). El montículo es la parábola $y = 12 - \frac{4}{3}x^2$. La escalera sale de $(0, 15)$, toca el montículo en $\left(\frac{3}{2}, 9\right)$ y es tangente ahí: $y = 15 - 4x$. Llega al suelo en $x = 3{,}75$, a $0{,}75$ m del borde de la base.

6 Regla de L'Hôpital

Si $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, f y g son derivables cerca de a (puede que no en a), $g'(x) \neq 0$ cerca de a y existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito, $+\infty$ o $-\infty$), entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vale también con $x \to \pm\infty$ y con límites laterales. Si $\lim \frac{f'}{g'}$ no existe, L'Hôpital no dice nada: hay que buscar otro camino. El numerador y el denominador se derivan **por separado**: no es la derivada del cociente. En **Cataluña**, la lista de saberes de la materia (actualizada el 28-01-2026) habla de «límites de funciones racionales» y no nombra la regla de L'Hôpital.

- **Ejemplos básicos:** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1.$
- **Si vuelve a salir $\frac{0}{0}$, se aplica otra vez:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \left[\tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \left[\tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

- $\frac{\infty}{\infty}$ **y jerarquía de infinitos:** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$, y $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0$.
- $0\cdot\infty$: pásalo a cociente. $\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$.
- 1^∞, 0^0 **e** ∞^0**:** toma logaritmos, $f^g=e^{g\ln f}$, y calcula el límite del exponente. Por ejemplo, $\lim_{x\to0^+}x^x=e^{\lim x\ln x}=e^0=1$. (En **Murcia** no se evalúan en 2027 1^∞ ni 0^0, y su lista de lo que entra no incluye ∞^0; las listas de Andalucía y de Canarias no las nombran: lo tienes en el Tema 7.)
- **Con un parámetro** (Andalucía 2025, resuelto más abajo): si te dicen que el límite es **finito** y al aplicar L'Hôpital sale $\frac{k}{0}$, la única salida es que $k=0$. Esa condición te da el parámetro.

Error típico: L'Hôpital sin indeterminación

Antes de derivar, **sustituye**. En Galicia 2026 (3.2 a), $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x}=\frac{0}{1}=0$ sin más; si derivas, sale $\lim_{x\to1}\frac{1/x}{1}=1$, que está mal. Por eso Andalucía 2025 da hasta 0,5 puntos solo por comprobar la indeterminación.

7 Ejercicio resuelto: continua y derivable con dos parámetros, y recta tangente (Madrid 2026)

PAU MADRID 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 5.2 (A ELEGIR ENTRE 5.1 Y 5.2; 2 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-\operatorname{sen}(ax)+b & \text{si } x<0\\ \dfrac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x\geq0\end{cases}.$$

a) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x=0$. (1 punto)

b) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

Apartado a)

1. **Cada trozo.** El primero es la suma de un polinomio y un seno: continuo y derivable. El segundo es un cociente con denominador $1+x^2>0$: también. Solo hay que estudiar $x=0$.
2. **Continuidad en $x=0$.** $f(0)=\frac{2e^0}{1+0}=2$ y $\lim_{x\to0^+}f(x)=2$. Por la izquierda, $\lim_{x\to0^-}\left(3x^2-\operatorname{sen}(ax)+b\right)=0-\operatorname{sen}0+b=b$. Es continua si $b=2$.
3. **Derivadas de cada trozo.** Para $x<0$, con la regla de la cadena: $f'(x)=6x-a\cos(ax)$. Para $x>0$, con la regla del cociente:

$$f'(x)=\frac{2e^x(1+x^2)-2e^x\cdot2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}=\frac{2e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}.$$

4. **Derivabilidad en $x=0$** (ya es continua, con $b=2$): $f'(0^-)=\lim_{x\to0^-}\left(6x-a\cos(ax)\right)=-a$ y $f'(0^+)=\frac{2\cdot1\cdot1}{1}=2$. Son iguales si $-a=2$, es decir, si $a=-2$.

5. Comprobación: con $a = -2$, el primer trozo es $3x^2 + \operatorname{sen}(2x) + 2$ (porque $\operatorname{sen}(-2x) = -\operatorname{sen}(2x)$), que en 0 vale 2 y tiene pendiente $0 + 2\cos 0 = 2$.

SOLUCIÓN $a = -2$ y $b = 2$.

Apartado b)

1. $x = 2$ está en el segundo trozo ($x \geq 0$): $f(2) = \dfrac{2e^2}{1+4} = \dfrac{2e^2}{5}$. El punto de tangencia es $\left(2, \frac{2e^2}{5}\right) \approx (2;\ 2{,}96)$.
2. La pendiente, con la derivada del a): $f'(2) = \dfrac{2e^2(2-1)^2}{(1+4)^2} = \dfrac{2e^2}{25} \approx 0{,}59$.
3. Recta tangente: $y - \dfrac{2e^2}{5} = \dfrac{2e^2}{25}(x-2)$. Despejando, $y = \dfrac{2e^2}{25}x + \dfrac{6e^2}{25}$.

SOLUCIÓN $y - \dfrac{2e^2}{5} = \dfrac{2e^2}{25}(x-2)$, es decir, $y = \dfrac{2e^2}{25}(x+3) \approx 0{,}59x + 1{,}77$.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Madrid 2026 (5.2). a) Planteamiento de la continuidad, 0,3 puntos; planteamiento de la derivabilidad, 0,3; obtención de los valores de a y b, 0,4. b) Punto de tangencia, 0,2; pendiente de la recta tangente, 0,4; ecuación de la recta tangente, 0,4. Para toda la prueba: «Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión». La solución oficial («Documento de trabajo orientativo») deja la tangente en la forma punto-pendiente: no hace falta despejar y.

Error típico que te quita puntos. Derivar $\operatorname{sen}(ax)$ como $\cos(ax)$, sin la a de la regla de la cadena: la derivada lateral sale -1 y ya no hay ningún a que la iguale a 2. Y calcular las derivadas laterales sin haber impuesto antes la continuidad ($b = 2$).

8 Ejercicio resuelto: recta tangente que pasa por un punto exterior (País Vasco 2026)

PAU PAÍS VASCO 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · QUINTO EJERCICIO, OPCIÓN 5A (A ELEGIR ENTRE 5A Y 5B; 2 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Un montículo de hormigón tiene forma parabólica con una altura de 12 m y una base de 6 m, como se ve en la figura. Se quiere colocar una escalera apoyada en el montículo y de forma que su extremo superior quede 3 m por encima de la cúspide del montículo. ¿A qué distancia de la base del montículo debe colocarse el extremo inferior de la escalera?

Nota de Farmeando PAU: en la figura del examen, el montículo es una parábola de 12 m de altura y 6 m de base; la escalera sale de un punto situado 3 m por encima de la cúspide, en su vertical, y baja por la derecha tocando el montículo.

1. **Planteamiento.** Pon el suelo en el eje OX y el eje de simetría del montículo en el eje OY. La parábola tiene el vértice en la cúspide, $(0, 12)$, y corta al suelo en los extremos de la base, $(-3, 0)$ y $(3, 0)$: $f(x) = 12 - kx^2$ con $f(3) = 0$, así que $k = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ y

$$f(x) = 12 - \frac{4}{3}x^2.$$

2. El extremo superior de la escalera está 3 m por encima de la cúspide: en $P(0, 15)$. La escalera es la recta que pasa por P y es **tangente** a la parábola. P no está en la parábola ($f(0) = 12 \neq 15$): es un punto **exterior**, y el punto de tangencia es una incógnita.
3. Tangente en un punto genérico $\big(a, f(a)\big)$, con $f'(x) = -\frac{8}{3}x$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = 12 - \frac{4}{3}a^2 - \frac{8}{3}a\,(x - a).$$

4. Que pase por $(0, 15)$: $15 = 12 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{8}{3}a^2 = 12 + \frac{4}{3}a^2$, así que $a^2 = \frac{9}{4}$ y $a = \pm\frac{3}{2}$. Las dos soluciones son simétricas; con la escalera a la derecha, como en la figura, $a = \frac{3}{2}$.
5. Punto de tangencia $\left(\frac{3}{2},\, 9\right)$, porque $f\left(\frac{3}{2}\right) = 12 - 3 = 9$, y pendiente $f'\left(\frac{3}{2}\right) = -4$. La escalera es $y = 9 - 4\left(x - \frac{3}{2}\right)$, es decir, $y = 15 - 4x$.
6. Llega al suelo cuando $y = 0$: $x = \frac{15}{4} = 3{,}75$. El borde de la base está en $x = 3$, así que la distancia es $3{,}75 - 3 = 0{,}75$ m.

SOLUCIÓN El extremo inferior de la escalera se coloca a $0{,}75$ m del borde de la base del montículo (a $3{,}75$ m de su centro).

Lo que puntúa. Criterios de País Vasco 2026 (5A, 2 puntos): «Encontrar la ecuación de la parábola que describe el montículo (0,5 puntos)», «Encontrar la ecuación general de una recta tangente a la parábola» (0,5), «Encontrar la abscisa del punto de tangencia (0,5 puntos)» y «Calcular la distancia pedida (0,5 puntos)». La solución oficial da $d = 3/4 = 0{,}75$ m, medida desde $x = 3$, «el extremo de la base del montículo». Explica qué sistema de referencia usas: sin él, la ecuación de la parábola no se entiende.

Error típico que te quita puntos. Calcular la tangente en $x = 0$, como si $(0, 15)$ fuera el punto de tangencia: ahí la tangente es horizontal ($f'(0) = 0$) y no llega al suelo. Y dar $3{,}75$ m sin decir desde dónde se mide: la solución oficial mide desde el borde de la base, $0{,}75$ m.

9 Ejercicio resuelto: límite con un parámetro y la regla de L'Hôpital (Andalucía 2025)

PAU ANDALUCÍA 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 2 (BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1, A ELEGIR ENTRE LOS EJERCICIOS 2 Y 3; 2,5 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

1. **Comprueba la indeterminación.** En $x = 0$, el numerador vale $\operatorname{sen} 0 - 0 + 2 - 2\cos 0 = 0$ y el denominador $e^0 - 0 - 1 = 0$. Es $\left[\frac{0}{0}\right]$ para cualquier a, y las dos funciones son derivables; además, el denominador derivado, $e^x - \cos x + x \operatorname{sen} x$, no se anula cerca de 0 salvo en 0: se puede aplicar L'Hôpital.

2. **Primera aplicación.** Derivando arriba y abajo por separado:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - a + 2\operatorname{sen} x}{e^x - \cos x + x\operatorname{sen} x}.$$

Abajo, la derivada de $x\cos x$ es $\cos x - x\operatorname{sen} x$, y lleva un signo menos delante. En $x=0$ queda $\dfrac{1-a}{1-1+0} = \dfrac{1-a}{0}$.

3. **El parámetro.** Si $a \neq 1$, es $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$: los límites laterales de $\frac{f'}{g'}$ son infinitos (de signo contrario, porque el denominador cambia de signo en 0), y por L'Hôpital aplicado a cada lado también lo son los de la función: el límite no sería finito. Así que tiene que ser $a = 1$, y entonces vuelve a salir $\left[\frac{0}{0}\right]$.

4. **Segunda aplicación**, con $a = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x + 2\cos x}{e^x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + x\cos x} = \frac{0+2}{1+0+0+0} = 2.$$

SOLUCIÓN $a = 1$ y el límite vale 2.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Andalucía 2025 (Ejercicio 2, 2,5 puntos): «Hasta 0,5 puntos por comprobar la indeterminación. Hasta 0,5 puntos por la primera aplicación de la regla de L'Hôpital.» El resto de la puntuación (el parámetro, la segunda aplicación y el valor) no se detalla. En 2025, en cada ejercicio había 0,25 puntos para valorar «la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados», y los errores en las operaciones aritméticas elementales restaban como mucho 0,25. En 2027, con ejercicios de 2 puntos, son 0,2 y 0,2 (Orientaciones 2026-27), y en el E3 del modelo 2027 comprobar la indeterminación vale hasta 0,25. Escribe $\left[\frac{0}{0}\right]$ cada vez que derives.

Error típico que te quita puntos. Derivar el cociente con la regla del cociente en vez de derivar el numerador y el denominador por separado. Y, al ver $\frac{1-a}{0}$, concluir que el límite no existe y parar: el enunciado dice que es finito, y eso es justo lo que da $a = 1$.

COMPARATIVA FINAL

Derivadas: qué método usar en cada caso

Te piden…	Qué haces	Ejemplo PAU	Lo que cambia en tu comunidad
¿Es derivable una función a trozos en el punto de unión?	Continuidad primero; después, los límites laterales de las derivadas de cada trozo	Madrid 2026: $b = 2$ y $a = -2$	Entra en todas; Canarias, Castilla-La Mancha, Galicia y Madrid la han puesto con dos parámetros
El punto va aparte ($f(0) = 0$) o los trozos no tienen límite de f'	La definición: $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	Madrid 2026 (modelo): $f'(0) = 1$	Igual en todas
Hay un $\lvert u(x)\rvert$	Escríbela a trozos donde $u = 0$ y estudia esos puntos	Andalucía 2025: $\frac{1+\lvert x\rvert}{1-\lvert x\rvert}$, pico en 0	Igual en todas
Una potencia $f(x)^{g(x)}$	Derivada logarítmica: $\ln y = g\ln f$	Navarra 2024: $\left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x}$	Canarias: no entra (acta de 2026-27)
La tangente en un punto, con una pendiente o por un punto exterior	$y - f(a) = f'(a)(x-a)$; si no sabes a, $f'(a) = m$ o tangente genérica	País Vasco 2026 (ordinaria, 5A): la escalera	Murcia: la recta tangente y normal no se evalúa en 2027 (acta del 16-09-2026)

Te piden…	Qué haces	Ejemplo PAU	Lo que cambia en tu comunidad
Coeficientes con condiciones (tangente, paralelas, perpendicular)	Una ecuación por condición: $f(a)$, $f'(a)$, $f'(a)=f'(b)$, $m\cdot m'=-1$	País Vasco 2026 (extraordinaria): $A=0$, $B=-3$, $C=3$	Sale en muchas (Andalucía, Castilla-La Mancha, Cataluña, Madrid, País Vasco), a menudo con extremos (Tema 9)
Un límite $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ con funciones no algebraicas	L'Hôpital, comprobando y escribiendo la indeterminación antes de cada paso	Andalucía 2025 (ordinaria, ejercicio 2): $a=1$, límite 2	Cataluña: su lista no nombra L'Hôpital («límites de funciones racionales»); Baleares y Murcia sí la nombran
Una derivada con números	A mano, con las reglas y la cadena	Asturias 2025: $h'(1)$ de $\frac{f}{g}$	Baleares: sin calculadora (sin procedimiento, 0); en todas, el procedimiento se tiene que ver

Lo que cambia en cada comunidad sale de su documento oficial de 2026-27 (o de 2025-26 si aún no hay otro): está en la página de tu comunidad, en «Qué entra en Matemáticas II». Que una lista no nombre algo no quiere decir que no entre: mira el aviso de tu comunidad en cada apartado.

Errores que te quitan puntos

Lo que más se confunde en este tema, y cómo decirlo bien.

✗ «Tasa media del primer año: $H(12)-H(0)=4551$ hormigas».

✓ Eso es lo que **crece**, no la **tasa**: hay que dividir por la longitud del intervalo. La solución oficial de Canarias 2025 (extraordinaria) da $\mathrm{TVM}[0,12]=\dfrac{H(12)-H(0)}{12-0}\approx 379$ «individuos por mes». Y si te piden interpretarlo, compara: el segundo año la tasa baja a unos 150, la colonia crece cada vez más despacio.

Apartado 1: Derivada en un punto: la pendiente de la tangente

✗ «$f(x)=\dfrac{1+|x|}{1-|x|}$ es un cociente de funciones derivables, así que es derivable en $(-1,1)$».

✓ $|x|$ **no es derivable en** 0: escribe f a trozos ($x<0$ y $x\geq 0$) y compara las derivadas laterales, que dan -2 y 2. Los criterios de Andalucía 2025 (reserva 3, ejercicio 3) dan «hasta 0,5 puntos por la derivabilidad de f en $(-1,0)\cup(0,1)$» en un ejercicio así, y en la reserva 4 (ejercicio 2 a), con $\frac{1}{(1-|x|)^2}$, 0,25 puntos aparte «por concluir que f no es derivable en 0».

Apartado 2: Derivabilidad y continuidad

✗ «En $x=1$ las derivadas laterales de $\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ son $-\infty$ y $+\infty$: existen, así que es derivable».

✓ Para ser derivable, las dos derivadas laterales tienen que ser **finitas** y **coincidir**. Si alguna es infinita, la tangente es vertical (o hay un pico, como aquí) y f **no es derivable**, aunque sea continua. Madrid 2023 (ordinaria, A.2 b) pide exactamente esto, por 0,75 puntos.

Apartado 2: Derivabilidad y continuidad

✗ «$(x^x)'=x\cdot x^{x-1}$» o «$(2^x)'=x\cdot 2^{x-1}$».

✓ La regla $(x^n)'=nx^{n-1}$ solo vale si el **exponente es constante**. Con la variable en el exponente: $(a^x)'=a^x\ln a$ y, si están las dos, **derivada logarítmica**: $y=x^x$, $\ln y=x\ln x$, $y'=x^x(\ln x+1)$. Así se hace la $\left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x}$ de Navarra 2024 (ordinaria, P5 a). En Canarias la derivación logarítmica no entra (acta de coordinación de 2026-27).

Apartado 4: Reglas de derivación y regla de la cadena

✗ «Derivo con la calculadora y me da $f'(2) = 0{,}59$».

✓ Las derivadas y los límites se hacen **a mano**: la calculadora solo sirve para comprobar. Las especificaciones de Baleares para 2027 lo ponen en la lista de lo que «No es poden resoldre amb calculadora»: «Resoldre integrals, derivades, o límits», y si no aparece el procedimiento, se puntúa con 0. Los criterios generales de Extremadura para 2026-27 piden, aunque se permita calculadora, que «todos los procesos conducentes a la obtención de resultados» estén justificados.

Apartado 4: Reglas de derivación y regla de la cadena

✗ «La tangente en $x = 2$ es $y = f'(2)\,(x - 2)$».

✓ Falta el **punto**: la tangente pasa por $(2, f(2))$, así que es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$. En Madrid 2026 (ordinaria, 5.2 b), con $f(x) = \frac{2e^x}{1+x^2}$ para $x \geq 0$, $f(2) = \frac{2e^2}{5}$ y $f'(2) = \frac{2e^2}{25}$: $y - \frac{2e^2}{5} = \frac{2e^2}{25}(x - 2)$. Sus criterios reparten el punto así: «Punto de tangencia 0.2 puntos. Pendiente de la recta tangente: 0.4 puntos. Ecuación de la recta tangente: 0.4 puntos».

Apartado 5: Recta tangente (y recta normal)

✗ «Recta normal en $x = a$: pendiente $\frac{1}{f'(a)}$» (o $-f'(a)$).

✓ La normal es **perpendicular** a la tangente: su pendiente es $-\frac{1}{f'(a)}$, porque el producto de las dos pendientes tiene que ser -1 (si $f'(a) = 0$, la normal es $x = a$). Los criterios de Andalucía 2024 (ordinaria, ejercicio 1 b) dan «hasta 0,5 puntos por hallar la pendiente de la recta normal», la mitad del apartado.

Apartado 5: Recta tangente (y recta normal)

✗ «$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \to \frac{e^x - 1}{2x} \to \frac{e^x}{2} \to \frac{1}{2}$» (con flechas, y sin decir qué indeterminación sale).

✓ Entre dos expresiones iguales va un **signo igual**, con el $\lim$ delante en cada paso, y antes de cada L'Hôpital, la indeterminación entre corchetes: $\left[\frac{0}{0}\right]$. Las especificaciones de Baleares para 2027 cuentan como error leve (del 20 al 50 % del apartado) «No utilitzar la igualtat entre termes iguals», con un ejemplo hecho con flechas; los criterios de Canarias para 2026-27 exigen «utilizar correctamente los signos de igualdad y de aproximación», y Castilla y León 2024 (junio, examen de la fase de mejora, E7 a) puntúa aparte cada «determinación del tipo $\frac{0}{0}$».

Apartado 6: Regla de L'Hôpital

Conceptos clave

Tasa de variación media

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$: la pendiente de la recta secante que une los puntos de abscisas a y b.

Derivada en un punto

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$, si existe y es finito. Es la pendiente de la recta tangente en $(a, f(a))$.

Función derivada

La función f' que a cada x le asigna la pendiente de la tangente en ese punto.

Derivadas laterales

Los límites del cociente incremental por la izquierda ($h \to 0^-$) y por la derecha ($h \to 0^+$).

Función derivable en un punto

Sus dos derivadas laterales existen, son finitas y coinciden. Derivable implica continua.

Punto anguloso

Punto donde f es continua pero las derivadas laterales son distintas, como $|x|$ en 0: la gráfica hace un pico y no hay tangente.

Regla de la cadena

$\big(f(u(x))\big)' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$: la derivada de una función compuesta.

Recta tangente

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$: pasa por $(a, f(a))$ con pendiente $f'(a)$.

Recta normal

La perpendicular a la tangente en el mismo punto: su pendiente es $-\dfrac{1}{f'(a)}$ si $f'(a) \neq 0$; si $f'(a) = 0$, es la recta vertical $x = a$.

Regla de L'Hôpital

Para $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim \dfrac{f}{g} = \lim \dfrac{f'}{g'}$, si el segundo límite existe (finito o infinito), derivando el numerador y el denominador por separado.

Derivada logarítmica

Para $y = f^g$: se toma $\ln y = g \ln f$ y se deriva; $y' = f^g \left(g' \ln f + g \dfrac{f'}{f} \right)$.

Recta secante

La que corta a la gráfica en dos puntos, $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$; su pendiente es la tasa de variación media en $[a, b]$.

Tasa de variación instantánea

El límite de la tasa media cuando el intervalo se hace cero: es $f'(a)$, la velocidad de cambio en $x = a$, en unidades de f por unidad de x.

Derivable implica continua

Si f es derivable en a, es continua en a. El recíproco es falso: $|x|$ es continua en 0 y no es derivable.

MODO PAU

Nueve reglas que valen puntos

Primero, continuidad

Si no es continua, no es derivable. Si lo es, compara las derivadas laterales.

Trozos

Una ecuación por la continuidad y otra por $f'(a^-) = f'(a^+)$.

Cadena

$(e^u)' = e^u u'$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $(\operatorname{sen} u)' = \cos u \cdot u'$: no olvides u'.

Tangente

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$: el punto con f, la pendiente con f'.

Paralela

Misma pendiente: resuelve $f'(a) = m$.

Punto exterior

Tangente genérica en a y que pase por el punto.

L'Hôpital

Solo con $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, comprobado y escrito; derivadas por separado.

Valor absoluto

Escríbela a trozos donde lo de dentro cambia de signo y compara las derivadas laterales.

Dominio primero

Antes de derivar, mira dónde existe f: $\sqrt{u}$ y $\ln u$ solo son derivables donde $u > 0$.

Cómo te lo pueden preguntar

- Calcula los parámetros para que una función a trozos sea continua y, a veces, también derivable: el tipo «continuidad y derivabilidad» salió en 10 de las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en 8 comunidades; con dos parámetros y la derivabilidad, en 4 (Canarias 2026, Castilla-La Mancha 2026, Galicia 2025 y Madrid 2026).
- Halla la recta tangente a una curva en un punto, paralela a una recta o que pasa por un punto exterior: 9 de las 28, en 6 comunidades (Andalucía, Cantabria, Cataluña, Extremadura, Madrid y País Vasco).
- Calcula un límite $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ con la regla de L'Hôpital, a veces con un parámetro: los límites con L'Hôpital aparecen en 5 convocatorias.
- Estudia si una función es derivable en un punto (salto, punto anguloso) con las derivadas laterales.
- Deriva una función con las reglas de derivación y la regla de la cadena, o interpreta $f'(a)$ como una velocidad de cambio.
- Puede pedirse, aunque en 2025 y 2026 no ha salido: calcula la derivada en un punto a partir de la definición, como límite del cociente incremental.

No lo confundas

- $f(a)$ (la altura del punto de tangencia) con $f'(a)$ (la pendiente de la tangente).
- Derivar con L'Hôpital (numerador y denominador por separado) con derivar un cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Continua (sin saltos) con derivable (sin saltos y sin picos): $|x|$ es continua en 0 y no es derivable.
- $\left(\operatorname{sen}(x^2)\right)' = 2x\cos(x^2)$ con $\left(\operatorname{sen}^2 x\right)' = 2\operatorname{sen} x\cos x$.
- El punto de tangencia con un punto exterior por el que pasa la tangente.
- Recta tangente (pendiente $f'(a)$) con recta normal (pendiente $-\frac{1}{f'(a)}$).

Ponte a prueba

PAU Castilla-La Mancha 2026, Pregunta 5.2 (a elegir entre 5.1 y 5.2; 2 puntos). Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases},$$

donde a y b son números reales. Determina los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 1$

Solución: Para $x < 1$, $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x + 1$. Continuidad: $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b) = a + b = f(1)$, así que $a + b = 2$. Derivabilidad: para $x < 1$, $f'(x) = 1$ (la solución oficial lo deriva como cociente: $\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2} = 1$); para $x > 1$, $f'(x) = a$. Son iguales si $a = 1$, y entonces $b = 1$. Con $a = b = 1$, $f(x) = x + 1$ en todo $\mathbb{R}$.

PAU Galicia 2026, Pregunta 3, apartado 3.2 (la pregunta vale 4 puntos y se responden dos de sus tres apartados). Calcule los siguientes límites: a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x}$. b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$. c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sin x}$. d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$.

Solución: a) No es una indeterminación: $\dfrac{\ln 1}{1} = 0$. b) $\left[\frac{0}{0}\right]$; con L'Hôpital, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1/x} = \lim\limits_{x\to 1} x = 1$. c) $\left[\frac{0}{0}\right]$, pero basta con simplificar: $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{\cos x} \to 1$ (con L'Hôpital, $\dfrac{1/\cos^2 x}{\cos x} \to 1$). d) $[0\cdot(-\infty)]$; como cociente y con L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-2\sqrt{x}) = 0$.

PAU Aragón 2026, Pregunta 5.2 (a elegir entre 5.1 y 5.2; 2 puntos). Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^x}{1-\cos(x)}$.

Solución: $\left[\frac{0}{0}\right]$. Primera aplicación de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\, e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{\operatorname{sen} x}$, otra vez $\left[\frac{0}{0}\right]$ (arriba, $1-1$). Segunda: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\operatorname{sen} x\, e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x\, e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{\cos x} = \dfrac{0+1-1}{1} = 0$. Los criterios dan 1 punto por aplicar bien la regla una vez y otro punto por aplicarla bien una segunda vez.

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (Matemáticas II)
2. Examen PAU Matemáticas II Madrid 2026 (ordinaria), con criterios específicos de corrección
3. Examen PAU Matemáticas II País Vasco 2026 (ordinaria)
4. Solucionario y criterios PAU Matemáticas II País Vasco 2026 (ordinaria)

5. Matemáticas II, Andalucía 2025: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
6. Examen PAU Matemáticas II Castilla-La Mancha 2026 (ordinaria)
7. Soluciones y criterios de corrección PAU Matemáticas II Castilla-La Mancha 2026 (ordinaria)
8. Examen PAU Matemáticas II Galicia 2026 (ordinaria)
9. Examen PAU Matemáticas II Galicia 2025 (ordinaria)
10. Examen PAU Matemáticas II Aragón 2026 (ordinaria), con criterios de corrección
11. Matemáticas II, Canarias 2025 (extraordinaria): examen y criterios de corrección (Consejería de Educación del Gobierno de Canarias)
12. Matemáticas II, Andalucía 2024: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
13. Matemáticas II, Madrid 2023 (ordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad Complutense de Madrid)
14. Matemáticas II, Madrid 2023 (extraordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad Complutense de Madrid)
15. Matemáticas II, Madrid 2023 (reserva 1): examen y criterios de corrección (Universidad Carlos III de Madrid)
16. Matemáticas II, Madrid 2026 (modelo): examen y criterios de corrección (Universidad Carlos III de Madrid)
17. Matemáticas II, Madrid 2026 (reserva 1): examen y criterios de corrección (Universidad Complutense de Madrid)
18. Matemáticas II, Navarra 2024 (ordinaria): examen (Universidad Pública de Navarra)
19. Matemáticas II, Navarra 2024 (extraordinaria): examen (Universidad Pública de Navarra)
20. Matemáticas II, País Vasco 2026 (extraordinaria): criterios de corrección (Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea)
21. Matemáticas II, Asturias 2026 (ordinaria): examen (Universidad de Oviedo)
22. Matemáticas II, Asturias 2026 (ordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Oviedo)
23. Matemáticas II, Asturias 2025 (ordinaria): examen (Universidad de Oviedo)
24. Matemáticas II, Asturias 2025 (ordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Oviedo)
25. Matemáticas II, Cataluña 2023 (extraordinaria): examen (Generalitat de Catalunya (Dept. de Recerca i Universitats) / Oficina d'Accés a la Universitat)
26. Matemáticas II, Cataluña 2023 (extraordinaria): criterios de corrección (Generalitat de Catalunya (Dept. de Recerca i Universitats) / Oficina d'Accés a la Universitat)
27. Matemáticas II, Castilla y León 2024 (ordinaria, segundo examen): criterios de corrección (Universidad de Salamanca)
28. Matemàtiques II · Especificacions dels criteris de correcció 2027 (UIB, 13-10-2026; en catalán)
29. Matemáticas II. Criterios generales de evaluación, curso 2026-2027 (Universidad de Extremadura)
30. Criterios de calificación de Matemáticas II, curso 2026-2027 (PAU Canarias)
31. Acta de la primera reunión de coordinación de Matemáticas II, PAU 2027 (Canarias, 30-09-2026)
32. Acta de la reunión de coordinación de Matemáticas II para PAU2027 (Universidad de Murcia, 16-09-2026)
33. Matemáticas: estructura del examen y saberes de la materia (Generalitat de Catalunya, versión en castellano)
34. Real Decreto 534/2024, de 11 de junio, requisitos de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado y características básicas de la prueba de acceso (BOE, texto consolidado)

Imágenes: De las secantes a la tangente: Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · Función de Madrid 2026 y sus tangentes: Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · La escalera de País Vasco 2026: Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta.

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 9 de noviembre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.