Aplicaciones de la derivada

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en **farmeandopau.com** ›

Última revisión: 9 de noviembre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

La derivada (Tema 8) dice **cómo se mueve** una función. Su **signo** da dónde crece y dónde decrece; donde cambia de signo hay un **máximo** o un **mínimo**. El signo de la segunda derivada da la **curvatura** y los **puntos de inflexión**. Con eso se resuelven los problemas de **optimización**: escribir la función de lo que se quiere hacer máximo o mínimo y buscar su extremo. Y los teoremas de **Rolle** y del **valor medio** (Lagrange) aseguran que la derivada toma cierto valor sin tener que calcularlo. La monotonía y los extremos son el segundo tipo de ejercicio más repetido: salieron en **17 de las 28** convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en 12 comunidades. La optimización, en **12 de las 28**.

1 Crecimiento y decrecimiento

Una función es **creciente** en un intervalo si, al aumentar x, aumenta $f(x)$: si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Es **decreciente** si pasa lo contrario. La derivada es la pendiente de la recta tangente, así que su signo lo dice todo: si $f'(x) > 0$ en todos los puntos de un intervalo, f es creciente en él; si $f'(x) < 0$, es decreciente.

- **Ejemplo:** $f(x) = x^3 - 3x$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, que se anula en $x = -1$ y $x = 1$. Con $f'(-2) = 9 > 0$, $f'(0) = -3 < 0$ y $f'(2) = 9 > 0$: f crece en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$, y decrece en $(-1, 1)$.
- **Una tabla de signos** ordena el trabajo: en la primera fila, los puntos críticos; debajo, el signo de cada factor; y en la última fila, el de f' y una flecha que sube o baja. Es lo que esperan ver los correctores.
- **Con un e o un cuadrado de por medio:** en $f'(x) = (2-x)\,e^{-x}$ el factor e^{-x} es siempre positivo, así que el signo de f' es el de $2 - x$. No hace falta probar valores.
- **Con un parámetro, discute los casos.** Si el signo de f' depende del parámetro, no lo fijes: estudia cada caso. Con $f(x) = \dfrac{kx}{e^{2x}}$ (C. Valenciana 2024, ordinaria), $f'(x) = k\,(1-2x)\,e^{-2x}$. Si $k > 0$, crece en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, con un máximo en $x = \frac{1}{2}$; si $k < 0$, al revés, con un mínimo; y si $k = 0$, f es constante.

1 Dominio
Los intervalos se estudian dentro del dominio. Los puntos que no son del dominio (un 0 en un denominador, por ejemplo) también separan intervalos.

2 Deriva y factoriza
Calcula $f'(x)$ y escríbela como producto o cociente de factores sencillos. Es lo que permite ver su signo.

3 Puntos que separan intervalos
Resuelve $f'(x) = 0$. Añade los puntos donde f' no existe y los que no están en el dominio (estos últimos separan intervalos, pero no son candidatos a extremo).

4 Signo en cada intervalo

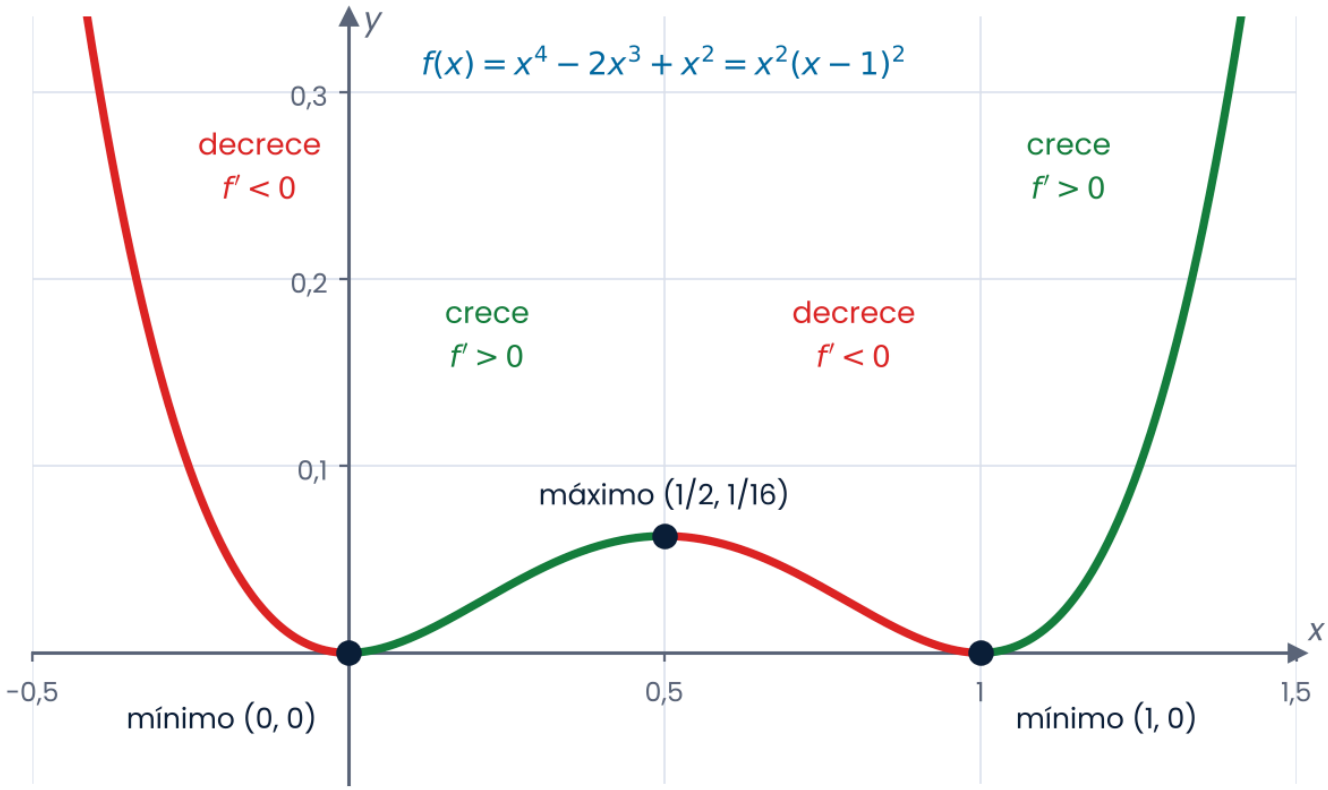
Con un valor de prueba en cada trozo, o con el signo de cada factor. Los factores siempre positivos (e^x, x^2+1, un cuadrado en el denominador) no cambian nada.

5 Conclusión

Intervalos **abiertos**: «crece en $(0, \frac{1}{2})$ y en $(1, +\infty)$».

Error típico que te quita puntos

Dar solo los ceros de la derivada y no estudiar su signo: $f'(a) = 0$ no dice si f crece o decrece. Y meter en un intervalo un punto que no está en el dominio: con $f(x) = \frac{1}{x}$, «decrece en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$», nunca «en $\mathbb{R}$». Los intervalos se dan **abiertos**, que es el convenio habitual.



El signo de f' decide. Gráfica de $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$, la del ejercicio resuelto de País Vasco 2025: en rojo los tramos donde $f' < 0$ (decrece) y en verde donde $f' > 0$ (crece). Donde la derivada cambia de signo hay un mínimo, $(0, 0)$ y $(1, 0)$, o un máximo, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$.

2 Extremos relativos

f tiene un **máximo relativo** en $x = a$ si $f(a)$ es mayor o igual que los valores de f cerca de a, y un **mínimo relativo** si es menor o igual. Si f es derivable en a y tiene ahí un extremo, la tangente es horizontal: $f'(a) = 0$. Pero al revés no vale: $f'(a) = 0$ no basta. Para decidir hay dos criterios (en la tabla de abajo).

- **Ejemplo (sigue el anterior):** $f(x) = x^3 - 3x$ pasa de crecer a decrecer en $x = -1$: máximo relativo en $(-1, f(-1)) = (-1, 2)$. Y pasa de decrecer a crecer en $x = 1$: mínimo relativo en $(1, -2)$. Con la segunda derivada, $f''(x) = 6x$: $f''(-1) = -6 < 0$ (máximo) y $f''(1) = 6 > 0$ (mínimo).
- **Cuando $f''(a) = 0$ no se sabe nada:** x^3 y x^4 tienen las dos $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. x^3 crece a los dos lados y no tiene extremo; x^4 tiene un mínimo. Vuelve al cambio de signo de f'.
- **Puede haber extremo sin derivada:** $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x = 0$ y no es derivable ahí. En las funciones a trozos, mira también el punto de unión.

- **Da el punto entero:** el extremo es $(a, f(a))$. Andalucía 2025 (Ejercicio 3) lo pide así: «abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan».
- **Condiciones que se convierten en ecuaciones** (los «calcula a, b y c»): «extremo relativo en el punto $(1, 4)$» da **dos**, $f'(1) = 0$ y $f(1) = 4$; «extremo en $x = 1$», solo $f'(1) = 0$; «punto de inflexión en $(0, 0)$», $f''(0) = 0$ y $f(0) = 0$; «pasa por $(0, -3)$», $f(0) = -3$. Con las de la tangente (Tema 8) se forma un sistema: en Castilla-La Mancha 2026 (extraordinaria, 5.1 a), $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ con extremo en $(1, 4)$ y tangente en $x = 3$ paralela a $y = 2x - 1$ da $f'(1) = 0$, $f(1) = 4$ y $f'(3) = 2$, es decir, $a = -\frac{11}{2}$, $b = 8$ y $c = \frac{1}{2}$. Comprueba al final que el extremo existe (f'' o cambio de signo).
- **Con valor absoluto:** $|u(x)|$ es derivable salvo, en general, donde $u = 0$, y esos puntos también son **candidatos**. Con $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ (Madrid 2026, reserva 1, pregunta 2): en $x = 1$ y $x = 5$, $f = 0$ y hay **mínimos** relativos (y absolutos) sin derivada; entre los dos, $f = -(x^2 - 6x + 5)$ tiene un **máximo** relativo en $x = 3$, con $f(3) = 4$.
- **Si te dan una primitiva:** si $F' = f$, la monotonía de F la da el signo de f, y la de f, el de $F'' = f'$. Con $F(x) = e^{x^2}$ (Andalucía 2023, reserva 4, ejercicio 3, y modelo 2025, ejercicio 6): $f(x) = 2x\,e^{x^2}$ y $f'(x) = (2 + 4x^2)\,e^{x^2} > 0$, así que f es creciente. Si F viene dada por una integral, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, es el teorema fundamental del cálculo (Tema 12).

Criterio	Cómo se aplica	Cuándo usarlo
Cambio de signo de f'	De $+$ a $-$: máximo. De $-$ a $+$: mínimo. Sin cambio: no hay extremo	Funciona si f es continua en a (aunque no sea derivable ahí). Si a no es del dominio, no hay extremo aunque f' cambie de signo: $\frac{1}{x^2}$ en $x = 0$. Y ya lo tienes si te piden la monotonía
Segunda derivada	$f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$: máximo. $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$: mínimo	Cuando f'' es fácil. Si $f''(a) = 0$, no decide

Los dos criterios valen igual en la PAU. País Vasco 2025 (4B) da puntos por calcular la segunda derivada y evaluarla en el punto crítico.

Una tangente horizontal no es siempre un extremo

Si te piden «tangente horizontal», solo es $f'(a) = 0$, como en el ejercicio resuelto de País Vasco 2025. Si te piden «extremo», además hay que justificar que es máximo o mínimo. $f(x) = x^3$ tiene tangente horizontal en $x = 0$ y no tiene extremo.

3 Extremos absolutos en un intervalo

El **máximo absoluto** es el mayor valor que toma f en todo su dominio (o en el intervalo que te den), y el **mínimo absoluto**, el menor. Por el **teorema de Weierstrass**, una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza siempre su máximo y su mínimo absolutos. Están en los puntos críticos de dentro o en los extremos a y b.

- **Ejemplo (Asturias 2026, Pregunta 2, opción A):** el precio de una acción es $f(t) = \dfrac{5t^2 + 2t + 5}{t^2 + 1}$ con $t \in [0, 30]$. $f'(t) = \dfrac{-2(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}$ se anula en $t = 1$ ($t = -1$ no está en el intervalo). Candidatos: $f(0) = 5$, $f(1) = 6$ y $f(30) = \frac{4565}{901} \approx 5{,}07$. Máximo absoluto, 6 €, en $t = 1$; mínimo absoluto, 5 €, en $t = 0$. Por eso la acción nunca llega a los $6{,}5$ € que pedía el enunciado.
- **Si el intervalo es abierto o no está acotado**, puede no haber máximo o mínimo absoluto. Compara los extremos relativos con los **límites** en los bordes. Lo ves en el ejercicio resuelto de la Comunidad Valenciana 2026 del Tema 10: $f \to 0$ en $\pm\infty$, y el máximo y el mínimo relativos son también absolutos.
- **En los problemas con contexto** (tiempo, precio, dimensiones), la variable solo toma los valores con sentido: $t \geq 0$, longitudes positivas… Ese es el intervalo donde se busca el extremo.

- **En todo $\mathbb{R}$ o en un intervalo abierto,** compara los extremos relativos con los **límites** en los bordes. Con $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$ (Andalucía 2024, extraordinaria): $f'(x) = (-2x^2 + x + 1)\, e^{-x^2}$ se anula en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$, con $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -e^{-1/4} \approx -0{,}78$ y $f(1) = \frac{1}{2e} \approx 0{,}18$. Como f tiende a 0 en $\pm\infty$, el máximo absoluto está en $x = 1$ y el mínimo absoluto, en $x = -\frac{1}{2}$.
- **Para probar una desigualdad o que una ecuación no tiene solución,** usa el máximo o el mínimo absoluto. «$f(x) \geq 8$ en $[3, 5]$» con $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ (Aragón 2026, extraordinaria): $f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, el mínimo en $[3, 5]$ está en $x = 4$ y vale $f(4) = 8$. Y «$e^{-x}(x - 1) = 1$ no tiene solución» (Castilla y León 2024, ordinaria): $g(x) = e^{-x}(x - 1)$ tiene su máximo absoluto en $x = 2$, $g(2) = e^{-2} < 1$, así que nunca vale 1.

Candidatos
Los puntos de (a, b) con $f'(x) = 0$, los puntos donde f no es derivable y los dos extremos a y b.

→ **Evalúa f**
Calcula f en todos los candidatos.

→ **Compara**
El mayor valor es el máximo absoluto; el menor, el mínimo absoluto.

No te olvides de los extremos del intervalo

En un intervalo cerrado, el máximo o el mínimo absoluto pueden estar en un extremo, donde f' no tiene por qué ser 0. En el ejemplo de Asturias, el mínimo absoluto está en $t = 0$. La solución oficial evalúa los tres candidatos, $f(0) = 5$, $f(1) = 6$ y $f(30) \approx 5{,}07$, y concluye que ninguno llega a $6{,}5$.

4 Curvatura y puntos de inflexión

La segunda derivada dice cómo se dobla la gráfica. Si $f''(x) > 0$ en un intervalo, f' crece: la curva se dobla hacia arriba, como ∪, y queda **por encima** de sus tangentes. Si $f''(x) < 0$, se dobla hacia abajo, como ∩, y queda **por debajo** de sus tangentes. Un **punto de inflexión** es un punto de la gráfica donde cambia la curvatura. En **Murcia**, el acta de coordinación de 16-09-2026 dice que la concavidad y la convexidad no se evaluarán en 2027.

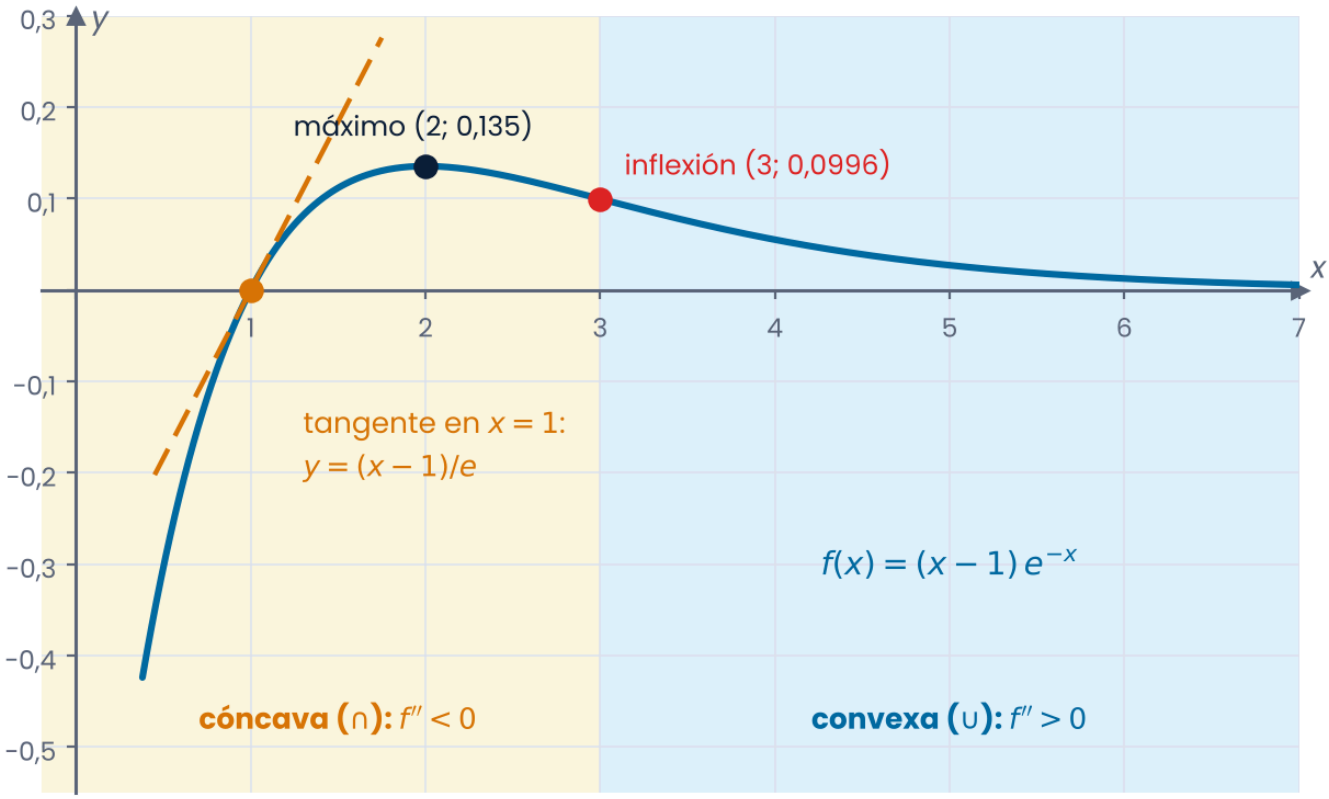
- **Se estudia como la monotonía, pero con f'':** dominio, $f''(x) = 0$ y puntos fuera del dominio, signo en cada intervalo y conclusión.
- **Ejemplo:** $f(x) = x^3 - 3x$ tiene $f''(x) = 6x$: cóncava (∩) en $(-\infty, 0)$, convexa (∪) en $(0, +\infty)$ y punto de inflexión en $(0, f(0)) = (0, 0)$.
- **$f''(a) = 0$ no basta:** $f(x) = x^4$ tiene $f''(0) = 0$ y es convexa a los dos lados, así que no tiene inflexión. Y si a no está en el dominio (una asíntota vertical), la curvatura puede cambiar sin que haya punto de inflexión.
- **Inflexión y derivada:** en un punto de inflexión, f' tiene un máximo o un mínimo relativo. Castilla-La Mancha 2025 (Ejercicio 1, en «Ponte a prueba») pide el instante en que la derivada es mínima: es un punto de inflexión de f.

Signo de f''	Forma	En estos apuntes	La gráfica…
$f'' > 0$	∪	Convexa	queda por encima de sus tangentes
$f'' < 0$	∩	Cóncava	queda por debajo de sus tangentes
Cambia de signo en a (a del dominio y f continua en a)	—	Punto de inflexión $(a, f(a))$	atraviesa su tangente

Algunos libros dicen «cóncava» y «convexa» al revés, o hablan de «cóncava hacia arriba». En el examen, escribe también el dibujo ∪ o ∩, o el signo de f'', y no habrá duda.

Error típico que te quita puntos

Derivar mal e^{-x}: su derivada es $-e^{-x}$ (regla de la cadena), no e^{-x}. Con $f(x) = (x-1)e^{-x}$ sale $f'(x) = (2-x)e^{-x}$ y $f''(x) = (x-3)e^{-x}$. Si se pierde un signo, cambian el máximo y la inflexión.



Curvatura de $f(x) = (x-1)e^{-x}$ (Extremadura 2025). A la izquierda de $x = 3$, $f'' < 0$ y la curva es cóncava (∩): queda por debajo de su tangente en $x = 1$ (en naranja). A la derecha, $f'' > 0$ y es convexa (∪). El punto de inflexión es $(3, 2e^{-3})$; el máximo, $(2, e^{-2})$.

5 Problemas de optimización

Optimizar es encontrar el **máximo** o el **mínimo** de algo: el área de una ventana, el coste de un suelo, el beneficio de una empresa. Si te dan la función, es un estudio de extremos. Si no, hay que **construirla** a partir del enunciado. Casi siempre hay dos variables y una relación entre ellas que permite dejar solo una.

- **Ejemplo (País Vasco 2025, 4B):** marcos rectangulares de $0{,}3$ m², con los lados horizontales a 12 €/m y los verticales a 10 €/m. Si x es el lado horizontal e y el vertical, el coste de un marco es $24x + 20y$, con $xy = 0{,}3$. Queda $C(x) = 24x + \dfrac{6}{x}$, con $x > 0$. $C'(x) = 24 - \dfrac{6}{x^2} = 0$ da $x = \frac{1}{2}$ (la solución $-\frac{1}{2}$ no vale), y $C''(x) = \dfrac{12}{x^3} > 0$: mínimo. Medidas: $0{,}5$ m por $0{,}6$ m, y cada marco cuesta 24 €: la factura de los 274 marcos es de 6576 €.
- **Con funciones trigonométricas (Murcia 2026, Pregunta 2):** el rectángulo inscrito en un cuarto de circunferencia de radio 10 tiene área $f(x) = 100 \operatorname{sen} x \cos x$, con $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. $f'(x) = 100(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0$ da $\cos x = \operatorname{sen} x$, es decir, $x = \frac{\pi}{4}$. f' es positiva antes y negativa después: máximo, con área $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 50$ u². Trabaja siempre en **radianes**.
- **Atajo que a veces aparece:** si una parte cuesta menos que otra y el total es fijo, minimizar el coste equivale a hacer máxima la parte barata. En el jardín de Madrid 2026, el coste mínimo sale con el rectángulo de área máxima.

- **Distancia mínima a una curva:** escribe la distancia de un punto genérico $(x, f(x))$ al punto dado y minimiza su **cuadrado**, que tiene el mínimo en el mismo x y se deriva más fácil. El náufrago de Andalucía 2025 (reserva 3, ejercicio 2; y Murcia 2026, extraordinaria) está en $(2, 0)$ y el ferry va por $y = \sqrt{x+1}$: $d^2 = (x-2)^2 + (x+1)$, es decir, $d^2 = x^2 - 3x + 5$, mínimo en $x = \frac{3}{2}$; el punto es $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ y la distancia, $\frac{\sqrt{11}}{2}$. Los criterios andaluces dan hasta 0,5 puntos solo por la expresión de la distancia.
- **El máximo puede estar en un extremo del intervalo.** Con un cuadrado de lado a y un triángulo equilátero de lado b y $4a + 3b = 100$ (modelos de 2026 de Aragón, Baleares y Murcia, y de 2027 de Galicia, que pregunta solo el mínimo), la suma de áreas $S(a) = a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$ tiene un solo punto con $S' = 0$, $a \approx 10{,}87$ m, que es el **mínimo**. En $[0, 25]$ el máximo está en un borde: $S(25) = 625$ (todo cuadrado) frente a $S(0) \approx 481$ (todo triángulo). Si tienen que existir las dos figuras ($0 < a < 25$), **no hay máximo**: eso es lo que pregunta el apartado b).

1 Dibujo y variables
Haz un dibujo y llama x e y a lo que no sabes. Di qué es cada una y en qué unidades.

2 Función a optimizar
Escribe lo que se quiere hacer máximo o mínimo en función de x e y.

3 Relación entre las variables
Un dato del enunciado (un perímetro, un área, una semejanza de triángulos) permite despejar y en función de x. Sustituye: queda una función de una variable, con su **dominio** (los valores con sentido).

4 Deriva e iguala a cero
Resuelve $f'(x) = 0$ y quédate con las soluciones del dominio.

5 Justifica máximo o mínimo
Con el signo de f'' en el punto o con el cambio de signo de f'. Si el dominio es un intervalo cerrado, compara con los extremos. Si es el único punto crítico de un intervalo y es mínimo (o máximo) relativo, es también el absoluto: dilo.

6 Responde lo que te preguntan
Todas las dimensiones, con unidades, y el valor óptimo si lo piden.

Justificar que es mínimo (o máximo) puntúa

Los criterios de Madrid 2026 (Pregunta 2) dan 0,1 puntos «por justificar que es un mínimo» y 0,2 por dar las dimensiones pedidas. Los de País Vasco 2025 (4B), 0,5 por las derivadas de orden uno y dos y otros 0,5 por los puntos críticos, «teniendo en cuenta que, en este caso, la variable solo toma valores positivos», y la evaluación de la segunda derivada. Si das solo x y no la otra medida, o no justificas, pierdes esa parte.

6 Teoremas de Rolle y del valor medio (Lagrange)

Estos dos teoremas aseguran que **existe** un punto donde la derivada toma un valor, sin decir cuál es. Los dos exigen dos **hipótesis** (Rolle, una más: $f(a) = f(b)$): f **continua en el intervalo cerrado** $[a, b]$ y **derivable en el abierto** (a, b). No entran igual en todas partes: en la **Comunidad Valenciana**, los especialistas acordaron que «no se exigirán ejercicios que requieran la aplicación de los teoremas de Rolle, valor medio o Cauchy» (propuesta de 9-11-2022 para la PAU 2023; pendiente de confirmar para 2027), y las listas oficiales de Andalucía, Canarias, Cantabria, Castilla y León y Cataluña no los nombran (la de Baleares nombra Rolle, pero no el valor medio).

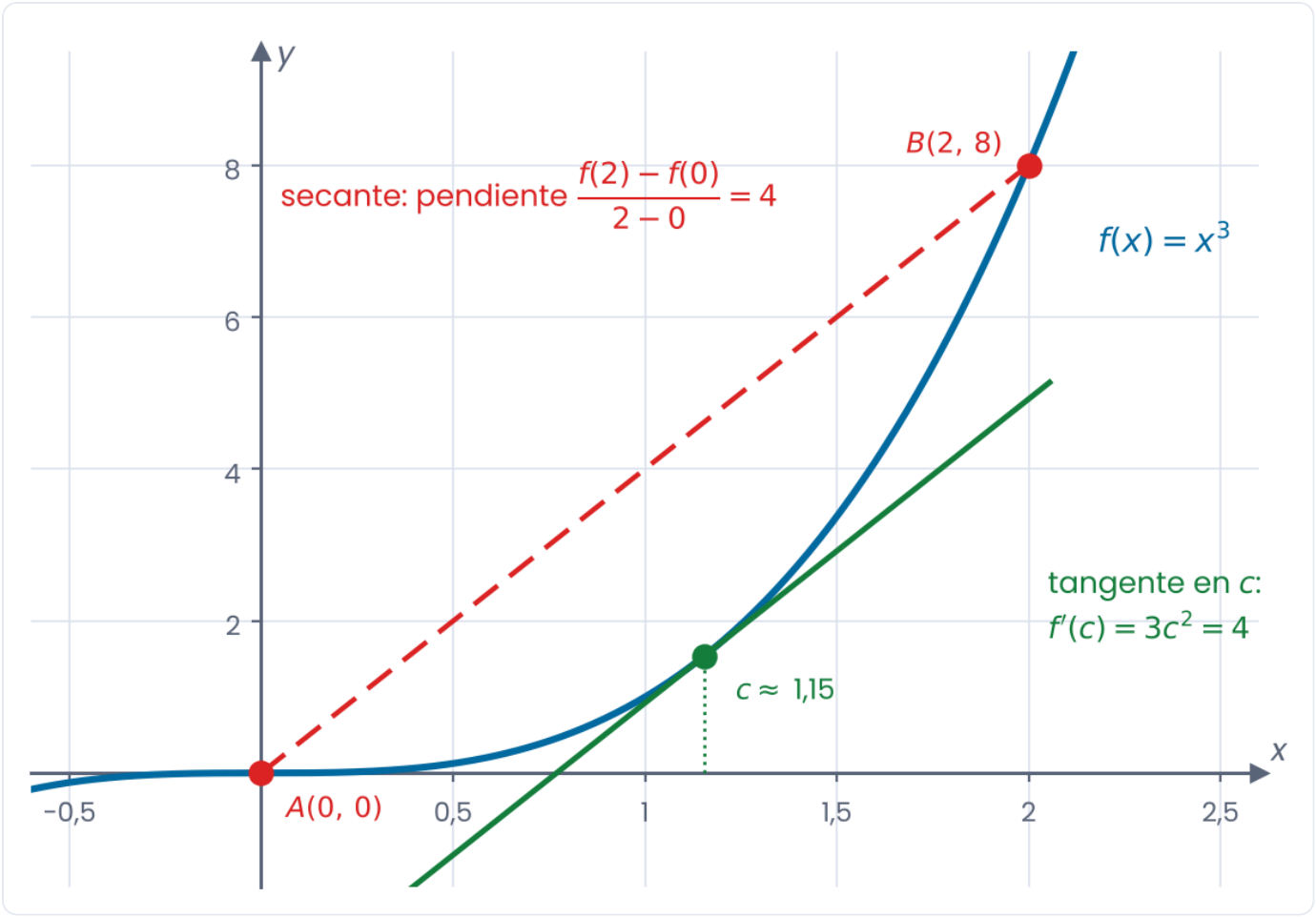
- **Ejemplo de Lagrange:** $f(x) = x^3$ en $[0, 2]$ es continua y derivable (es un polinomio). La pendiente de la secante es $\dfrac{8-0}{2-0} = 4$, y $f'(c) = 3c^2 = 4$ da $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$, que está en $(0, 2)$.
- **Ejemplo de Rolle (Navarra 2025, C1):** $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(x^2 + x - 5)$ en $[2, 3]$. En ese intervalo $x^2 + x - 5 \geq 1 > 0$, así que f es continua y derivable (producto y composición de funciones que lo son). Y $f(2) = \cos\pi \cdot \ln 1 = 0$, $f(3) = \cos\frac{3\pi}{2} \cdot \ln 7 = 0$. Por Rolle, existe $c \in (2, 3)$ con $f'(c) = 0$.
- **Si falla una hipótesis, no hay garantía:** $f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$ cumple $f(-1) = f(1) = 1$, pero no es derivable en 0 y su derivada nunca vale 0 (es -1 o 1).
- **Rolle y las raíces:** entre dos raíces de f hay una de f'. Por eso, si $f'(x) \neq 0$ en todo un intervalo, f tiene **como mucho una** raíz en él. Con Bolzano (Tema 7), que da **al menos una**, sale «exactamente una». Ejemplo: $f(x) = x^3 + x - 1$ tiene $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ y $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: una única raíz real, y está en $(0, 1)$.
- **Galicia 2026 (3.1 c)** pide dibujar, si es posible, una función continua y derivable con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b) y que corte al eje en más de un punto. No es posible: si cortara al eje en dos puntos, por Rolle habría entre ellos un c con $f'(c) = 0$, y $f' > 0$. (Dicho de otro modo, con $f' > 0$ es estrictamente creciente.)
- **«Derivable en el abierto»: lo que pase en a o en b no cuenta.** $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en $[0, 1]$ (Galicia 2023, extraordinaria, y modelo 2025) no es derivable en $x = 1$, pero sí en $(0, 1)$, y es continua en $[0, 1]$: cumple las hipótesis del valor medio. Hay un $c \in (0, 1)$ con $f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = -1$, que es $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- **«f' alcanza el valor k en (a, b)»:** mira si k es la pendiente de la secante, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, y aplica el valor medio. En Murcia 2026 (extraordinaria, 4.1), con $f(x) = x\ln(x^2 + 1)$ en $[1, 2]$: $f(2) - f(1) = 2\ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{25}{2}$, justo el valor del enunciado.

Teorema	Hipótesis	Conclusión	Dibujo
Rolle	Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$	Existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$	Hay al menos un punto con tangente horizontal
Valor medio (Lagrange)	Continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)	Existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$	Hay una tangente paralela a la secante que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

Rolle es el caso particular de Lagrange con $f(a) = f(b)$: la secante es horizontal.

Comprobar las hipótesis vale la mitad

Los criterios de Murcia 2026 (Pregunta 4.1) dan «Justificación de que la función cumple las condiciones del teorema de Lagrange (o de Rolle). [1 pto.]» y otro punto por usarlo para concluir. Navarra 2025 (C1) pide expresamente «Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso». Escribe las hipótesis una a una, con la razón de cada una.



El teorema del valor medio, en un dibujo. Para $f(x)=x^3$ en $[0,2]$, la secante de $A(0,0)$ a $B(2,8)$ tiene pendiente 4. En $c=\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 1{,}15$ la tangente (en verde) tiene la misma pendiente: es paralela a la secante.

7 Ejercicio resuelto: tangentes horizontales con parámetros y monotonía (País Vasco 2025)

PAU PAÍS VASCO 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · CUARTO EJERCICIO, OPCIÓN 4A (2,5 PUNTOS; A ELEGIR ENTRE 4A Y 4B)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Se considera la función $f(x)=x^4+Ax^3+x^2+Bx$.

a) Calcula los valores de los parámetros A y B para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=1$ sean horizontales. (1 punto)

b) Con los valores de A y B que has obtenido en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. (1,5 puntos)

Apartado a)

1. Una recta tangente es horizontal cuando su pendiente vale 0, y la pendiente de la tangente en x_0 es $f'(x_0)$. Así que se pide $f'(0)=0$ y $f'(1)=0$.
2. Derivada (los parámetros son números fijos): $f'(x)=4x^3+3Ax^2+2x+B$.
3. $f'(0)=B=0$. Y $f'(1)=4+3A+2+B=0$; con $B=0$, queda $3A=-6$, es decir, $A=-2$.

SOLUCIÓN $A=-2$ y $B=0$.

Apartado b)

1. Con esos valores, $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$, un polinomio: su dominio es $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$.
2. Factoriza: $f'(x) = 2x\,(2x^2 - 3x + 1) = 2x\,(2x - 1)(x - 1)$. Se anula en $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = 1$ (los dos últimos salen de la ecuación de segundo grado $2x^2 - 3x + 1 = 0$).
3. Signo de f' con un valor de prueba en cada intervalo: $f'(-1) = -12 < 0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} > 0$, $f'\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{16} < 0$ y $f'(2) = 12 > 0$.
4. Conclusión: decrece en $(-\infty, 0)$, crece en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, decrece en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y crece en $(1, +\infty)$.
5. No se pide, pero cierra el estudio: hay mínimos relativos en $(0, 0)$ y $(1, 0)$ y un máximo relativo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$. Encaja con $f(x) = x^2(x - 1)^2 \geq 0$: la función toca el eje en 0 y en 1 sin cruzarlo.

SOLUCIÓN f es creciente en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y en $(1, +\infty)$, y decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Lo que puntúa. Criterios de País Vasco 2025 (4A). a) «Cálculo correcto de la derivada de la función f (0,5 puntos)» y «Cálculo correcto de los valores de los parámetros A y B (0,5 puntos)». b) «Factorización correcta de la derivada de f (0,5 puntos)» y «Determinar correctamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (1 punto)». Los criterios generales añaden que, si el ejercicio está bien, «se dará por bueno íntegramente», y que se valorará negativamente «la incorrecta utilización de los símbolos matemáticos»: escribe los intervalos abiertos y bien ordenados.

Error típico que te quita puntos. Quedarse en los ceros de f' sin estudiar su signo. Da los intervalos abiertos, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, que es el convenio habitual. Y olvidar que el factor $2x$ también cambia de signo: si solo miras $2x^2 - 3x + 1$, te sale el estudio al revés en $(-\infty, 0)$.

8 Ejercicio resuelto: optimización del coste de un jardín (Madrid 2026)

PAU MADRID 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 2 (OBLIGATORIA, 2 PUNTOS)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m² y la parte no techada, 50 €/m² pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

1. **Variables.** Pon el ángulo recto en el origen, el cateto de 56 m sobre el eje X y el de 42 m sobre el eje Y. El rectángulo techado tiene lados x (paralelo al cateto de 56) e y (paralelo al de 42), en metros, con $0 < x < 56$ y $0 < y < 42$.
2. **Relación entre x e y.** El vértice (x, y) está sobre la hipotenusa, la recta que une $(56, 0)$ y $(0, 42)$: $\frac{x}{56} + \frac{y}{42} = 1$, así que $y = \frac{168 - 3x}{4}$. (La solución oficial llega a lo mismo con la semejanza de los dos triángulos sin techar: $\frac{42 - y}{x} = \frac{y}{56 - x}$.)

3. **Función del coste.** El jardín mide $\frac{42 \cdot 56}{2} = 1176$ m². El techado ocupa xy y el resto, $1176 - xy$:

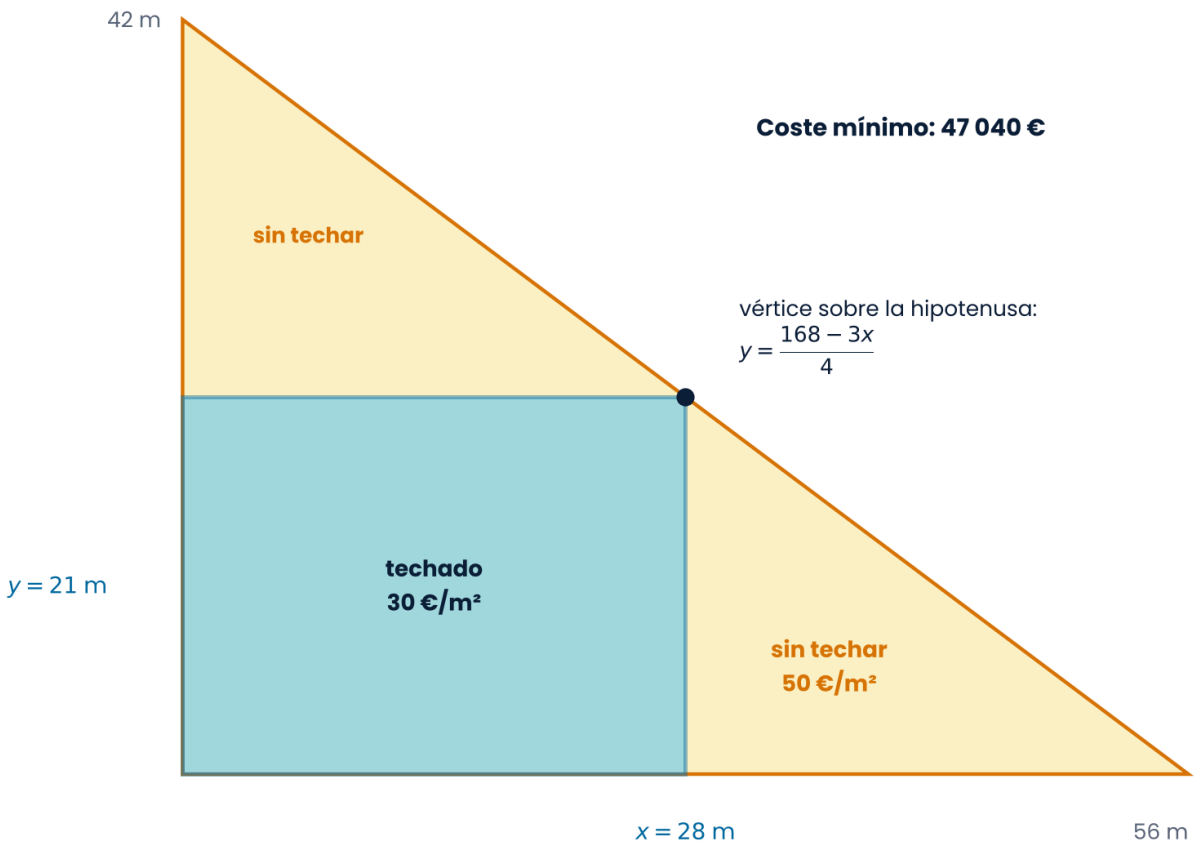
$$C = 30\,xy + 50\,(1176 - xy) = 58\,800 - 20\,xy.$$

4. **Una sola variable.** Sustituyendo y: $C(x) = 58\,800 - 5x\,(168 - 3x) = 15x^2 - 840x + 58\,800$, con $0 < x < 56$. Es la misma función que da la solución oficial.
5. **Derivada igual a cero.** $C'(x) = 30x - 840 = 0$, es decir, $x = 28$, que está en $(0, 56)$.
6. **Es un mínimo.** $C''(x) = 30 > 0$. (O bien: $C'(x) < 0$ si $x < 28$ y $C'(x) > 0$ si $x > 28$, que es como lo justifica la solución oficial.)
7. **Dimensiones.** $y = \dfrac{168 - 84}{4} = 21$. El coste mínimo es $C(28) = 47\,040$ €: 588 m² techados a 30 € y otros 588 m² sin techar a 50 €.

SOLUCIÓN La parte techada debe medir 28 m (paralela al cateto de 56 m) por 21 m (paralela al de 42 m). Ocupa justo la mitad del jardín y el coste mínimo es de $47\,040$ €.

Lo que puntúa. Criterios específicos de Madrid 2026. Planteamiento, 1,1 puntos: 0,6 por escribir la relación entre x e y y la función del coste, y 0,5 por expresarla con una sola variable y derivar igualando a cero. Resolución, 0,9 puntos: 0,6 por el cálculo justificado del valor que optimiza la función, 0,1 «por justificar que es un mínimo» y 0,2 por obtener las dimensiones pedidas. Para todo el examen: «Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas». El planteamiento vale más de la mitad: escribe las variables, la relación y la función aunque luego te equivoques en una cuenta.

Error típico que te quita puntos. Dar solo $x = 28$ y no la otra dimensión (son 0,2 puntos), o no justificar que es un mínimo (0,1). Y mezclar los catetos: con x paralelo al de 56 m, la hipotenusa es $\frac{x}{56} + \frac{y}{42} = 1$; si escribes $\frac{x}{42} + \frac{y}{56} = 1$, las medidas salen cambiadas ($x = 21$, $y = 28$).



El jardín de Madrid 2026, ya optimizado. El rectángulo techado (en azul) de 28 m por 21 m tiene su vértice sobre la hipotenusa y ocupa la mitad del triángulo; el resto (en amarillo) se alicata a 50 €/m². El coste mínimo es de $47\,040$ €.

9 Ejercicio resuelto: monotonía, curvatura y tangente de una función exponencial (Extremadura 2025)

PAU EXTREMADURA 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 2A (2,5 PUNTOS; A ELEGIR ENTRE 2A Y 2B)

Escanea: vídeo de este ejercicio

Dada la función $f(x) = (x-1)e^{-x}$

a) Determina los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (1 punto)

b) Determina la curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión de $f(x)$. (1 punto)

c) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ para $x = 1$. (0,5 puntos)

Apartado a)

1. Dominio: $\mathbb{R}$ (producto de un polinomio y una exponencial).
2. Derivada de un producto, con $(e^{-x})' = -e^{-x}$: $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x-1) \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}\,(1 - x + 1) = (2-x)\,e^{-x}$.
3. Como $e^{-x} > 0$ siempre, el signo de f' es el de $2 - x$: se anula en $x = 2$, es positivo si $x < 2$ y negativo si $x > 2$.

4. f pasa de crecer a decrecer en $x = 2$: máximo relativo en $(2, f(2)) = \left(2, e^{-2}\right) \approx (2;\ 0{,}135)$. No hay más puntos críticos, así que no hay mínimos relativos.

SOLUCIÓN Crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$. Máximo relativo en $\left(2, \frac{1}{e^2}\right)$; no tiene mínimos relativos.

Apartado b)

1. Segunda derivada, otra vez como producto: $f''(x) = -e^{-x} + (2 - x)(-e^{-x}) = e^{-x}\left(-1 - 2 + x\right) = (x - 3)\, e^{-x}$.
2. El signo es el de $x - 3$: $f'' < 0$ si $x < 3$ y $f'' > 0$ si $x > 3$.
3. Cambia de signo en $x = 3$, que es del dominio: punto de inflexión en $(3, f(3)) = \left(3, 2e^{-3}\right) \approx (3;\ 0{,}0996)$.

SOLUCIÓN Cóncava ($\cap$, $f'' < 0$) en $(-\infty, 3)$ y convexa ($\cup$, $f'' > 0$) en $(3, +\infty)$. Punto de inflexión en $\left(3, \frac{2}{e^3}\right)$.

Apartado c)

1. Recta tangente en $x = 1$: $y - f(1) = f'(1)\,(x - 1)$ (Tema 8).
2. $f(1) = 0 \cdot e^{-1} = 0$ y $f'(1) = (2 - 1)\, e^{-1} = \frac{1}{e}$.

SOLUCIÓN $y = \dfrac{1}{e}\,(x - 1)$, es decir, $y = \dfrac{x - 1}{e}$.

Lo que puntúa. Los criterios específicos de Extremadura 2025 no reparten por pasos: cada apartado se da entero «Por cualquier planteamiento correcto y su resolución justificada» (1, 1 y 0,5 puntos). El examen recuerda que el proceso debe ir razonado, «usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados», y que eso «Se valorará con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio» (en los criterios de 2026-27, con preguntas de 2 puntos, el máximo es 0,20); además, se descuentan 0,10 puntos por cada falta de ortografía a partir de la tercera (hasta 1 punto). Justifica el signo de f' y de f'' diciendo que $e^{-x} > 0$.

Error típico que te quita puntos. Derivar e^{-x} como e^{-x} (sin el signo menos): sale $f'(x) = x\, e^{-x}$, con un falso mínimo en $x = 0$. Y llamar «convexa» a la parte $\cap$ sin explicar el convenio: escribe el signo de f'' o el dibujo y no habrá duda.

COMPARATIVA FINAL

Bolzano, Rolle, valor medio, Weierstrass: cuál usar

Te piden…	Usa	Qué compruebas	Lo que cambia en tu comunidad
¿Hay una raíz de f en (a, b)?	Bolzano (Tema 7)	Continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$	Murcia: Bolzano no se evalúa en 2027 (acta del 16-09-2026); no lo nombran las listas de Andalucía ni de Canarias
¿Es única? / ¿Cuántas soluciones hay?	Bolzano y monotonía (o Rolle)	f' de signo constante en cada tramo; un cambio de signo por tramo	Igual en todas salvo Murcia (sin Bolzano en 2027); Castilla y León y Extremadura la han pedido en 2024-2026

Te piden…	Usa	Qué compruebas	Lo que cambia en tu comunidad
¿Se anula f' en (a,b)?	Rolle	Continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)$	Galicia, Navarra, Murcia y Baleares piden enunciarlo (Murcia, sin demostraciones); Asturias y Castilla-La Mancha, aplicarlo; C. Valenciana: «No se exigirán ejercicios que requieran la aplicación de los teoremas de Rolle, valor medio o Cauchy» (propuesta para la PAU de 2023, pendiente de confirmar); no lo nombran las listas de Andalucía, Canarias, Cantabria, Castilla y León ni Cataluña
¿Toma f' el valor $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (o un valor dado)?	Valor medio (Lagrange)	Continua en el cerrado y derivable en el abierto	Baleares: su matriz nombra Bolzano y Rolle, no el valor medio; C. Valenciana: «no se exigirán» (propuesta para la PAU de 2023, pendiente de confirmar)
Máximo y mínimo absolutos en $[a,b]$	Weierstrass y candidatos	f en los puntos con $f'=0$, en los no derivables y en a y b	Igual en todas; sale mucho en Andalucía, y también en Madrid y Aragón
Absolutos en $\mathbb{R}$ o en un abierto	Extremos relativos y límites	Compara los valores con los límites en los bordes	Igual en todas
Probar $f(x)\geq k$ o que $f(x)=k$ no tiene solución	Mínimo o máximo absoluto	El extremo absoluto frente a k	Aragón 2026 y Castilla y León 2024
Hacer máximo o mínimo algo con contexto	Optimización	Función de una variable, dominio con sentido y justificar que es máximo o mínimo	Lo que más cae: Madrid, Navarra, La Rioja y C. Valenciana casi siempre; Castilla y León la nombra en su matriz (B.1 y B.6), aunque no ha caído en 2025-2026

Lo que cambia en cada comunidad sale de su documento oficial de 2026-27 (o de 2025-26 si aún no hay otro): está en la página de tu comunidad, en «Qué entra en Matemáticas II». Que una lista no nombre un teorema no quiere decir que no puedas usarlo para justificar: mira el aviso de tu comunidad en el apartado de Rolle y del valor medio.

Errores que te quitan puntos

Lo que más se confunde en este tema, y cómo decirlo bien.

✗ «Con $k=1$, $f(x)=\frac{x}{e^{2x}}$ crece en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$…» (cuando te piden estudiarla para cualquier k).

✓ Si el enunciado deja el parámetro libre, hay que **discutir todos los casos** ($k>0$, $k<0$, $k=0$), porque el signo de $f'(x)=k(1-2x)e^{-2x}$ depende de k. Las especificaciones de Baleares para 2027 cuentan como error grave, con el 100 % del apartado, «Calcular un cas particular quan es demana el cas general».

Apartado 1: Crecimiento y decrecimiento

✗ «Extremo relativo en el punto $(1,4)$: $f'(1)=4$».

✓ Un **punto** da dos condiciones: la derivada se anula, $f'(1)=0$, y la función pasa por él, $f(1)=4$. Los criterios de Castilla-La Mancha 2026 (extraordinaria, 5.1 a) dan 0,75 de 1 punto por «plantear correctamente las tres ecuaciones» ($f'(1)=0$, $f(1)=4$, $f'(3)=2$) y solo 0,25 por la solución.

Apartado 2: Extremos relativos

✗ «Los extremos de $|x^2-6x+5|$ están donde su derivada vale 0: solo en $x=3$».

✓ Donde lo de dentro se anula ($x=1$ y $x=5$), la función no es derivable y vale 0: son **mínimos**, y absolutos, porque $|u| \geq 0$. Los candidatos a extremo son los puntos con $f'=0$ **y** los puntos donde f no es derivable (Madrid 2026, reserva 1, pregunta 2: «hallar dónde se alcanzan los máximos y mínimos relativos»).

Apartado 2: Extremos relativos

✗ «El máximo relativo de $\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$ es su máximo absoluto, porque es el único».

✓ En un intervalo no acotado hay que mirar los **límites en los bordes**: aquí $f \to 0$ en $\pm\infty$ y $f(1)=\frac{1}{2e}>0$, así que sí es el absoluto, pero hay que decirlo. Sin ese paso, «el único» no prueba nada (una función puede tener un solo máximo relativo y valores mayores lejos). Andalucía 2024 (extraordinaria) pide los extremos absolutos «(abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)».

Apartado 3: Extremos absolutos en un intervalo

✗ «$f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$ no se anula nunca, así que f tiene la misma curvatura en todo su dominio».

✓ El signo de f'' también cambia donde **no está definida**: aquí es negativa para $x<1$ y positiva para $x>1$, así que $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ es cóncava ($\cap$) a la izquierda y convexa ($\cup$) a la derecha. Como $x=1$ no es del dominio, **no hay punto de inflexión**: es lo que pide justificar Canarias 2026 (reserva, 4A). Pon en la tabla de signos los ceros de f'' **y** los puntos fuera del dominio.

Apartado 4: Curvatura y puntos de inflexión

✗ «Para la distancia mínima del punto $(2,0)$ a $y=\sqrt{x+1}$, derivo $\sqrt{x+1}$ e igualo a 0».

✓ Lo que se minimiza es la **distancia**, no la curva: $d(x)=\sqrt{(x-2)^2+(x+1)}$, o mejor su cuadrado, x^2-3x+5, con el mínimo en $x=\frac{3}{2}$. Los criterios de Andalucía 2025 (reserva 3, ejercicio 2) dan «hasta 0,5 puntos por la expresión de la distancia a minimizar». Y di qué es cada variable y en qué unidades: las especificaciones de Baleares para 2027 penalizan como error leve (20-50 % del apartado) «No especificar les variables en la seva totalitat».

Apartado 5: Problemas de optimización

✗ «$S'(a)=0$ solo en $a\approx 10{,}87$, y es un mínimo: el problema del máximo no tiene solución, porque la derivada no se anula en ningún otro sitio».

✓ En un intervalo **cerrado** el máximo puede estar en un **extremo**: en $[0,25]$, $S(25)=625$ (solo cuadrado) es mayor que $S(0)\approx 481$ (solo triángulo). Lo correcto es decir eso y que, si se exige que existan **las dos** figuras ($0<a<25$), el máximo no se alcanza. Es el apartado b) de los modelos de 2026 de Aragón, Baleares y Murcia (el de Galicia 2027 pide solo el mínimo).

Apartado 5: Problemas de optimización

✗ «$\sqrt{1-x^2}$ no es derivable en $x=1$, así que no cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[0,1]$».

✓ El teorema pide **continua en el cerrado** $[a,b]$ y **derivable en el abierto** (a,b): lo que pasa en $x=1$ no importa. La solución oficial de Galicia 2023 (extraordinaria, 3 b) concluye que «si que está nas hipóteses», y sus criterios dan 0,5 puntos «por dicir que a función é continua no cerrado e derivable no aberto».

Apartado 6: Teoremas de Rolle y del valor medio (Lagrange)

Conceptos clave

Función creciente

En un intervalo, si $x_1<x_2$ implica $f(x_1)<f(x_2)$. Si $f'(x)>0$ en todo el intervalo, f es creciente en él.

Función decreciente

En un intervalo, si $x_1<x_2$ implica $f(x_1)>f(x_2)$. Si $f'(x)<0$ en todo el intervalo, f es decreciente en él.

Punto crítico

Punto del dominio donde $f'(x) = 0$ (tangente horizontal) o donde f no es derivable. Es candidato a extremo, pero no siempre lo es.

Extremo relativo

Máximo (o mínimo) relativo en a: $f(a)$ es mayor (o menor) o igual que los valores de f cerca de a. Se da como punto $(a, f(a))$.

Extremo absoluto

El mayor (o el menor) valor que toma f en todo su dominio o en el intervalo dado.

Teorema de Weierstrass

Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza en él un máximo y un mínimo absolutos.

Función convexa (∪)

En un intervalo donde $f'' > 0$: la gráfica se dobla hacia arriba y queda por encima de sus tangentes. Algunos libros la llaman «cóncava hacia arriba».

Función cóncava (∩)

En un intervalo donde $f'' < 0$: la gráfica se dobla hacia abajo y queda por debajo de sus tangentes.

Punto de inflexión

Punto $(a, f(a))$ de la gráfica donde cambia la curvatura. Si existe $f''(a)$, vale 0; pero $f''(a) = 0$ no basta.

Teorema de Rolle

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$.

Teorema del valor medio (Lagrange)

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Condición necesaria de extremo

Si f es derivable en a y tiene en a un extremo relativo, $f'(a) = 0$. No es suficiente: x^3 cumple $f'(0) = 0$ y no tiene extremo.

Criterio de la segunda derivada

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, hay un máximo relativo en a; si $f''(a) > 0$, un mínimo. Si $f''(a) = 0$, no decide.

Función estrictamente monótona

La que solo crece o solo decrece en un intervalo. Si $f' > 0$ (o $f' < 0$) en todo él, lo es, y f se anula como mucho una vez.

MODO PAU

Nueve reglas que valen puntos

Monotonía

Signo de f' en cada intervalo, no solo sus ceros. Intervalos abiertos y dentro del dominio.

Factoriza

f' factorizada da el signo de un vistazo; País Vasco 2025 puntúa la factorización aparte.

Extremos

$f'(a) = 0$ y además cambio de signo de f', o $f''(a) \neq 0$. Da el punto $(a, f(a))$.

Absolutos

Compara los extremos relativos con los bordes del intervalo (o con los límites).

Curvatura

$f'' > 0$: convexa (∪); $f'' < 0$: cóncava (∩). Dibuja el símbolo.

Optimización

Variables con unidades, relación entre ellas, función de una variable con su dominio, derivada igual a cero, justificación y todas las medidas.

Rolle y Lagrange

Primero las hipótesis: continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) (y $f(a) = f(b)$ para Rolle).

Condiciones

Extremo en el punto (x_0, y_0), con f derivable: $f'(x_0) = 0$ y $f(x_0) = y_0$. Inflexión en x_0: $f''(x_0) = 0$.

Distancia

Escribe d en función de x y minimiza d^2, que tiene el mínimo en el mismo punto.

Cómo te lo pueden preguntar

- Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de una función: salió en 17 de las 28 convocatorias ordinarias legibles de 2025 y 2026, en 12 comunidades, a menudo con un contexto (una acción en bolsa, un fármaco, un beneficio).
- Plantea y resuelve un problema de optimización (dimensiones de una ventana, de un jardín, de una caja), o halla el máximo o el mínimo de una función dada: 12 de las 28, en 9 comunidades.
- Calcula parámetros para que la función tenga tangente horizontal o un extremo en un punto dado, y estudia después su monotonía.
- Estudia la curvatura y los puntos de inflexión de una función.
- Halla los extremos absolutos de una función en un intervalo cerrado o el comportamiento «a largo plazo» de un modelo.
- Justifica con el teorema de Rolle o del valor medio que la derivada se anula (o toma un valor) en algún punto, o que una ecuación tiene una sola raíz. Bolzano, Rolle o Lagrange aparecen en 5 de las 28 (Bolzano es del Tema 7).

No lo confundas

- $f'(a) = 0$ (tangente horizontal) con «hay un extremo en a»: x^3 tiene $f'(0) = 0$ y no tiene extremo.
- $f''(a) = 0$ con «hay un punto de inflexión en a»: x^4 tiene $f''(0) = 0$ y no tiene inflexión.
- Extremo **relativo** (comparado con los puntos de alrededor) con extremo **absoluto** (comparado con todo el dominio o el intervalo).
- El **punto** del extremo, $(a, f(a))$, con su **abscisa** a: si te piden el valor máximo, es $f(a)$.
- Convexa ($\cup$, $f'' > 0$) con cóncava ($\cap$, $f'' < 0$): hay libros que lo dicen al revés; el signo de f'' no engaña.
- Rolle (pide además $f(a) = f(b)$; da $f'(c) = 0$) con Lagrange (sin esa condición; da $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$). Y los dos con Bolzano (Tema 7), que habla de $f(c) = 0$, no de $f'(c)$.

Ponte a prueba

PAU Castilla-La Mancha 2025, Ejercicio 1 (obligatorio, 2,5 puntos). La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t+1)e^{-t}$, con $t \geq 0$. a) [1,25 puntos] La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo. b) [1,25 puntos] ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el valor cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

Solución: a) Llama $g(t) = f'(t) = 5e^{-t} - 5(t+1)e^{-t} = -5t\,e^{-t}$; hay que minimizar g. $g'(t) = -5e^{-t} + 5t\,e^{-t} = 5(t-1)\,e^{-t}$, que se anula en $t = 1$, es negativa si $t < 1$ y positiva si $t > 1$: g tiene en $t = 1$ un mínimo, que es absoluto en $[0, +\infty)$, con $g(1) = -\frac{5}{e} \approx -1{,}84$. En $t = 1$ la concentración baja lo más deprisa posible: es un punto de inflexión de f. (Los criterios dan 0,5 puntos a justificar que es mínimo absoluto.) b) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{t\to+\infty} \frac{5(t+1)}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{5}{e^t} = 0$ por L'Hôpital (Tema 8). A largo plazo no quedan virus activos.

PAU Andalucía 2026, Ejercicio 1 (parte obligatoria, 2,5 puntos). Una ventana tiene forma de rectángulo y está coronada por un semicírculo. Sabiendo que el perímetro de la ventana mide 8 metros, halla las dimensiones de la ventana que permitan la mayor entrada de luz.

Solución: Con r el radio del semicírculo (la base del rectángulo mide $2r$) y h la altura del rectángulo, el perímetro (el contorno exterior, sin la base del semicírculo) es $2r + 2h + \pi r = 8$, así que $h = \dfrac{8 - (2+\pi)r}{2}$. La luz es el área: $S = 2rh + \dfrac{\pi r^2}{2} = 8r - \dfrac{4+\pi}{2}\, r^2$.
$S'(r) = 8 - (4+\pi)\, r = 0$ da $r = \dfrac{8}{4+\pi} \approx 1{,}12$ m, y $S'' = -(4+\pi) < 0$: máximo. Entonces $h = \dfrac{8}{4+\pi} \approx 1{,}12$ m. La ventana mide $\dfrac{16}{4+\pi} \approx 2{,}24$ m de ancho; el rectángulo, $1{,}12$ m de alto, y la altura total es también $\approx 2{,}24$ m. Área máxima: $\dfrac{32}{4+\pi} \approx 4{,}48$ m². (Los criterios dan hasta 0,5 puntos por la función de dos variables, 0,25 por la ecuación del perímetro y 0,5 por la función de una variable.)

PAU Murcia 2026, Pregunta 4.1 (a elegir entre 4.1 y 4.2; 2 puntos). Justifique que la derivada de la función $f(x) = e^x(x-1) + 1 - x$ se anula en algún punto del intervalo $(0, 1)$.

Solución: f es suma y producto de una exponencial y polinomios: es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y en particular continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$. Además, $f(0) = e^0(0-1) + 1 - 0 = 0$ y $f(1) = e \cdot 0 + 1 - 1 = 0$: $f(0) = f(1)$. Por el **teorema de Rolle**, existe $c \in (0, 1)$ con $f'(c) = 0$. (Comprobación: $f'(x) = x\, e^x - 1$, y $c \approx 0{,}567$.) Los criterios dan 1 punto a comprobar las hipótesis y 1 a usar el teorema para concluir.

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (Matemáticas II)
2. Examen PAU Matemáticas II País Vasco 2025 (ordinaria)
3. Criterios de corrección y solucionario PAU Matemáticas II País Vasco 2025 (ordinaria)
4. Examen PAU Matemáticas II Madrid 2026 (ordinaria), con criterios específicos de corrección
5. Examen PAU Matemáticas II Extremadura 2025 (ordinaria)
6. Criterios de corrección PAU Matemáticas II Extremadura 2025 (ordinaria)
7. Examen PAU Matemáticas II Castilla-La Mancha 2025 (ordinaria)
8. Soluciones y criterios de corrección PAU Matemáticas II Castilla-La Mancha 2025 (ordinaria)
9. Matemáticas II, Andalucía 2026: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
10. Examen PAU Matemáticas II Murcia 2026 (ordinaria), con criterios de calificación
11. Soluciones PAU Matemáticas II Murcia 2026 (ordinaria)
12. Examen PAU Matemáticas II Asturias 2026 (ordinaria), con criterios y soluciones
13. Matemáticas II, Andalucía 2025: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
14. Examen PAU Matemáticas II Navarra 2025 (ordinaria)
15. Examen PAU Matemáticas II Galicia 2026 (ordinaria)
16. Matemáticas II, C. Valenciana 2024 (ordinaria): examen (Comissió Gestora de les PAU)
17. Matemáticas II, C. Valenciana 2024 (ordinaria): criterios de corrección (Comissió Gestora de les PAU)
18. Matemáticas II, Castilla-La Mancha 2026 (extraordinaria): criterios de corrección (Universidad de Castilla-La Mancha)
19. Matemáticas II, Madrid 2026 (reserva 1): examen y criterios de corrección (Universidad Complutense de Madrid)
20. Matemáticas II, Andalucía 2023: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
21. Matemáticas II, Andalucía 2024: exámenes y criterios de corrección de todas las convocatorias (ordinaria, extraordinaria y reservas), en ZIP (Distrito Único Andaluz)
22. Matemáticas II, Aragón 2026 (extraordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Zaragoza – Comisión Organizadora de la PAU de Aragón)
23. Matemáticas II, Castilla y León 2024 (ordinaria): examen (Universidad de Salamanca)

24. Matemáticas II, Castilla y León 2024 (ordinaria): criterios de corrección (Universidad de Salamanca)
25. Matemáticas II, Murcia 2026 (extraordinaria): examen y criterios de corrección (Universidad de Murcia)
26. Matemáticas II, Aragón 2026 (modelo): examen (Universidad de Zaragoza – Comisión Organizadora de la PAU de Aragón)
27. Matemáticas II, Baleares 2026 (modelo): examen (Universitat de les Illes Balears)
28. Matemáticas II, Murcia 2026 (modelo): examen (Universidad de Murcia)
29. Matemáticas II, Galicia 2027 (modelo): examen (CiUG)
30. Matemáticas II, Galicia 2023 (extraordinaria): criterios de corrección (CiUG)
31. Matemáticas II, Galicia 2025 (modelo): examen (CiUG)
32. Matemáticas II, Andalucía 2025 (modelo): examen y criterios de corrección (Distrito Único Andaluz)
33. Matemáticas II, Canarias 2026 (reserva): examen (Consejería de Educación del Gobierno de Canarias)
34. Matemáticas II, Canarias 2026 (reserva): criterios de corrección (Consejería de Educación del Gobierno de Canarias)
35. Matemàtiques II · Especificacions dels criteris de correcció 2027 (UIB, 13-10-2026; en catalán)
36. Matemàtiques II · Matriu d'especificacions (UIB, 22-9-2026; en catalán)
37. Acta de la reunión de coordinación de Matemáticas II para PAU2027 (Universidad de Murcia, 16-09-2026)
38. Guía de contenidos evaluables de Matemáticas II, PAU 2027 (Subcomisión de Matemáticas II, PAU Canarias)
39. Directrices y orientaciones generales. Curso 2026-2027. Matemáticas II (Distrito Único Andaluz)
40. Matemáticas: estructura del examen y saberes de la materia (Generalitat de Catalunya, versión en castellano)
41. Guía de calificación de Matemáticas II, PAU 2026: matriz de especificación, estructura y criterios de corrección (Junta de Castilla y León)
42. Matemáticas II. Orientacións xerais do Grupo de Traballo, PAU 2027 (CiUG, 22-9-2026; en gallego)
43. Matemáticas II, Navarra: guía de la asignatura, estructura y criterios generales (UPNA, curso 2025-26)
44. Acta de la reunión de Matemáticas II, PAU 2025-2026 (Universidad de Oviedo y Consejería de Educación de Asturias)
45. Coordinación de la PAU en la UCLM · Matemáticas II, curso 2026-2027: contenidos, estructura y criterios (Universidad de Castilla-La Mancha)
46. Acta de coordinación de Matemáticas II de noviembre de 2022, con la propuesta para la PAU de 2023 (Generalitat Valenciana)
47. Real Decreto 534/2024, de 11 de junio, requisitos de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado y características básicas de la prueba de acceso (BOE, texto consolidado)

Imágenes: Monotonía (País Vasco 2025): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · Curvatura (Extremadura 2025): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · Teorema del valor medio: Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con la función exacta. · El jardín (Madrid 2026): Farmeando PAU, esquema de elaboración propia (Python y matplotlib).

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 9 de noviembre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.