Matrices

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en **farmeandopau.com** ›

Última revisión: 31 de octubre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

Una matriz es una tabla de números con la que se opera **fila por columna**, y en general $AB \neq BA$. El tema salió en 24 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 14 comunidades. Lo que más cae es la **ecuación matricial**: despejar X multiplicando por la **inversa por el lado correcto** (15 de 34, en 11 comunidades). Le siguen, con 7 convocatorias cada uno, decidir **si una matriz tiene inversa (o su rango) según un parámetro** con el **determinante** y usar el **producto de matrices para organizar los datos** de una tabla o plantear un sistema. Y casi siempre hay que **calcular una inversa con pasos**.

1 Qué es una matriz y para qué sirve

Una **matriz** de dimensión $m \times n$ es una tabla de números con m filas y n columnas. El elemento a_{ij} es el que está en la **fila** i y la **columna** j. En Mates CCSS las matrices sirven sobre todo para dos cosas: **ordenar datos** (cantidades, precios, horas) y **escribir y resolver ecuaciones** en las que la incógnita es una matriz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz } 2 \times 3\text{: primero filas, después columnas.}$$

- **Dos matrices son iguales** si tienen la misma dimensión y los mismos elementos en las mismas posiciones. Igualar elemento a elemento da un sistema de ecuaciones: así se resuelven los ejercicios de «calcula x, y, z para que se cumpla…» (Extremadura 2025) o de matrices que conmutan, $AB = BA$ (Navarra 2025, La Rioja 2026).
- **Leer un elemento en su contexto:** si las filas de una matriz son plantas de una fábrica y las columnas, modelos de patinete, el elemento de la fila 2 y la columna 1 es «unidades del modelo 1 fabricadas en la planta 2». Navarra lo preguntó así en la extraordinaria de 2026: «Interprete el significado de su elemento a_{21}» (el examen lo llama a_{21} aunque la matriz se llama M).
- **Grafos.** El currículo (RD 243/2022) pide usar matrices para «modelizar situaciones en las que aparezcan sistemas de ecuaciones lineales o grafos». Un grafo (ciudades unidas por vuelos) se escribe con su **matriz de adyacencia**: $a_{ij} = 1$ si hay conexión de i a j y 0 si no; el elemento (i, j) de A^2 cuenta los caminos de **dos pasos**. Con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: el 1 de la posición $(1, 3)$ es el camino $1 \to 2 \to 3$. **Ningún examen de 2025 y 2026 ha traído grafos.**
- Notación de los exámenes españoles: matrices entre **paréntesis**, A^t (o A^T) para la traspuesta, A^{-1} para la inversa, I (o I_n, o «Id» en Baleares) para la identidad, O para la matriz nula y $|A|$ para el determinante.

Tipo	Qué la caracteriza	Ejemplo
Fila / columna	Una sola fila $(1 \times n)$ / una sola columna $(m \times 1)$	$(1\ \ 1\ \ 1)$, $\begin{pmatrix} 250 \\ 325 \end{pmatrix}$
Cuadrada de orden n	Tantas filas como columnas; la **diagonal principal** son los a_{ii}	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
Diagonal	Cuadrada con ceros fuera de la diagonal principal	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$
Identidad I	Diagonal con unos: $AI = IA = A$ (es el «1» de las matrices)	$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Simétrica	Cuadrada con $A^t = A$, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 Operaciones con matrices

- **Suma y resta:** solo entre matrices de la **misma dimensión**, elemento a elemento. **Producto por un número:** se multiplica cada elemento: $2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.
- **Producto de matrices** $A \cdot B$: solo existe si **las columnas de A son tantas como las filas de B**. Si A es $m \times n$ y B es $n \times p$, el resultado es $m \times p$: los dos números de dentro tienen que coincidir y los de fuera dan la dimensión. Cada elemento c_{ij} es **la fila i de A por la columna j de B**: se multiplican término a término y se suma.
- $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3+0 & 0+3+1 \\ 2+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  (es el AB de Madrid 2026, extraordinaria: una 2×3 por una 3×2 da una 2×2).
- **Propiedades:** asociativo, $A(BC) = (AB)C$, y distributivo, $A(B + C) = AB + AC$. Pero **no es conmutativo**: en general $AB \neq BA$ (en el ejemplo de arriba, BA sería 3×3).
- **Traspuesta** A^t: se cambian **filas por columnas** (la primera fila de A es la primera columna de A^t); si A es $m \times n$, A^t es $n \times m$. Propiedades: $(A^t)^t = A$, $(A + B)^t = A^t + B^t$, $(kA)^t = kA^t$ y la que más se usa: $(AB)^t = B^t A^t$ (**cambia el orden**).
- **Potencias** (solo matrices cuadradas): $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$… **fila por columna**, nunca elevando cada elemento.

Lo que con números funciona y con matrices no

Como $AB \neq BA$: $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, que solo es $A^2 + 2AB + B^2$ si A y B conmutan. No existe «dividir entre una matriz»: se multiplica por su inversa. Y $AB = O$ no obliga a que $A = O$ o $B = O$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O$.

3 Matrices para organizar datos de una tabla

En los problemas con contexto (Andalucía, Cataluña, Navarra) te dan los datos, a veces en una tabla, y te piden un total, un ingreso o un coste «mediante un producto de matrices». La clave es **colocar los factores para que encajen**: lo que forman las columnas del primero tiene que ser lo mismo que forman las filas del segundo, y eso es lo que «desaparece» al multiplicar.

- **Sumar filas o columnas con unos:** $(1 \;\; 1 \;\; 1) \cdot A$ suma las **columnas** de A (da los totales de cada columna) y $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ suma sus **filas**. Cataluña 2026 lo usó para sumar los estudiantes de grado, máster y doctorado de tres facultades: $(1 \;\; 1 \;\; 1) \cdot A = (1333 \;\; 533 \;\; 134)$; por el vector de matrículas $(1000 \;\; 1500 \;\; 500)^t$ da 2 199 500 €.
- **Porcentajes con una matriz diagonal:** para aplicar un porcentaje distinto a cada fila, se multiplica por la izquierda por una matriz diagonal con los factores (por ejemplo, $0{,}85$ para quitar un 15 %). Lo ves en el Ejercicio resuelto de Andalucía 2025.
- **De un producto a un sistema:** en Asturias (Pregunta 3B de 2025 y 2026) se opera $A \cdot B \cdot C$ con incógnitas y se iguala elemento a elemento, y en Galicia 2026 (4.3) se pide escribir en forma matricial el sistema que sale de $A \cdot B = C$; ese sistema se discute en el Tema 2.

1 Escribe la matriz de datos

Con sus etiquetas: qué representan las filas (líneas, plantas, vendedores) y qué las columnas (modelos, tipos de gasto). Di su dimensión.

2 Elige el orden del producto

(líneas × modelos) · (modelos × precio) = líneas × precio. Si las etiquetas de en medio no coinciden, cambia el orden o traspón. Un vector fila $(x \;\; y \;\; z)$ va **delante**; un vector columna, **detrás**.

3 Multiplica fila por columna

Escribe al menos una cuenta completa ($20 \cdot 40\,000 + 80 \cdot 30\,000$): los criterios puntúan el planteamiento y el producto por separado.

4 Interpreta y responde

Cada elemento del resultado con sus unidades (euros, horas, unidades) y la respuesta a la pregunta: qué empresa es más barata, qué planta ingresa menos.

CATALUÑA 2025 · EXTRAORDINARIA · EJERCICIO 4, OPCIÓN A

Las líneas L1, L2 y L3 tienen 20, 30 y 40 coches eléctricos y 80, 100 y 110 de combustión; el eléctrico se vende a 40 000 € y el de combustión a 30 000 €. «Obtenga, mediante un producto de matrices, la matriz que expresa los ingresos por cada línea una vez que se hayan vendido todos los coches.»

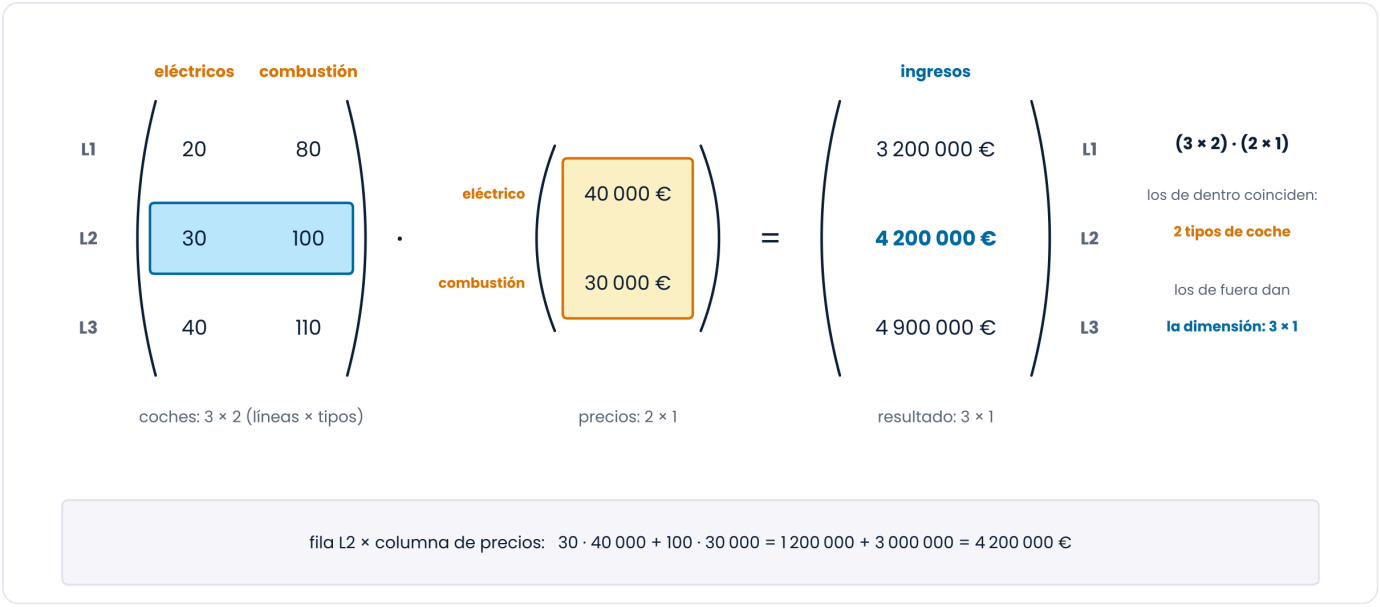
Respuesta modelo

Matriz de coches (líneas × tipos), 3×2, por vector de precios (tipos × 1), 2×1: el resultado es 3×1, un ingreso por línea.

$$\begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 100 \\ 40 & 110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40\,000 \\ 30\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,200\,000 \\ 4\,200\,000 \\ 4\,900\,000 \end{pmatrix}$$

La línea L1 ingresa 3 200 000 €; L2, 4 200 000 €, y L3, 4 900 000 €.

Por qué puntúa. Los criterios (traducidos del catalán) dan 0,75 puntos a «Obtención de las matrices y cálculo del producto de matrices». El orden contrario, precios por coches, no se puede multiplicar.



Fila por columna, con sentido. Con los datos de Cataluña 2025 (extraordinaria): la fila de la línea L2 por la columna de precios da el ingreso de L2. Las columnas de la primera matriz (tipos de coche) coinciden con las filas de la segunda: por eso el producto $3 \times 2 \cdot 2 \times 1$ existe y da 3×1.

4 La matriz inversa: qué es, cuándo existe y cómo se calcula

La **inversa** de una matriz cuadrada A es la matriz A^{-1} que cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Si existe, A es **regular** (o invertible); si no, es **singular**.

- **Cuándo existe:** si y solo si $|A| \neq 0$ (el determinante, en la sección siguiente) o, lo que es lo mismo, si el rango de A es igual a su orden. Las matrices que no son cuadradas no tienen inversa.
- **Es única**, y con matrices cuadradas basta un producto para reconocerla: si $AB = I$, entonces también $BA = I$, así que $B = A^{-1}$ y $A = B^{-1}$. Es lo que pedía Baleares 2025 («¿Es cierto que $A = B^{-1}$? ¿Es cierto que $B = A^{-1}$?», traducido del catalán): se contesta con un solo producto.
- **Atajo para 2×2:**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad \text{si } ad - bc \neq 0.$$

  Se intercambian los de la diagonal principal, se cambian de signo los otros dos y se divide entre el determinante. Con la matriz de Aragón 2026 (extraordinaria): $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{16 - 15} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.
- **Propiedades:** $(A^{-1})^{-1} = A$; $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ (Galicia 2025 pidió $(A^t)^{-1}$ «utilizando el apartado anterior»: basta trasponer A^{-1}); $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ si $k \neq 0$; y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (**cambia el orden**).
- **Método de Gauss-Jordan** (para 3×3, o para 2×2 si no usas el atajo): se escribe $(A \mid I)$ y se opera **por filas** en los dos lados a la vez (sumar a una fila un múltiplo de otra, multiplicar una fila por un número distinto de cero, intercambiar filas) hasta llegar a $(I \mid A^{-1})$. Si a la izquierda sale una fila de ceros, A no tiene inversa. Ejemplo con la matriz de Galicia 2025 (extraordinaria), $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

- $$\xrightarrow[F_2-F_3]{F_1-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Comprueba siempre que $A \cdot A^{-1} = I$: es medio minuto y te ahorra arrastrar un error.

> **Primero justifica que existe; después calcúlala con pasos**
>
> Antes de usar A^{-1} di por qué existe ($|A| \neq 0$). Y escribe el método: en Cantabria (criterios de la extraordinaria de 2025), «Si el alumno no muestra los pasos para obtener M⁻¹ y solo escribe el resultado (de calculadora), no se puntuará la parte correspondiente»; en Baleares 2025, «Penalización con -1 pt si se calcula la inversa con calculadora» (traducido del catalán), aunque en 2027 la 3×3 y los determinantes ya pueden salir de la calculadora y solo la 2×2 se hace a mano (especificaciones de corrección 2027); y en Andalucía las directrices 2026-27 dicen: «Si se obtienen resultados directamente con la calculadora, explique con todo detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma».

5 Determinantes de orden 2 y 3, y la inversa por adjuntos

Los **determinantes** no aparecen con ese nombre en los saberes básicos del RD 243/2022 para Mates CCSS II, pero **casi todas las comunidades que ponen matrices los usan** (Cataluña no los nombra; en Baleares la matriz 2026-27 no prioriza su cálculo, «si bien se pueden utilizar», y las especificaciones 2027 dejan calcularlos con calculadora; y en Asturias, en 2025-2026, las matrices solo han servido para plantear un sistema): las directrices de Andalucía para 2027 incluyen el «Cálculo de determinantes hasta de orden 3 para el cálculo del rango y la inversa de una matriz», y el esquema de contenidos de Murcia (PAU2027), «Determinante de matrices de orden 2 y 3». El determinante de una matriz cuadrada es **un número**, y se escribe $|A|$ o $\det A$.

- **Orden 2:** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (diagonal principal menos diagonal secundaria).
- **Orden 3 (regla de Sarrus):** los tres productos «paralelos» a la diagonal principal suman y los tres paralelos a la secundaria restan:

  $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

  Con la matriz de Galicia de la sección anterior: $1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - (2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0) = 1 - 2 = -1$.
- **La regla que se usa en la PAU:** A tiene inversa $\iff |A| \neq 0$. Con un parámetro: calcula $|A|$ en función del parámetro, **iguala a cero**, resuelve y concluye «tiene inversa para todos los valores **salvo** esos». En Navarra 2025 (extraordinaria), $B = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene $|B| = 2 - 3a$: tiene inversa si $a \neq \frac{2}{3}$.
- **Propiedades que caen** (A y B cuadradas de orden n): $|AB| = |A|\,|B|$; $|A^t| = |A|$; $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$; $|A^2| = |A|^2$; y $|kA| = k^n|A|$ (**k elevado al orden**, no $k|A|$). Además, una fila (o columna) de ceros o dos filas proporcionales dan determinante 0; multiplicar una fila por k multiplica el determinante por k; sumar a una fila un múltiplo de otra no lo cambia; e intercambiar dos filas le cambia el signo.
- **Inversa por adjuntos.** El **adjunto** A_{ij} de un elemento es $(-1)^{i+j}$ por el determinante que queda al tachar su fila y su columna (signos en tablero: $+\ -\ +$ en la primera fila). La **matriz adjunta** $\mathrm{Adj}(A)$ es

la de los adjuntos, y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\operatorname{Adj}(A)\right)^t.$$

Con la matriz de Galicia: $\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, su traspuesta es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y, dividiendo entre $|A| = -1$, sale la misma A^{-1} que por Gauss-Jordan.

Método	Cuándo conviene	Lo que no puede faltar
Fórmula 2×2	Siempre que la matriz sea 2×2	Comprobar $ad - bc \neq 0$ antes de dividir
Gauss-Jordan	Matrices 3×3 con ceros o unos; vale aunque no sepas si hay inversa (si sale una fila de ceros, no la hay)	Escribir cada operación de filas ($F_3 - F_1$…) sobre la flecha
Adjuntos	Cuando ya has calculado $\|A\|$ (por ejemplo, porque te pedían para qué valores existe)	Los signos de los adjuntos, **trasponer** y dividir entre $\|A\|$

Los criterios aceptan cualquiera de los métodos: Aragón 2025 (extraordinaria) puntúa por Gauss «hacer ceros bajo la diagonal» y «llegar a la matriz identidad», y por la fórmula, la adjunta, el determinante y «trasponer y llegar al resultado final»; las soluciones oficiales de Murcia, Galicia y País Vasco usan adjuntos.

GALICIA 2026 · ORDINARIA · PREGUNTA 4.4

«Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \\ 1 & k^2 \end{pmatrix}$. Calcule los valores de k para los que la matriz $A^t \cdot B$ tenga inversa, siendo A^t la matriz traspuesta de A.» (1,5 puntos)

Respuesta modelo

A y B no son cuadradas, pero $A^t \cdot B$ sí: $(2 \times 3) \cdot (3 \times 2) = 2 \times 2$.

$$A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \\ 1 & k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 + k + k^2 \\ 6 & 1 + 2k + 3k^2 \end{pmatrix}$$

$|A^tB| = 3(1 + 2k + 3k^2) - 6(1 + k + k^2) = 3k^2 - 3$, que se anula si $k = 1$ o $k = -1$. **Tiene inversa si $k \neq 1$ y $k \neq -1$** (coincide con la solución oficial).

Por qué puntúa. Aquí no se puede usar $|A^tB| = |A^t|\,|B|$: esa propiedad solo vale para matrices cuadradas.

6 Ecuaciones y sistemas matriciales: despejar X

Es **el ejercicio de matrices que más cae** (15 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 11 comunidades). Como no se divide entre matrices, para «quitar» la matriz que multiplica a X se multiplica **por su inversa por el mismo lado** en los dos miembros: $A^{-1}A = I$ e $IX = X$.

- **La dimensión de X:** si te la piden, sale de que los productos existan. En Aragón 2025 (extraordinaria), en $3AX - B = C$ con A de 2×2 y B, C de 2×3, X tiene que ser 2×3 (0,5 puntos solo por decirlo).
- **Si la matriz no tiene inversa** para algún valor del parámetro, la ecuación puede no tener solución: País Vasco 2026 (extraordinaria) daba 0,25 puntos por «Demostrar que para a = 2 no existe solución».
- **Sistemas de ecuaciones matriciales** (Extremadura 2026 y Navarra 2026, extraordinarias): se resuelven **por reducción**, como con números. En Navarra, de $X + 2Y = A^t$ y $3X - Y = B$, sumando la primera y el doble de la segunda sale $7X = A^t + 2B$. Solo se divide **entre un número**, nunca entre una matriz.

- **Atajos que ahorran cuentas:** si al despejar te queda $A^{-1}A^2$, es A; si te queda $A^{-1}A$, es I. Los criterios de Aragón 2025 (ordinaria) aceptan los dos caminos con la misma nota: calcular la inversa o desarrollar $X = A^{-1}A^2 - 2A^{-1}A = A - 2I$, que no necesita ninguna inversa.

Junta las X en un miembro

Como en una ecuación con números: lo que no lleva X, al otro lado.

Saca factor común por el lado correcto

Si la X está a la derecha en todos los términos, $AX + BX = (A + B)X$; si está a la izquierda, $XA + XB = X(A + B)$. Una X sola es IX (o XI). Si las X no quedan del mismo lado ($AX = XB$), no hay factor común: se plantea con las incógnitas de X.

Justifica la inversa y multiplica por ese lado

$|M| \neq 0$ para la matriz M que vas a invertir; después, opera sin cambiar el orden de los productos.

Ecuación	Qué haces	Solución
$AX = B$	A^{-1} por la izquierda	$X = A^{-1}B$
$XA = B$	A^{-1} por la derecha	$X = BA^{-1}$
$AX + B = C$	Pasa B restando y multiplica por A^{-1} por la izquierda	$X = A^{-1}(C - B)$
$AXB = C$	A^{-1} por la izquierda y B^{-1} por la derecha	$X = A^{-1}CB^{-1}$
$AXA^{-1} = B$	A^{-1} por la izquierda y A por la derecha	$X = A^{-1}BA$
$AX - X = B$	$X = IX$: factor común por la derecha, $(A - I)X = B$	$X = (A - I)^{-1}B$
$kXA = B$	El número pasa dividiendo; la matriz, con su inversa	$X = \frac{1}{k}BA^{-1}$

ARAGÓN 2025 · ORDINARIA · PREGUNTA 4, Q2

«Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $AX + 2A = A^2$ despejando previamente X.» (5 puntos sobre 10)

Respuesta modelo

$AX = A^2 - 2A$. $|A| = 2 - 1 = 1 \neq 0$, así que existe A^{-1}; multiplicando por la izquierda: $X = A^{-1}(A^2 - 2A) = A^{-1}A^2 - 2A^{-1}A = A - 2I$.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por qué puntúa. Criterios de Aragón: «Despejar la matriz, $X = A^{-1}(A^2 - 2A)$ (1,5 ptos)», y «Si se ha optado por desarrollar $X = A^{-1}A^2 - 2A^{-1}A = A - 2I$ (1,5 + 1 ptos). Realizar la operación anterior (1 pto)».

CASTILLA-LA MANCHA 2026 · ORDINARIA · EJERCICIO 3, B.3

«Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple que $AXA^{-1} = B$.» (1 punto)

Respuesta modelo

Multiplicando por A^{-1} por la izquierda y por A por la derecha: $X = A^{-1}BA$. $|A| = 1$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad X = A^{-1}(BA) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

(Coincide con la solución oficial.)

Errores que quitan puntos

Escribir $(A - 1)X$ en lugar de $(A - I)X$: no se puede restar un número a una matriz. Multiplicar por la inversa por el lado equivocado ($X = BA^{-1}$ cuando era $X = A^{-1}B$). «Simplificar» A y A^{-1} cuando no están juntas: de $AXA^{-1} = B$ no sale $X = B$.

7 El rango de una matriz

El **rango**, $\operatorname{rg} A$, es el número máximo de filas (o de columnas) linealmente independientes, es decir, que no se pueden obtener combinando las demás. Una matriz cuadrada de orden n tiene inversa si y solo si su rango es n.

- **Por Gauss:** se escalona con operaciones de fila (no cambian el rango) y se cuentan las filas que no son todo ceros. Ejemplo de Galicia 2025 (extraordinaria): $BA^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, así que $\operatorname{rg}(BA^t) = 1$: la segunda fila es -2 veces la primera.
- **Por determinantes (menores):** una 3×3 con $|A| \neq 0$ tiene rango 3. Si $|A| = 0$, el rango es 2 si hay algún determinante 2×2 (menor) distinto de cero, y 1 si todos son cero pero la matriz no es nula.
- **Con un parámetro** (La Rioja 2025, Murcia y Andalucía 2026; en Galicia no entra: «No se considerará el estudio del rango de una matriz dependiente de un parámetro», orientaciones 2026-27, traducido del gallego): calcula $|A|$ en función del parámetro e iguala a cero. Para los demás valores, $\operatorname{rg} A = 3$. Para cada valor que lo anula, sustitúyelo y busca un menor 2×2 no nulo. En La Rioja 2025, $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 1 & k & 4 \\ k+3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ tiene $|A| = 4k^2 - 20k + 24 = 4(k-2)(k-3)$: **rango 3 si $k \neq 2$ y $k \neq 3$**, y rango 2 para $k = 2$ y $k = 3$ (el menor $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ k & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$).
- El rango es la pieza central de la discusión de sistemas (teorema de Rouché-Frobenius): lo ves en el Tema 2.

8 Potencias e igualdades con parámetros

Algunos ejercicios no piden despejar, sino **imponer una igualdad** ($A^2 = I$, $A^2 = A$, $AB = BA$) o **calcular una potencia alta**. Siempre se hace igual: se opera con las incógnitas, se igualan los elementos y se resuelve el sistema que sale.

- **Potencias A^n:** calcula A^2, A^3… hasta ver el patrón. Si $A^2 = I$, las potencias se alternan: $A^n = I$ si n es par y $A^n = A$ si n es impar (Extremadura 2026 pidió A^{99}; La Rioja 2026, M^{21}).

- **Matriz idempotente:** $A^2 = A$ (Comunitat Valenciana 2026 la define en el enunciado; Baleares 2025 y Castilla-La Mancha 2027 también la usan). Entonces $A^n = A$ para todo n. **Matriz involutiva:** $A^2 = I$, y entonces $A^{-1} = A$ sin hacer ninguna cuenta (La Rioja la usó en las extraordinarias de 2025 y 2026).
- **Matrices que conmutan:** $AB = BA$. Se calculan los dos productos con las letras y se igualan los cuatro elementos (algunas ecuaciones se repiten). En Navarra 2025, con $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$: $AB = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 3b & -2a \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$, así que $a = 1$ y $b = -\frac{8}{3}$.

LA RIOJA 2026 · EXTRAORDINARIA · EJERCICIO 3, OPCIÓN 3.1 A)

«Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$, a: número real. Se pide: a) (1 PUNTO) Calcula el valor de "a" para que se cumpla: $M^2 = I$. Para ese valor de "a", calcula la matriz inversa de M y halla M^{21}.»

Respuesta modelo

$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+1 & a-a \\ a-a & 1+a^2 \end{pmatrix} = (a^2+1)\,I$. Para que sea I: $a^2 + 1 = 1$, es decir, $a = 0$. Entonces $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y, como $M^2 = I$, $M^{-1} = M$. Por último, $M^{21} = (M^2)^{10}M = I^{10}M = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Por qué puntúa. Criterios de La Rioja: «Calcular M² (0,35 puntos); plantear el sistema y valor de "a" (0,20 puntos), Matriz inversa de A [sic: es M] (0,10 puntos), M²¹ (0,35 puntos)».

9 Qué piden de matrices en cada comunidad

Las matrices cayeron en 24 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 14 comunidades. Lo que cambia de una a otra es **el tipo de ejercicio** y **qué método aceptan** para la inversa. Mira tu fila.

Comunidad	Qué cae (2025–2026)	Inversa y determinantes
Andalucía	Datos en forma matricial, inversa o rango según un parámetro, ecuación con traspuesta	Determinantes hasta orden 3 (directrices 2027); si usas calculadora, explica los pasos
Aragón	Ecuación 2×2 «despejando previamente X» (cuestión optativa)	Gauss o adjuntos; se puntúa despejar antes de calcular
Asturias	Producto de matrices que da un sistema con parámetro	La inversa no ha caído (el resto es Tema 2); calculadora sin matrices ni determinantes
Baleares	Inversa dada o comprobada, $Ax = v$, idempotentes	Inversa 2×2, a mano (sin procedimiento, 0); la 3×3 y los determinantes, también con calculadora (especificaciones 2027; en 2025, -1 punto)
Canarias y Castilla y León	No ha caído (en Castilla y León, la matriz de la guía 2025-26 no nombra la inversa, los determinantes, el rango ni las ecuaciones matriciales)	—
Cantabria	Solo extraordinaria 2025: inversa según un parámetro y $MX = 2N$	Sin pasos, la inversa no puntúa
Castilla-La Mancha	Subapartado de 1 punto: $ABX = CX + I$, $AXA^{-1} = B$	Inversas 2×2
Cataluña	Solo productos para organizar datos	Orientaciones: suma, producto y «ecuaciones matriciales (2 x 2)» (traducido del catalán); ni determinantes ni inversas 3×3
C. Valenciana	Ecuación con traspuesta e inversa + apartado con parámetro	Inversa 2×2 o 3×3

Comunidad	Qué cae (2025–2026)	Inversa y determinantes
Extremadura	Inversa según un parámetro, A^{99}, sistemas matriciales	Determinantes 3×3 (pueden salir de la calculadora); la inversa, paso a paso (uso de la calculadora 2025-26)
Galicia	Inversa 3×3, $(A^t)^{-1}$, ecuaciones, conmutan, A^tB con parámetro	Adjuntos (solución oficial 2026)
La Rioja	Rango con parámetro, $M^2 = I$, conmutan, ecuaciones	Determinantes; los criterios no fijan el método de la inversa
Madrid	$AXB = A + B$ con 3×3 y $\lvert C^2B\rvert$; $(AB + I)^{-1}$ y un parámetro (extr. 2026)	Propiedades de los determinantes
Murcia	Regularidad o rango por el determinante, inversa 3×3, ecuación	Adjuntos (solución oficial de la extr. 2026); en 2027 no se pedirá «resolver determinantes usando las propiedades» (esquema de contenidos PAU2027)
Navarra	Tablas de datos, conmutan, ecuaciones y sistemas matriciales, inversa 3×3	Calculadora sin «operaciones con matrices, cálculo de determinantes»
País Vasco	$\lvert A^2\rvert = \lvert A\rvert^2$, inversa 3×3, ecuaciones	Adjuntos en los criterios; calculadora sin matrices ni determinantes

Fuente: exámenes y criterios oficiales de 2025 y 2026 (ordinaria y extraordinaria) y modelos de 2027. Las citas de Baleares están traducidas del catalán; las de la Comunitat Valenciana, del valenciano.

10 Ejercicio resuelto: ecuación matricial con la inversa por la derecha e idempotente (Comunitat Valenciana 2026)

PAU COMUNITAT VALENCIANA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · APARTADO 1, PROBLEMA 1.A (A ELEGIR ENTRE 1.A Y 1.B; 3,5 PUNTOS)

Consideramos las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $4XB + C^tD = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y C^t la traspuesta de la matriz C. (2 puntos)

b) Una matriz A se dice que es idempotente si $A^2 = A$. Consideramos la matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Determina para qué valores de z la matriz FC es idempotente. (1,5 puntos)

Apartado a)

1. **Qué te piden:** una ecuación matricial en la que X va **a la izquierda** de B. Primero se despeja con letras y después se calcula. Herramienta: la inversa de B, multiplicando **por la derecha**.
2. **Despejar.** Pasamos C^tD restando: $4XB = I - C^tD$. Multiplicamos los dos miembros por B^{-1} por la derecha ($XBB^{-1} = XI = X$) y dividimos entre el número 4:

$$X = \frac{1}{4}\left(I - C^tD\right)B^{-1}.$$

3. C^tD. C es 3×2, así que $C^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ es 2×3 y, por D (3×2), da una 2×2:

$$C^tD=\begin{pmatrix}1+0+1&-1+0+3\\0-2+0&0+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&0\end{pmatrix},\qquad I-C^tD=\begin{pmatrix}-1&-2\\2&1\end{pmatrix}.$$

4. B^{-1}. $|B|=4\cdot 3-(-1)(-2)=12-2=10\neq 0$, así que B tiene inversa. Con la fórmula 2×2:

$$B^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}.$$

5. **Producto, sin cambiar el orden:**

$$X=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}=\frac{1}{40}\begin{pmatrix}-3-4&-1-8\\6+2&2+4\end{pmatrix}=\frac{1}{40}\begin{pmatrix}-7&-9\\8&6\end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN $X=\frac{1}{4}(I-C^tD)B^{-1}=\begin{pmatrix}-7/40&-9/40\\1/5&3/20\end{pmatrix}$, la misma que da la solución oficial.

Apartado b)

1. **Qué te piden:** calcular FC (con la z dentro), elevarla al cuadrado e imponer $(FC)^2=FC$ elemento a elemento.
2. F es 2×3 y C es 3×2: FC es 2×2.

$$FC=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\z&0\end{pmatrix}.$$

3. $$(FC)^2=\begin{pmatrix}1&1\\z&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\z&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+z&1\\z&z\end{pmatrix}.$$

4. Igualamos con FC: $\begin{pmatrix}1+z&1\\z&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\z&0\end{pmatrix}$. Elemento $(1,1)$: $1+z=1\Rightarrow z=0$. Elemento $(2,2)$: $z=0$. Los otros dos se cumplen siempre. Las dos condiciones dan lo mismo, así que hay solución.

SOLUCIÓN FC es idempotente **solo para** $z=0$ (entonces $FC=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ y su cuadrado es ella misma).

Lo que puntúa. Criterios oficiales (traducidos del valenciano): a) «De 0 a 1 punto por obtener correctamente la expresión de la matriz X: $X=\frac{1}{4}(I-C^tD)B^{-1}$. De 0 a 0,25 puntos por calcular correctamente la matriz C^tD. De 0 a 0,5 puntos por calcular correctamente la matriz B^{-1}. De 0 a 0,25 puntos por calcular correctamente la matriz X». b) «De 0 a 0,75 puntos por obtener correctamente FC y $(FC)^2$. De 0 a 0,5 puntos por plantear correctamente la ecuación que permite obtener z. De 0 a 0,25 puntos por obtener el resultado $z=0$». Además, cada error en operaciones aritméticas elementales resta 0,1 puntos (hasta 0,25 por apartado). Fíjate: **despejar bien vale la mitad del apartado a)**.

Error típico que te quita puntos. Escribir $X=\frac{1}{4}B^{-1}(I-C^tD)$: la X está a la izquierda de B, así que la inversa va **a la derecha**. También es frecuente operar CD^t o C^tD^t en vez de C^tD; antes de multiplicar, comprueba

las dimensiones.

11 Ejercicio resuelto: matriz regular según un parámetro, inversa 3 × 3 por adjuntos y ecuación (Murcia 2026)

PAU REGIÓN DE MURCIA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 4, OPCIÓN A (A ELEGIR ENTRE A Y B; 2 PUNTOS)

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & k & -k\\ 2 & -1 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Averigüe para qué valores de k la matriz A es regular. (0,5 puntos)

b) Para k=1, calcule A^{-1}. (0,75 puntos)

c) Para k=1, resuelva $AX-A=5(B\cdot C)^t$. (0,75 puntos)

Apartado a)

1. **Qué te piden:** «regular» significa «con inversa», y eso ocurre si y solo si $|A|\neq 0$. Herramienta: el determinante con el parámetro.
2. **Sarrus.** Productos que suman: $3\cdot(-1)(-2)+k\cdot(-4)\cdot 1+(-k)\cdot 2\cdot 0=6-4k$. Productos que restan: $(-k)(-1)\cdot 1+3\cdot(-4)\cdot 0+k\cdot 2\cdot(-2)=k-4k=-3k$.
3. $|A|=(6-4k)-(-3k)=6-k$, que se anula solo si $k=6$.

SOLUCIÓN A es regular para **todo** $k\neq 6$; para $k=6$ no tiene inversa.

Apartado b)

1. Con $k=1$, $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ y, por el apartado a), $|A|=6-1=5\neq 0$: tiene inversa. Como ya tenemos el determinante, usamos **adjuntos** (es el método de la solución oficial de Murcia en la extraordinaria de 2026).
2. **Adjuntos** (signos $+\,-\,+\,/\,-\,+\,-\,/\,+\,-\,+$): $A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 0 & -2\end{vmatrix}=2$, $A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=0$, $A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1$; $A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=2$, $A_{22}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-5$, $A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1$; $A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}=-5$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -4\end{vmatrix}=10$, $A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5$.
3. $$\operatorname{Adj}(A)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 1\\ -5 & 10 & -5\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\big(\operatorname{Adj}(A)\big)^t=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 2 & -5\\ 0 & -5 & 10\\ 1 & 1 & -5\end{pmatrix}.$$
4. **Por Gauss-Jordan** sale lo mismo (es igual de válido). **Comprobación:** la primera fila de A por la primera columna de $5A^{-1}$ da $3\cdot 2+1\cdot 0+(-1)\cdot 1=5$ y por la segunda, $3\cdot 2+1\cdot(-5)+(-1)\cdot 1=0$: vamos bien.

SOLUCIÓN $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/5 & 1/5 & -1 \end{pmatrix}$.

Apartado c)

1. **Despejar.** $AX = A + 5(BC)^t$. Como A es regular, multiplicamos por A^{-1} **por la izquierda**: $X = A^{-1}A + 5A^{-1}(BC)^t = I + 5A^{-1}(BC)^t$.
2. BC **y su traspuesta.** B es 3×2 y C es 2×3, así que BC es 3×3:

$$BC = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (BC)^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. **El 5 se va con el $\frac{1}{5}$ de la inversa:** $5A^{-1}(BC)^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -14 & 9 \\ -5 & 30 & -10 \\ -1 & -12 & 7 \end{pmatrix}$.
4. Sumamos la identidad (solo cambia la diagonal).

SOLUCIÓN $X = \begin{pmatrix} -1 & -14 & 9 \\ -5 & 31 & -10 \\ -1 & -12 & 8 \end{pmatrix}$ (comprobado: $AX - A = 5(BC)^t$).

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Murcia: a) «Cálculo correcto del determinante (0,3 puntos); Cálculo del valor del parámetro para el que la matriz es regular (0,2 puntos)»; b) «Cálculo de la inversa de A (0,75 puntos). Por cada error de cálculo se resta 0,1 puntos»; c) «Expresión correcta de la ecuación matricial (0,5 puntos); Cálculo correcto de la solución (0,25 puntos)». Los criterios generales piden expresar «de forma razonada el proceso seguido» y distinguen errores triviales (-0,1) y no triviales (-0,2), como «despejar mal la incógnita de una ecuación».

Error típico que te quita puntos. Escribir $X = 5(BC)^t A^{-1} + I$ (inversa por la derecha) o olvidar que $A^{-1}A = I$ y dejar $X = A^{-1}A + \ldots$ sin simplificar. En el apartado a), concluir «regular si $k = 6$»: es justo al revés.

12 Ejercicio resuelto: matrices para organizar datos e inversa según un parámetro (Andalucía 2025)

PAU ANDALUCÍA 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · BLOQUE A, EJERCICIO 1 (OBLIGATORIO; 2,5 PUNTOS)

EJERCICIO 1

a) Plantee y resuelva el siguiente problema de forma matricial: El gerente de una empresa de productos hospitalarios desea introducir un nuevo producto en el mercado nacional. Para ello contrata a 3 vendedores que se han encargado de las zonas A, B y C del país, respectivamente. El vendedor de la zona A ha trabajado 40 horas, ha realizado 10 demostraciones y 5 viajes para dicha promoción. El vendedor de la zona B ha trabajado el doble de horas que el de la zona A, realizando 15 demostraciones y 8 viajes. En cuanto al vendedor de la zona C, ha trabajado 100 horas, ha realizado 25 demostraciones y 10 viajes. El gerente debe abonarles 75€ por hora trabajada, 300€

por demostración y 250€ por viaje realizado. Teniendo en cuenta que, además, debe aplicárseles una retención en concepto del impuesto del IRPF del 15% si la cantidad a abonar al vendedor es menor de diez mil euros y del 18% en caso contrario, determine la cantidad final que cobrará cada vendedor. (1,75 puntos)

b) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ¿Para qué valores de a es la matriz A invertible? (0,75 puntos)

Apartado a)

1. **Qué te piden:** organizar los datos en matrices y que **las cuentas sean productos de matrices** («de forma matricial»). Datos: vendedores (filas) × actividades (columnas) y precio de cada actividad. Ojo: el de la zona B trabajó **el doble de horas** que el de A, $2 \cdot 40 = 80$.
2. **Planteamiento.** Matriz de actividades M (3×3: filas A, B, C; columnas horas, demostraciones, viajes) y vector de precios P (3×1, en euros):

$$M = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 5 \\ 80 & 15 & 8 \\ 100 & 25 & 10 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 75 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix}.$$

   Las columnas de M y las filas de P son las mismas actividades, así que $M \cdot P$ existe y es 3×1: lo que se abona a cada vendedor antes de la retención.

3. $$M \cdot P = \begin{pmatrix} 40 \cdot 75 + 10 \cdot 300 + 5 \cdot 250 \\ 80 \cdot 75 + 15 \cdot 300 + 8 \cdot 250 \\ 100 \cdot 75 + 25 \cdot 300 + 10 \cdot 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 + 3000 + 1250 \\ 6000 + 4500 + 2000 \\ 7500 + 7500 + 2500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7250 \\ 12\,500 \\ 17\,500 \end{pmatrix}.$$

4. **Retención.** A cobra 7250 €, menos de 10 000 €: se le retiene el 15 % y cobra el 85 %. B y C pasan de 10 000 €: se les retiene el 18 % y cobran el 82 %. El umbral se mira en **la cantidad a abonar**, antes de la retención (y aunque lo miraras después, B y C seguirían por encima de 10 000 € con el 18 %: la clasificación no cambia). De forma matricial, con una matriz diagonal de factores:

$$R \cdot (M \cdot P) = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}82 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7250 \\ 12\,500 \\ 17\,500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6162{,}5 \\ 10\,250 \\ 14\,350 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN El vendedor de la zona A cobra **6162,50 €**; el de la zona B, **10 250 €**, y el de la zona C, **14 350 €** (antes de la retención: 7250 €, 12 500 € y 17 500 €).

Apartado b)

1. **Qué te piden:** A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$. Calculamos el determinante con el parámetro.
2. **Sarrus.** Suman: $(-2)(a-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 0 = -6a + 6 + 16 = 22 - 6a$. Restan: $1 \cdot (a-1) \cdot 4 + (-2) \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 4a - 4 + 18 = 4a + 14$.
3. $|A| = (22 - 6a) - (4a + 14) = 8 - 10a$, que se anula si $a = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$.

SOLUCIÓN A es invertible para **todo** $a \neq \dfrac{4}{5}$.

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Andalucía: a) «Hasta 0.75 puntos por las matrices del planteamiento y hasta 1 punto por las matrices solución»; b) «Hasta 0.75 puntos». No hay solución oficial publicada: los resultados de arriba son nuestros y están comprobados. Como el enunciado dice «de forma matricial», hacer las cuentas vendedor a vendedor sin escribir las matrices pierde la parte del planteamiento.

Error típico que te quita puntos. Poner 40 horas al vendedor de la zona B (son el doble, 80), aplicar el 15 % a todos, o multiplicar $P \cdot M$, que no existe (3×1 por 3×3). En b), dar «$a = 4/5$» como respuesta: es el valor para el que **no** es invertible.

Conceptos clave

Matriz

Tabla de números con m filas y n columnas (dimensión $m \times n$); a_{ij} es el elemento de la fila i y la columna j.

Matriz traspuesta

A^t: se cambian filas por columnas. Cumple $(AB)^t = B^t A^t$.

Matriz inversa

La matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Existe si y solo si A es cuadrada y $|A| \neq 0$; es única.

Matriz regular

Matriz cuadrada que tiene inversa (también, invertible). Si no la tiene, es singular.

Determinante

Número $|A|$ asociado a una matriz cuadrada: $ad - bc$ en orden 2 y regla de Sarrus en orden 3. A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$.

Adjunto de un elemento

$A_{ij} = (-1)^{i+j}$ por el determinante que queda al tachar la fila i y la columna j. Con ellos, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)^t$.

Método de Gauss-Jordan

Cálculo de la inversa operando por filas en $(A \mid I)$ hasta llegar a $(I \mid A^{-1})$.

Rango

Número máximo de filas (o columnas) linealmente independientes; se calcula escalonando o con menores.

Ecuación matricial

Ecuación cuya incógnita es una matriz X; se despeja multiplicando por inversas, respetando el lado.

Matriz idempotente

Matriz cuadrada con $A^2 = A$. Si $A^2 = I$, se llama involutiva y entonces $A^{-1} = A$.

Matriz de adyacencia

Matriz de un grafo: $a_{ij} = 1$ si hay conexión de i a j y 0 si no. A^2 cuenta los caminos de dos pasos.

MODO PAU

Ocho reglas que valen puntos

Producto

Fila por columna; $(m \times n) \cdot (n \times p) = m \times p$.

Orden

$AB \neq BA$: el lado de cada factor importa siempre.

Inversa

Existe $\iff |A| \neq 0$. Justifícalo antes de usarla.

Inversa 2 × 2

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Adjuntos

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)^t$: no olvides trasponer.

Despejar

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$; $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$.

Factor común

$AX - X = (A - I)X$, nunca $(A - 1)X$.

Contexto

Etiqueta filas y columnas, multiplica para que encajen e interpreta el resultado con unidades.

Cómo te lo pueden preguntar

- Despeja X en una ecuación matricial ($AX + B = C$, $XA = B$, $AXB = C$, $AXA^{-1} = B$…) y calcúlala con la inversa: salió en 15 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 11 comunidades.
- Decide con el determinante para qué valores de un parámetro una matriz tiene inversa (o rango 3), o aplica las propiedades de los determinantes: salió en 7 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 7 comunidades.
- Organiza los datos de una tabla en matrices y responde con un producto (ingresos, totales, costes), o plantea un sistema a partir de un producto de matrices: salió en 7 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 5 comunidades (Andalucía, Asturias, Cataluña, Galicia y Navarra).
- Potencias e igualdades: $A^2 = I$ y A^{99}, matrices idempotentes ($A^2 = A$) o que conmutan ($AB = BA$): salió en 4 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 4 comunidades.
- Calcula la inversa de una matriz 3×3, casi siempre como paso de una ecuación: en las ordinarias, Galicia 2025, País Vasco 2025 y 2026, Madrid 2026 y Murcia 2026.
- En total, el tema de matrices salió en 24 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 14 comunidades. No cayó en Canarias ni en Castilla y León, y en Cantabria solo en la extraordinaria de 2025.

No lo confundas

- $X = A^{-1}B$ (de $AX = B$) con $X = BA^{-1}$ (de $XA = B$): en general son matrices distintas.
- $|A|$ (un número) con A (una tabla): $|kA| = k^n|A|$ para una matriz de orden n, no $k|A|$.
- A^2 (el producto $A \cdot A$) con la matriz de los cuadrados de los elementos.
- $(AB)^t = B^tA^t$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ con A^tB^t y $A^{-1}B^{-1}$: el orden se invierte.
- Un vector fila (1×3) con un vector columna (3×1): en un problema de datos, uno va delante y el otro detrás.

Ponte a prueba

PAU Extremadura 2026, Apartado B, problema B1 (3 puntos; a elegir entre B1 y B2). B1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide: a) Hallar, de forma razonada, la matriz A^{99}. (de 0 a 1.25 puntos) b) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X + A^2 = A^3 - A \cdot X$. (de 0 a 1.75 puntos)

Solución: a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1+0 & -1+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Entonces las potencias pares valen I y las impares, A: $A^{99} = (A^2)^{49}A = A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) Juntando las X: $2AX = A^3 - A^2 = A - I$ (porque $A^3 = A^2A = A$). Como $A^2 = I$, $A^{-1} = A$ ($|A| = -1 \neq 0$). Multiplicando por A^{-1} por la izquierda: $X = \frac{1}{2}A(A - I) = \frac{1}{2}(I - A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Los criterios de Extremadura dan de 0 a 1 punto al «Planteamiento del problema (despejar la matriz)».

PAU Madrid 2026, Pregunta 3, opción 3.1 (2,5 puntos; a elegir entre 3.1 y 3.2). Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

3.1.a) (1,5 puntos) Calcule la matriz X en la ecuación matricial $AXB = A + B$. 3.1.b) (1 punto) Calcule el determinante $|C^2B|$, siendo $C = 2(A^{-1})^t$. Nota: M^t denota la matriz traspuesta de la matriz M.

Solución: a) $|A| = 1 \neq 0$ y B es diagonal con $|B| = \frac{1}{8} \neq 0$: las dos tienen inversa, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/4 & 1 & -3/4 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (se invierten los elementos de la diagonal). Despejando: $X = A^{-1}(A + B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$, así que $X = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1 & 13/4 \end{pmatrix}$. b) $|C^2B| = |C|^2|B|$ y $|C| = |2(A^{-1})^t| = 2^3\,|A^{-1}| = \frac{8}{|A|} = 8$; por tanto, $|C^2B| = \frac{8^2}{8} = 8$. Coincide con la solución oficial.

PAU Navarra 2026 (extraordinaria), Pregunta 1 (2,5 puntos; obligatoria). Una empresa fabrica dos modelos de patinetes eléctricos (P1 y P2), en tres plantas de producción (A, B y C). Considere las matrices: $M = \begin{pmatrix} 150 & 100 \\ 65 & 55 \\ 85 & 70 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 250 \\ 325 \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz M recoge información sobre el número de unidades de cada modelo fabricado en cada planta de producción. La matriz P contiene el precio unitario de venta (en euros) de cada modelo de patinete, P1 y P2, respectivamente. i) Indique la dimensión de la matriz M. Interprete el significado de su elemento a_{21}. (0.5 puntos) ii) Calcule la matriz $H \cdot M$. Indique su dimensión y explique qué representan sus elementos en el contexto del problema. (0.75 puntos) iii) Calcule, realizando la operación matricial necesaria, la matriz que refleje, para cada planta de producción, el ingreso obtenido por las ventas de ambos modelos de patinetes. ¿Qué planta es la que obtiene un menor ingreso y cuánto dinero ingresa? (1.25 puntos)

Solución: i) M es 3×2 (3 plantas, 2 modelos). Su elemento a_{21} (fila 2, columna 1; el enunciado lo llama así aunque la matriz sea M) es 65: la planta B fabrica 65 unidades del modelo P1. ii) $H \cdot M = \begin{pmatrix} 150+65+85 & 100+55+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 & 225 \end{pmatrix}$, de dimensión 1×2: entre las tres plantas se fabrican 300 patinetes P1 y 225 P2. iii) Plantas × modelos por modelos × precio: $M \cdot P = \begin{pmatrix} 150 \cdot 250 + 100 \cdot 325 \\ 65 \cdot 250 + 55 \cdot 325 \\ 85 \cdot 250 + 70 \cdot 325 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70\,000 \\ 34\,125 \\ 44\,000 \end{pmatrix}$ euros. La planta que menos ingresa es **la B, con 34 125 €**. (No hay solución oficial publicada.)

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II)
2. Examen PAU Matemáticas CCSS II Comunitat Valenciana 2026 (ordinaria)
3. Criterios de corrección Comunitat Valenciana 2026 (ordinaria; en valenciano)
4. Examen PAU Matemáticas CCSS II Murcia 2026 (ordinaria), con criterios
5. Examen PAU Matemáticas CCSS II Andalucía 2025 (ordinaria)
6. Criterios de corrección Andalucía 2025 (ordinaria)
7. Examen PAU Matemáticas CCSS II Extremadura 2026 (ordinaria)
8. Examen PAU Matemáticas CCSS II Madrid 2026 (ordinaria), con solución y criterios
9. Examen PAU Matemáticas CCSS II Navarra 2026 (extraordinaria)
10. Examen PAU Matemáticas CCSS II Cataluña 2025 (extraordinaria)
11. Exámenes de los ejemplos (Aragón, Baleares, Cantabria, Castilla-La Mancha, Cataluña, Galicia, La Rioja, Navarra y directrices 2027 de Andalucía y Murcia)

Imágenes: Farmeando PAU: Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con los datos exactos.

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 31 de octubre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.