Sistemas de ecuaciones lineales

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en **farmeandopau.com** ›

Última revisión: 31 de octubre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

Un **sistema de ecuaciones lineales** reúne varias ecuaciones de primer grado que se cumplen a la vez, y tiene **una solución, infinitas o ninguna**. En la PAU de Mates CCSS el tema salió en 26 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, casi siempre como problema: **plantear un sistema a partir de un enunciado** y resolverlo cayó en 20 de esas 34, en 15 comunidades. Después vienen **discutir un sistema con un parámetro** con Rouché-Frobenius (6 de 34) y los **compatibles indeterminados**, con infinitas soluciones (6 de 34). La herramienta para casi todo: **Gauss**.

1 Qué es un sistema lineal y cómo se clasifica

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones de primer grado (las incógnitas aparecen con exponente 1 y sin multiplicarse entre sí) que tienen que cumplirse **a la vez**. Una **solución** cumple **todas** las ecuaciones; **resolver** es encontrarlas todas, y **discutir** o **clasificar**, decir cuántas hay. El Real Decreto 243/2022 lo incluye como «Sistemas de ecuaciones: modelización de situaciones en diversos contextos»: en CCSS casi siempre nace de un problema.

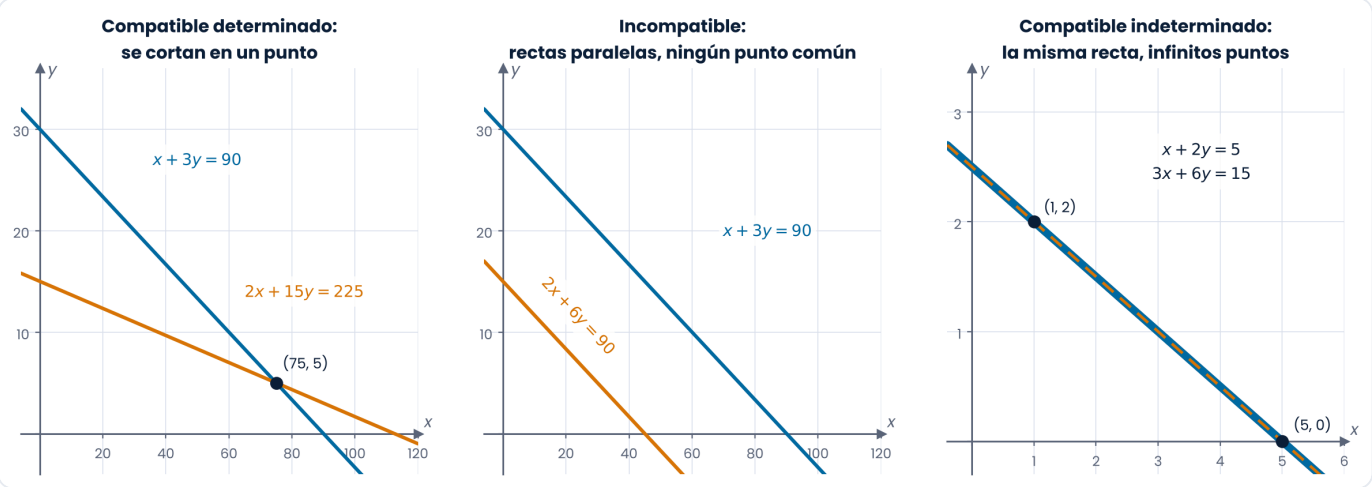
- **Expresión matricial** $AX = B$: A es la **matriz de coeficientes**, X la columna de las incógnitas y B la de los **términos independientes**. En la bodega de Galicia 2026 (extraordinaria), con X, Y, Z = botellas por hora de las máquinas M_1, M_2 y M_3:

$$\begin{cases} X + Y + Z = 1300 \\ 4X - 5Y = 0 \\ 2X + 3Z = 2030 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 0 \\ 2030 \end{pmatrix}$$

  La segunda sale de que M_1 «embotella un 25 % más de botellas» que M_2: $X = 1{,}25\,Y$, por 4. El examen solo pedía el sistema y su forma matricial (sale $X = 550$, $Y = 440$, $Z = 310$).
- La **matriz ampliada** $A^* = (A \mid B)$ añade a A la columna de los términos independientes; Cantabria y el País Vasco la llaman A'. Es la matriz con la que se trabaja en Gauss.
- Si en una ecuación falta una incógnita, su coeficiente es 0 (en la bodega, la Z en la 2.ª ecuación). Escribe las incógnitas **siempre en el mismo orden**.
- A veces el sistema sale de **una igualdad de matrices**: en Asturias, la opción B pide en todas las convocatorias de 2025 y 2026 que plantees un sistema a partir de algo como $A \cdot B \cdot C = 2(D + E)$, y en Galicia 2026 (ordinaria), de $A \cdot B = C$. Multiplicas (Tema 1) e igualas término a término: cada fila es una ecuación.

Tipo de sistema	Soluciones	Con dos incógnitas (rectas)
Compatible determinado (SCD)	Una sola	Se cortan en un punto: $x + 3y = 90$ y $2x + 15y = 225$, solo en $(75, 5)$
Compatible indeterminado (SCI)	Infinitas	La misma recta: $3x + 6y = 15$ es $x + 2y = 5$ por 3
Incompatible (SI)	Ninguna	Paralelas: $2x + 6y = 90$ es $x + 3y = 45$, incompatible con $x + 3y = 90$

Un sistema lineal nunca tiene exactamente dos soluciones: si tiene dos, tiene infinitas. Por eso «más de una solución» quiere decir compatible indeterminado.



Los tres tipos de sistema con dos incógnitas (PAU de Asturias). Cada ecuación es una recta y las soluciones son sus puntos comunes: 2025 con $m = 15$ (se cortan en $(75, 5)$), 2025 con $m = 6$ (paralelas) y 2026 con $a = 3$ (la misma recta: $(1, 2)$, $(5, 0)$ y todos sus puntos son soluciones).

2 Plantear un sistema a partir de un enunciado

Es lo que más cae (20 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026) y lo que más puntúa: Canarias y Castilla-La Mancha dan 0,5 puntos por cada ecuación bien planteada, y en Castilla y León 2026 el planteamiento vale la mitad del ejercicio (1,5 de 3 puntos). Un buen planteamiento con un error de cuentas salva casi todo; un mal planteamiento no lo arregla ninguna cuenta.

1 Elige las incógnitas

Lo que te preguntan, con palabras y unidades: «x = kilos de sandía rayada vendidos». Puntúa: 0,25 en Madrid 2025 y en Murcia 2026; Cantabria descuenta 0,1 si no dices qué representan.

2 Una frase, una ecuación

Busca los datos que relacionan las incógnitas (un total, un importe, una proporción) y tradúcelos de uno en uno (tabla de abajo).

3 Ordena: $ax + by + cz = d$

Incógnitas a la izquierda, en el mismo orden, y sin denominadores ni decimales: $y = \dfrac{x + z}{4}$ pasa a $x - 4y + z = 0$, y $0{,}05a + 0{,}1b + 0{,}02c = 994$, multiplicada por 100, a $5a + 10b + 2c = 99\,400$.

4 Resuelve

Por Gauss (sección siguiente) o por Cramer. Si una ecuación da una incógnita en función de otra ($x = 3y$), sustitúyela antes.

5 Comprueba y responde

Con los datos del enunciado, no con tu sistema (que podría estar mal planteado), y contesta con palabras y unidades: personas u objetos, enteros y no negativos; precios, positivos. Si hay más ecuaciones que incógnitas, la solución tiene que cumplirlas todas: Baleares 2026 resta 0,5 puntos si no lo compruebas.

Frase del enunciado (literal)	Ecuación
«el número de portugueses es la cuarta parte de la suma del número de huéspedes de los otros dos países» (Castilla-La Mancha 2025, extraordinaria)	$y = \frac{x+z}{4} \iff x - 4y + z = 0$
«La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda» (Castilla-La Mancha 2025)	$x = 1{,}4\,y$: un 40 % más es el 140 %
«por cada tres clientes en Solo Alojamiento, hay dos en Alojamiento y Desayuno» (Canarias 2025)	$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} \iff 2x - 3y = 0$
«si se marcharan 39 clientes de Todo Incluido, la suma de los que están en los otros dos regímenes sería igual a los que quedan en Todo Incluido» (Canarias 2025)	$x + y = z - 39$
«se aplicó un descuento del 10% sobre el precio original» y el cliente pagó 117 euros (Aragón 2026)	Se paga el 90 %: $0{,}9\,(x + y + z) = 117$
«más el 7% de IGIC aplicado sobre dicho precio» (Canarias 2026)	Se paga el 107 %: $1{,}07 \cdot (75x + 120y + 190z) = 20\,758$
«cada helado de fresa valía 50 céntimos menos que uno de chocolate» (Extremadura 2026, extraordinaria)	$f = c - 0{,}5$, en euros (no mezcles euros y céntimos)

Con el hotel de Canarias 2025 completo (x, y, z = clientes en Solo Alojamiento, Alojamiento y Desayuno y Todo Incluido, y «el número de clientes en Todo Incluido es el doble que en Solo Alojamiento», $z = 2x$), salen 117, 78 y 234 clientes.

Errores típicos que te quitan puntos

«Superó en 4 al resto» no siempre es una ecuación: en Andalucía 2026, las entradas Premium de la clausura son $12 + 4 + 4 = 20$. **Descuentos:** con un 30 % de descuento pagas el 70 %, $0{,}7x$. **«La suma de»** o **«juntos»** piden paréntesis: $\frac{x+z}{4}$, no $\frac{x}{4} + z$. Y **«por cada 3 de A hay 2 de B»** es $2A = 3B$, no $3A = 2B$: compruébalo con $A = 3$ y $B = 2$.

3 El método de Gauss

Es el método de las soluciones oficiales de Madrid, Cataluña o el País Vasco, y el escalonamiento que puntúan los criterios de Aragón y Cantabria. Se pasa a un sistema **escalonado** (cada ecuación con al menos una incógnita menos que la anterior) operando con las filas de la matriz ampliada, y después se resuelve **de abajo arriba**.

- Ejemplo real, Cantabria 2025: una tienda vende lotes Clásico (20 €), Selección (30 €) y Premium (45 €); un día, 33 lotes y 855 €, con «el triple» de Clásicos que de Selección. Con x, y, z = lotes vendidos de cada tipo: $x + y + z = 33$, $20x + 30y + 45z = 855$ (dividida entre 5, $4x + 6y + 9z = 171$) y $x = 3y$, es decir, $x - 3y = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 4 & 6 & 9 & 171 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & 2 & 5 & 39 \\ 0 & -4 & -1 & -33 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & 2 & 5 & 39 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{array}\right)$$

- De abajo arriba: $9z = 45$, $z = 5$; $2y + 25 = 39$, $y = 7$; $x = 33 - 7 - 5 = 21$. **21 lotes Clásicos, 7 Selección y 5 Premium.** Comprobación con el enunciado: $21 + 7 + 5 = 33$; $20 \cdot 21 + 30 \cdot 7 + 45 \cdot 5 = 420 + 210 + 225 = 855$; $21 = 3 \cdot 7$.
- **Elige bien la fila de arriba.** Pon primero una ecuación con un 1 delante de la x (intercambiando filas si hace falta): así no salen fracciones. Si al escalonar te queda un 0 donde iría el siguiente pivote, intercambia esa fila con la de abajo.

Escribe la matriz ampliada

Las incógnitas siempre en el mismo orden y, tras la barra, los términos independientes. Si una fila tiene un factor común (todo múltiplo de 5), simplifícala antes.

Haz ceros debajo de la diagonal

Con operaciones que no cambian las soluciones: intercambiar dos filas, multiplicar una fila por un número distinto de 0 y sumarle a una fila un múltiplo de otra ($F_2 \to F_2 - 4F_1$). Primero en la columna de la x; después, en la de la y.

Lee la última fila y sube

Despeja la última incógnita y sustituye hacia arriba, fila a fila.

Si la escalonada termina en…	El sistema es…
Una fila $(0 \;\; 0 \;\; 0 \,|\, k)$ con $k \neq 0$	**Incompatible**: esa fila dice $0 = k$, que es imposible
Sin filas así, y tantas filas no nulas como incógnitas	**Compatible determinado**
Sin filas así, y menos filas no nulas que incógnitas (las filas $(0 \;\; 0 \;\; 0 \,|\, 0)$ sobran)	**Compatible indeterminado**: las incógnitas sin escalón pasan a ser parámetros

Una solución imposible es un aviso

Cantabria 2025 puntúa cada paso del escalonamiento (0,2 puntos la segunda ecuación y 0,3 la tercera) y advierte: «No se valorará este apartado si se llega a una solución imposible. PERO si el alumno se da cuenta de que la solución es errónea o razona por qué lo es, se le podrá puntuar el escalonamiento». Si te salen 7,3 lotes o un precio negativo, dilo por escrito y revisa.

4 Rouché-Frobenius: clasificar con rangos

El **teorema de Rouché-Frobenius** clasifica un sistema mirando solo dos rangos: es **compatible si y solo si** $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^*$, y **determinado** si además ese rango es igual al número de incógnitas n. El **rango** es el número de filas no nulas que quedan al escalonar (o el orden del mayor menor no nulo, si usas determinantes).

- **Por Gauss:** escalonas A^* y cuentas las filas no nulas en la parte de A (a la izquierda de la barra) y en toda A^*. En los lotes de Cantabria 2025 quedan tres en las dos: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 3 = n$, compatible determinado. Es lo que pedía Aragón 2025: «Escalonar la matriz del sistema y análisis de rangos para comprobar que se trata de un SCD (3 ptos)».
- **Por determinantes:** no están en los saberes básicos del Real Decreto para CCSS, pero los usan muchas comunidades (Andalucía, Asturias, Cantabria, Madrid, Murcia, País Vasco…); la regla de Sarrus está en el Tema 1. Si A es 3×3 y $|A| \neq 0$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 3$: compatible determinado. En Cantabria 2025:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 20 & 30 & 45 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 45 - 60) - (30 - 135 + 0) = 90 \neq 0.$$

- **Siempre** $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} A^* \leq \operatorname{rg} A + 1$: la ampliada contiene a A y tiene una columna más. Y ningún rango supera el número de filas ni el de columnas: con 2 ecuaciones y 3 incógnitas, como en Cataluña, el rango es como mucho $2 < 3$ y el sistema, si es compatible, es indeterminado.
- Con un $|A| = 0$ hay que buscar menores más pequeños: si A tiene un menor de orden 2 no nulo, $\operatorname{rg} A = 2$; para $\operatorname{rg} A^*$ basta mirar el menor de orden 3 formado por las columnas de ese menor y la de

los términos independientes (si no es cero, $\operatorname{rg} A^* = 3$; si es cero, $\operatorname{rg} A^* = 2$). Lo ves en el ejercicio de Cantabria 2026.

Rangos	Sistema	Soluciones
$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = n$	Compatible determinado	Una
$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* < n$	Compatible indeterminado	Infinitas, con $n - \operatorname{rg} A$ parámetros
$\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} A^*$	Incompatible	Ninguna

Compara con el número de incógnitas

Los criterios de Cantabria 2025 lo dicen así: «No es necesario nombrar el teorema, pero sí es imprescindible indicar que ambos rangos son iguales y coinciden con el número de incógnitas para justificar un SCD». Escribe la frase entera: «$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 3 =$ número de incógnitas, compatible determinado».

5 Discutir un sistema con un parámetro

Discutir es decir, para cada valor del parámetro, si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible; después suelen pedir resolverlo para un valor. Salió en 6 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 5 comunidades: en Asturias, con dos incógnitas; en Cantabria, Castilla y León, Madrid y el País Vasco, con tres. En Madrid 2025 el «parámetro» es un precio común desconocido: la solución oficial lo deja como letra y escalona con él dentro (primer ejercicio resuelto).

- Ejemplo con dos incógnitas (Asturias 2025, Pregunta 3, opción A): pases VIP a x euros y normales a y euros, con

$$\begin{cases} x + 3y = 90 \\ 2x + my = 15m \end{cases} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 6.$$

  Si $m \neq 6$, compatible determinado. Si $m = 6$, la segunda ecuación es $2x + 6y = 90$, o sea $x + 3y = 45$, que choca con $x + 3y = 90$: $\operatorname{rg} A = 1$ y $\operatorname{rg} A^* = 2$, **incompatible** (las rectas paralelas de la figura).
- **Resolver con el parámetro dentro** (por Cramer o despejando): para $m \neq 6$,

$$x = \frac{45m}{m - 6}, \qquad y = \frac{15m - 180}{m - 6}.$$

  Con $m = 15$, $(75, 5)$: el pase VIP cuesta 75 € y el normal, 5 €. Con $m = 1$, $x = -9$: hay solución, pero **no tiene sentido** en el contexto, porque un precio no puede ser negativo. Eso es justo lo que pedía el apartado b) de ese examen.
- **Con tres incógnitas** el método es el mismo (ejercicio de Cantabria 2026, más abajo). En los valores críticos puede pasar de todo: en Cantabria 2026 los dos dan incompatible; en Madrid 2026 (extraordinaria), con $|A| = (a - 1)(a + 6)$, $a = 1$ da compatible indeterminado y $a = -6$, incompatible.
- **Sistemas homogéneos** (términos independientes nulos, como en el País Vasco 2026, en «Ponte a prueba»): siempre compatibles, porque $(0, 0, 0)$ es solución; si $|A| \neq 0$ es la única, y si $|A| = 0$ hay infinitas.

1 Calcula $|A|$ y factorízalo
Sus raíces son los **valores críticos**. Si prefieres Gauss, escalona con el parámetro dentro y mira qué valores anulan un pivote.

2 Todos los demás valores, de golpe
Si $|A| \neq 0$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = n$, compatible determinado.

3 Cada valor crítico, por separado
Sustitúyelo en el sistema y calcula $\operatorname{rg} A$ y $\operatorname{rg} A^*$ con números: un menor concreto no nulo, o Gauss.

4 Resume
Una línea por caso: valor del parámetro, rangos y tipo de sistema.

Error típico que te quita puntos

Decir «incompatible» solo porque $|A| = 0$: puede ser incompatible o compatible indeterminado, y para saberlo hay que mirar A^*. Y, si discutes por Gauss, no dividas entre una expresión como $m - 6$ sin estudiar aparte el valor que la anula.

6 Infinitas soluciones: el parámetro y el dato que falta

Cuando hay **menos datos independientes que incógnitas**, el sistema es compatible indeterminado: las soluciones se dan **en función de una incógnita** (o de un parámetro λ). Salió en 6 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 4 comunidades: Cataluña (dos ecuaciones, tres incógnitas y un dato extra), Asturias y el País Vasco (el valor del parámetro que da infinitas soluciones) y Madrid (el precio único de las sandías).

- **Cuántos parámetros:** $n - \operatorname{rg} A$. Elige como parámetro una incógnita libre (si $y = 675$ en todas las soluciones, y no puede serlo) o la que pida el enunciado («en función del precio de una caja de cerezas»).
- Ejemplo, Cataluña 2026 (extraordinaria): hay 84 alumnos; x van a Roma, y a Londres y z a ninguna parte, y los que no viajan son el triple de los que van a Londres. Dos ecuaciones, $x + y + z = 84$ y $3y - z = 0$, para tres incógnitas: compatible indeterminado, así que no se puede saber cuántos van a cada sitio. En función de y: $z = 3y$ y $x = 84 - 4y = 4(21 - y)$.
- **El contexto recorta las soluciones.** Si cuentas personas, son enteros no negativos: en el ejemplo, $0 \leq y \leq 21$, z es múltiplo de 3 y x de 4 (lo pedía el examen). En Baleares 2025 (extraordinaria), $5x + 4y + 4z = 100$ y $5x + 3y = 120$ tienen infinitas soluciones, $x = \dfrac{180 + 12z}{5}$, $y = -20 - 4z$, pero **ninguna** sirve para fabricar: con $z \geq 0$, y sale negativa.
- **El dato extra** añade una ecuación independiente y el sistema pasa a compatible determinado. En Cataluña 2026 (extraordinaria): si 4 de los que no viajan se hubieran apuntado a Roma, Roma habría tenido el doble que Londres y «ninguna parte» juntos: $x + 4 = 2(y + z - 4)$, es decir, $x - 2y - 2z = -12$. Sustituyendo $x = 84 - 4y$ y $z = 3y$: $84 - 12y = -12$, $y = 8$. **52 a Roma, 8 a Londres y 24 a ninguna parte.**
- Una cantidad puede **no depender del parámetro** (el pedido de Cataluña 2026, resuelto abajo, cuesta lo mismo en todas las soluciones) y una incógnita puede salir fija aunque haya infinitas soluciones ($y = 675$ en Madrid 2025).

Da la solución general, no un ejemplo

Si piden «resuelve», la respuesta es toda la familia: $(x, y, z) = (84 - 4\lambda,\ \lambda,\ 3\lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ (y, en el contexto, $\lambda = 0, 1, \ldots, 21$). Baleares 2025 (extraordinaria) resta 1 punto «si solo encuentran una solución particular» (traducido del catalán). Solo si el enunciado pide «una» solución, como Asturias, basta con un ejemplo.

7 La regla de Cramer (donde la usan)

Un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas y $|A| \neq 0$ es **compatible determinado**, y cada incógnita es un cociente de determinantes: arriba, $|A|$ con la columna de esa incógnita cambiada por la de los términos independientes. La usan las soluciones oficiales de Asturias y el modelo 2027 de Madrid; Cantabria la acepta y las directrices de Andalucía para 2027 la incluyen.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

- Con los lotes de Cantabria 2025 ($|A| = 90$):

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 1 & 1 \\ 855 & 30 & 45 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1890, \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 33 & 1 \\ 20 & 855 & 45 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 630, \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 33 \\ 20 & 30 & 855 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 450,$$

  así que $x = \frac{1890}{90} = 21$, $y = \frac{630}{90} = 7$ y $z = \frac{450}{90} = 5$, como por Gauss.

- Con dos incógnitas es muy rápida. En Asturias 2026 (extraordinaria), con $k = -3$ el sistema es $3x + 4y = 24$, $5x + 3y = 12$: $|A| = 9 - 20 = -11$,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 4 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{24}{-11} = -\frac{24}{11}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 24 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-84}{-11} = \frac{84}{11}.$$

  Una solución, pero sin sentido en el contexto: x eran millones de euros para créditos a autónomos, y sale negativa.

- **Cuándo no:** si $|A| = 0$, Cramer no se puede aplicar tal cual (dividirías entre cero). Y en Cantabria cuenta cómo lo escribes: «Cálculo de |A|: 0,2 puntos (0 puntos si se calcula directamente con la calculadora sin plantear el desarrollo a mano)», y «Se descontarán 0,1 puntos si hay algún error de notación (por ejemplo no utilizar las barras verticales que definen los determinantes)» (2025).
- La **inversa** también resuelve: $X = A^{-1}B$ (Tema 1). Compensa cuando ya tienes A^{-1} calculada o te la dan hecha.

8 Qué te piden en tu comunidad

El tema cae en las ordinarias de 2025 y 2026 de 16 comunidades; en Extremadura, solo en la extraordinaria de 2026 y en el modelo de 2027. El formato cambia mucho de una a otra:

Comunidad	Qué ha caído (2025–2026)	Lo que puntúa o hay que saber
Andalucía	2026: plantear y resolver un 3×3; 2025 extr.: forma matricial y discusión	0,75 plantear, 1 resolver y 0,5 responder (2026); las directrices de 2027 incluyen Cramer
Aragón	Cuestión optativa de la Pregunta 4: Rouché y resolver (2025); plantear y resolver (2026)	2026: 2 puntos variables y ecuaciones, 3 resolver (de 5)
Asturias	Siempre 2×2 con parámetro: opción A, sistema dado (casi siempre con contexto); opción B, plantearlo desde un producto de matrices	Analizar «si tiene sentido en el contexto del problema»: 0,5 (2026); Cramer en las soluciones oficiales. El acta 2025-26 admite «a lo sumo, 3 incógnitas» y un parámetro
Illes Balears	Plantear y resolver (2026); 2×3 indeterminado (2025 extr.)	El cálculo del determinante y Cramer «no se prioriza», pero se pueden usar (traducido del catalán); tampoco se priorizan los parámetros (matriz 2026-27). Resolver el sistema solo con calculadora vale 0 (2027). Comprobar todas las condiciones
Canarias	Plantear y resolver un 3×3, a veces con porcentajes o impuestos	0,5 por ecuación; en 2025-2026, sin matrices ni parámetros (ningún documento los excluye). Cualquier método; con Cramer basta desarrollar un determinante (acta de 29-09-2026)
Cantabria	Plantear, compatibilidad con rangos y resolver; con parámetro (2026)	Rangos frente al número de incógnitas; determinantes desarrollados a mano
Castilla-La Mancha	Ejercicio 2, obligatorio: plantear y resolver un 3×3	0,5 por ecuación, 0,5 el desarrollo y 0,5 la solución
Castilla y León	2025: dos parámetros, a y b (se fija uno); 2026: plantear y resolver	2026: planteamiento, 1,5 de 3
Cataluña	Casi siempre, 2 ecuaciones y 3 incógnitas más un dato extra (obligatorio)	Soluciones «en función de» una incógnita; 0,25 por ecuación. Solo sistemas «sin parámetros» (orientaciones, traducido del catalán)
Comunitat Valenciana	Plantear y resolver un 3×3	1,5 + 2. Una solución «incoherente con el enunciado (valores negativos, no naturales…)» vale 0, «salvo que se indique que la solución no es razonable y debe haber algún error»
Extremadura	Solo 2026 extr. y modelo 2027: plantear y resolver	Planteamiento: 2,25 de 3
Galicia	2026: plantear y escribir en forma matricial, sin resolver	1,5 puntos, sin desglose. No entra la discusión de sistemas con un parámetro (orientaciones 2026-27)
La Rioja	Plantear y resolver un 3×3	1 plantear + 1 resolver
Madrid	2025: obligatorio (resuelto abajo); extraordinarias: con parámetro; modelo 2027: junto a la programación lineal	0,25 por describir las incógnitas
Región de Murcia	2025: discutir y resolver; 2026: plantear y resolver	Negativos o decimales: 0 en el apartado (2026)
Navarra	2025: plantear, resolver e interpretar	Sin criterios específicos publicados
País Vasco	2025: plantear y resolver; 2026: homogéneo con parámetro; 2026 extr.: forma matricial e invertibilidad	2025: 0,5 por incógnita bien calculada

Exámenes y criterios oficiales de cada comunidad, ordinaria y extraordinaria de 2025 y 2026.

9 Ejercicio resuelto: plantear, resolver por Gauss y estudiar la unicidad (Madrid 2025)

PAU COMUNIDAD DE MADRID 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 1 (OBLIGATORIO, SIN OPCIONALIDAD; 2,5 PUNTOS)

El dueño de una frutería quiere alquilar una cámara frigorífica para la campaña de sandías del verano. Entre las diferentes cámaras que puede alquilar cercanas a su frutería, la que más le convence es una que tiene capacidad para guardar 2700 kilos de sandía que es, según sus datos de años anteriores, la cantidad de kilos que vende cualquier semana de la campaña. Las sandías que vende son de tres variedades: sandía verde rayada, sandía negra sin pepitas y sandía negra con pepitas. La sandía rayada es la menos apreciada por su clientela, por ello decide ponerle el precio más bajo y la venderá a 1,25 euros el kilo. Las sandías negras son las más demandadas entre su clientela, pero entre estas dos variedades es más fácil vender la variedad sin pepitas. Por esta razón, determina que el precio de la sandía negra sin pepitas sea de 2,75 euros el kilo y el precio con pepitas de 2,25 euros el kilo. El dueño de la frutería quiere que, en cualquier circunstancia, el número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas.

a) El frutero considera que para poder pagar el alquiler y obtener beneficio, debe recaudar de la venta 5400 euros cualquier semana de la campaña. Si se venden todas las sandías almacenadas para la semana, ¿cuántos kilos debería vender de cada variedad para recaudar exactamente ese importe? (1,25 puntos)

b) Con la idea de simplificar el etiquetado, el frutero necesita saber si es posible poner el mismo precio a todas las variedades de sandías y seguir recaudando 5400 euros a la semana vendiendo los 2700 kilos. Si fuera posible, ¿cuál sería el precio de venta del kilo de sandía?, ¿cuál sería la cantidad de kilos de cada variedad que debería vender?. Justifique si dichas cantidades serían únicas. (1,25 puntos)

Apartado a)

1. La idea: tres cantidades desconocidas (los kilos de cada variedad) y tres datos que las relacionan (los kilos totales, la proporción entre variedades y lo recaudado). Se plantean tres ecuaciones y se resuelven por Gauss.
2. **Incógnitas**, con unidades (los criterios dan 0,25 puntos por describirlas): x = kilos vendidos de sandía rayada, y = kilos de sandía negra con pepitas y z = kilos de sandía negra sin pepitas, en una semana.
3. **Una frase, una ecuación.** Se venden los 2700 kilos: $x + y + z = 2700$. Los kilos con pepitas son «un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas», un tercio de la **suma**: $y = \dfrac{x+z}{3}$, es decir, $x - 3y + z = 0$. Recaudación, precio por kilos de cada variedad: $1{,}25x + 2{,}25y + 2{,}75z = 5400$; multiplicando por 4 para quitar decimales, $5x + 9y + 11z = 21\,600$.
4. **Gauss:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2700 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 11 & 21\,600 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-5F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2700 \\ 0 & -4 & 0 & -2700 \\ 0 & 4 & 6 & 8100 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2700 \\ 0 & -4 & 0 & -2700 \\ 0 & 0 & 6 & 5400 \end{array}\right)$$

Tres filas no nulas en A y en A^*: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 3$, compatible determinado.

5. De abajo arriba: $6z = 5400$, $z = 900$; $-4y = -2700$, $y = 675$; $x = 2700 - 675 - 900 = 1125$.
6. Comprobación con el enunciado: $1125 + 675 + 900 = 2700$; $675 = \dfrac{1125 + 900}{3}$; y $1{,}25 \cdot 1125 + 2{,}25 \cdot 675 + 2{,}75 \cdot 900 = 1406{,}25 + 1518{,}75 + 2475 = 5400$ €.

SOLUCIÓN Tiene que vender **1125 kg de sandía rayada, 675 kg de negra con pepitas y 900 kg de negra sin pepitas** cada semana.

Apartado b)

1. La idea: ahora las tres variedades tienen el mismo precio, pero **no lo conocemos**: llámalo p (euros por kilo). Se mantienen las dos primeras ecuaciones y cambia la de la recaudación: $px + py + pz = 5400$.
2. Gauss con p dentro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2700 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ p & p & p & 5400 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - pF_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2700 \\ 0 & -4 & 0 & -2700 \\ 0 & 0 & 0 & 5400 - 2700p \end{array}\right)$$

3. La última fila dice $0 = 5400 - 2700p$. Si $p \neq 2$ es imposible: $\operatorname{rg} A = 2$ y $\operatorname{rg} A^* = 3$, **incompatible**. Solo hay solución si $p = 2$. Tiene lógica: se venden siempre 2700 kilos, así que $2700p = 5400$.
4. Con $p = 2$, la última fila es $(0 \;\; 0 \;\; 0 \,|\, 0)$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 2 < 3$ incógnitas. Por **Rouché-Frobenius**, compatible **indeterminado**: infinitas soluciones, con $3 - 2 = 1$ parámetro. Esa es la justificación de que las cantidades **no son únicas**.
5. Las soluciones: de la 2.ª fila, $y = 675$, fija en todas; de la 1.ª, $x + z = 2025$. Con $z = \lambda$: $(x, y, z) = (2025 - \lambda,\ 675,\ \lambda)$, y como son kilos, $0 \leq \lambda \leq 2025$. Por ejemplo, $(1125, 675, 900)$, la del apartado a), o $(1025, 675, 1000)$.

SOLUCIÓN Sí es posible, con un precio único de **2 € el kilo**. Tendría que vender **675 kg de sandía negra con pepitas** y, entre la rayada y la negra sin pepitas, **2025 kg** repartidos de cualquier forma: las cantidades **no son únicas** (sistema compatible indeterminado).

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Madrid 2025: a) «Descripción adecuada de las tres incógnitas» (0,25 puntos), «Planteamiento y resolución correcta del sistema de ecuaciones» (0,75) y «Obtención correcta de la solución contextualizada» (0,25); b) planteamiento (0,50), precio (0,25), «Justificación de la no unicidad de la solución» (0,25) y solución contextualizada (0,25). Se califica en múltiplos de 0,25 y «Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas». La no unicidad se justifica con el sistema escalonado (queda una incógnita libre), como la solución oficial, o con los rangos; un solo reparto no la prueba.

Error típico que te quita puntos. Plantear «un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas» como $y = \frac{x}{3} + z$ en vez de $y = \frac{x+z}{3}$. Y, en el b), dar un solo reparto sin decir que hay infinitos.

10 Ejercicio resuelto: discutir un sistema con un parámetro y resolverlo (Cantabria 2026)

PAU CANTABRIA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · APARTADO 1, OPCIÓN 1 (A ELEGIR ENTRE LAS OPCIONES 1 Y 2; 3 PUNTOS)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x - y + az = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Realice las tareas que se describen a continuación:

a) Tarea 1.1A. Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a. (2 puntos)

b) Tarea 1.1B. Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -2$. (1 punto)

Apartado a)

1. La idea: **discutir** es decir, para cada valor de a, si el sistema tiene una solución, infinitas o ninguna. Herramienta: **Rouché-Frobenius**. Los criterios calculan los rangos escalonando y aceptan determinantes, que es lo que se hace aquí.
2. Matrices (0,2 puntos):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

3. Determinante por Sarrus, desarrollado a mano (en Cantabria, un resultado de calculadora sin desarrollo no puntúa):

$$|A| = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + a \cdot a \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 - \left[(-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot a \cdot 1 + a \cdot 2 \cdot 1\right]$$

$$= (a^2 - 3) - (1 + 3a) = a^2 - 3a - 4 = (a - 4)(a + 1).$$

   Se anula para $a = 4$ y $a = -1$ (las raíces de $a^2 - 3a - 4 = 0$ son $a = \frac{3 \pm 5}{2}$).
4. **Si $a \neq 4$ y $a \neq -1$:** $|A| \neq 0$, así que $\operatorname{rg} A = 3$; A' contiene a A y solo tiene tres filas, así que $\operatorname{rg} A' = 3$. Como $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 3 =$ número de incógnitas, **compatible determinado**.
5. **Si $a = 4$:**

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

   $|A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9 \neq 0$ da $\operatorname{rg} A = 2$. En A', el menor con las columnas de x, de y y de los términos independientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3 + 8 + 2) - (-1 + 2 + 24) = -18 \neq 0,$$

   así que $\operatorname{rg} A' = 3$. Rangos distintos: **incompatible**.

6. Si $a = -1$:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Las columnas de y y de z son iguales, así que $\operatorname{rg} A \leq 2$, y el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$ da $\operatorname{rg} A = 2$. En A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3 - 2 + 2) - (-1 + 2 - 6) = 2 \neq 0,$$

$\operatorname{rg} A' = 3$: **incompatible**.

SOLUCIÓN Si $a \neq 4$ y $a \neq -1$, **compatible determinado** ($\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 3$); si $a = 4$ o $a = -1$, **incompatible** ($\operatorname{rg} A = 2 \neq \operatorname{rg} A' = 3$). Ningún valor de a da infinitas soluciones.

Apartado b)

1. $a = -2$ no es 4 ni -1: por el apartado anterior, el sistema es compatible determinado ($|A| = (-2-4)(-2+1) = 6$). Queda $x - 2y - z = 1$, $2x - y - 2z = 2$, $x + y + z = 3$.
2. Gauss (los criterios detallan su reparto):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

3. De abajo arriba: $2z = 2$, $z = 1$; $3y = 0$, $y = 0$; $x = 1 + 2y + z = 1 + 0 + 1 = 2$.
4. Comprobación: $2 - 0 - 1 = 1$; $4 - 0 - 2 = 2$; $2 + 0 + 1 = 3$. Por Cramer saldría lo mismo: $|A_x| = 12$, $|A_y| = 0$, $|A_z| = 6$, y $x = \frac{12}{6} = 2$, $y = \frac{0}{6} = 0$, $z = \frac{6}{6} = 1$.

SOLUCIÓN $(x, y, z) = (2,\ 0,\ 1)$.

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Cantabria 2026. Tarea 1.1A: «Planteamiento correcto de las matrices A y A': 0,2 puntos», «Cálculo de |A|: 0,3 puntos», «Identificación de a = 4 y a = -1: 0,3 puntos», 0,2 el caso general y 0,5 cada valor crítico («0,3 pts por el rango, 0,2 pts por la conclusión»); «No es necesario nombrar el Teorema de Rouché-Frobenius, pero sí es imprescindible comparar los rangos con el número de incógnitas para justificar la compatibilidad». Tarea 1.1B: por Gauss, 0,1 la matriz ampliada, 0,4 el primer paso, 0,2 el segundo y 0,1 cada incógnita; por Cramer, se descuentan 0,1 puntos «por cada determinante cuyo desarrollo no aparezca escrito». Y, por acuerdo de coordinación, «No se valorará ningún resultado obtenido exclusivamente con la calculadora sin desarrollo escrito».

Error típico que te quita puntos. Escribir «$|A| = 0$, luego incompatible» sin calcular el rango de A'. Aquí el resultado coincide por casualidad, pero pierdes los 0,3 puntos del rango de cada caso, y en otros sistemas ese valor da infinitas soluciones.

11 Ejercicio resuelto: infinitas soluciones y el dato que las fija (Cataluña 2026)

PAU CATALUÑA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 2 (OBLIGATORIO; 2,5 PUNTOS)

Un campesino produce diferentes tipos de frutas: fresas, albaricoques y cerezas, que se venden en cajas a precios diferentes. Se sabe que un pedido de 5 cajas de fresas, 3 de albaricoques y 4 de cerezas tiene un coste total de 120 €. Por otro lado, un pedido de 2 cajas de fresas, 1 de albaricoques y 3 de cerezas tiene un coste total de 56 €.

a) 2.1. Calcule el precio de una caja de fresas y el precio de una caja de albaricoques en función del precio de una caja de cerezas. Con esta información, calcule cuál es el precio de un pedido de 6 cajas de fresas, 4 de albaricoques y 2 de cerezas. (1,5 puntos)

b) 2.2. Si se sabe que el precio de una caja de albaricoques es de 12,50 €, calcule cuál es el precio de las otras dos cajas de fruta. (1 punto)

Apartado a)

1. La idea: tres precios desconocidos y solo **dos** datos. El sistema tendrá infinitas soluciones, y te piden darlas **en función del precio de las cerezas**; después, calcular el precio de un pedido nuevo.
2. Incógnitas: x, y, z = precio, en euros, de una caja de fresas, de albaricoques y de cerezas. Ecuaciones: $5x + 3y + 4z = 120$ y $2x + y + 3z = 56$.
3. Rouché-Frobenius: el menor $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0$ da $\operatorname{rg} A = 2$, y A^*, con dos filas, también tiene rango 2. Como $2 < 3$ incógnitas, es **compatible indeterminado**, con un parámetro: z, como pide el enunciado.
4. Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 120 \\ 2 & 1 & 3 & 56 \end{array}\right) \xrightarrow{5F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 120 \\ 0 & -1 & 7 & 40 \end{array}\right)$$

   De la 2.ª fila, $-y + 7z = 40$, así que $y = 7z - 40$. Sustituyendo en la 1.ª: $5x = 120 - 3(7z - 40) - 4z = 240 - 25z$, $x = 48 - 5z$.
5. Para que los tres precios sean positivos: $7z - 40 > 0$ y $48 - 5z > 0$, es decir, $\frac{40}{7} < z < 9{,}6$: la caja de cerezas cuesta entre unos 5,71 € y 9,60 €.
6. El pedido nuevo:

$$6x + 4y + 2z = 6(48 - 5z) + 4(7z - 40) + 2z = 288 - 30z + 28z - 160 + 2z = 128.$$

   La z desaparece: cuesta **128 €** sea cual sea el precio de las cerezas. El porqué: $(6, 4, 2) = 2 \cdot (5, 3, 4) - 2 \cdot (2, 1, 3)$, así que el pedido nuevo cuesta $2 \cdot 120 - 2 \cdot 56 = 128$ €.

SOLUCIÓN $x = 48 - 5z$ (fresas) e $y = 7z - 40$ (albaricoques), en euros, con z el precio de la caja de cerezas. El pedido de 6 cajas de fresas, 4 de albaricoques y 2 de cerezas cuesta **128 €**.

Apartado b)

1. El dato nuevo, $y = 12{,}5$, es la ecuación que faltaba: con tres ecuaciones independientes, el sistema pasa a ser **compatible determinado**.
2. $7z - 40 = 12{,}5$, $7z = 52{,}5$, $z = 7{,}5$; y $x = 48 - 5 \cdot 7{,}5 = 48 - 37{,}5 = 10{,}5$.
3. Comprobación con el enunciado: $5 \cdot 10{,}5 + 3 \cdot 12{,}5 + 4 \cdot 7{,}5 = 52{,}5 + 37{,}5 + 30 = 120$ y $2 \cdot 10{,}5 + 12{,}5 + 3 \cdot 7{,}5 = 21 + 12{,}5 + 22{,}5 = 56$. Y $z = 7{,}5$ está entre $\frac{40}{7}$ y $9{,}6$, como tocaba.

SOLUCIÓN Caja de fresas, **10,50 €**; caja de cerezas, **7,50 €**.

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Cataluña 2026 (traducidos del catalán): 2.1, «Escribir el sistema: 0,25 puntos por ecuación correcta. Obtención de x en función de z: 0,25 puntos. Obtención de y en función de z: 0,25 puntos. Obtención del precio del nuevo pedido: 0,5 puntos»; 2.2, «Procedimiento de resolución: 0,5 puntos. Obtención de los precios de las cajas de fresas y de cerezas: 0,25 puntos por cada precio». Además, la respuesta tiene que estar redactada «de manera coherente, con corrección y claridad», con la notación y el vocabulario matemático adecuados. La solución oficial resuelve por Gauss, como aquí.

Error típico que te quita puntos. Contestar el 2.1 con precios concretos inventando el de las cerezas: piden x e y **en función de** z. Y, en el pedido, dejar la z sin simplificar: hay que ver que se va y que el precio es siempre 128 €.

Conceptos clave

Sistema de ecuaciones lineales

Conjunto de ecuaciones de primer grado (incógnitas con exponente 1 y sin multiplicarse entre sí) que deben cumplirse a la vez. Una solución las cumple todas.

Matriz de coeficientes, matriz ampliada y expresión matricial

A reúne los coeficientes de las incógnitas; la ampliada $A^* = (A \mid B)$ (o A') añade la columna de los términos independientes. El sistema se escribe $AX = B$, con X la columna de las incógnitas.

Sistemas equivalentes

Los que tienen las mismas soluciones. Las operaciones de Gauss convierten un sistema en otro equivalente.

Sistema compatible determinado

El que tiene una única solución: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = n$, el número de incógnitas.

Sistema compatible indeterminado

El que tiene infinitas soluciones: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* < n$. Se dan con $n - \operatorname{rg} A$ parámetros.

Sistema incompatible

El que no tiene solución: $\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} A^*$. Al escalonar aparece una fila $(0 \;\; 0 \;\; 0 \mid k)$ con $k \neq 0$.

Rango

Número de filas no nulas que quedan al escalonar una matriz; también, el orden del mayor menor no nulo.

Teorema de Rouché-Frobenius

Un sistema es compatible si y solo si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^*$; la solución es única si ese rango es el número de incógnitas.

Método de Gauss

Resolución (o discusión) de un sistema escalonando su matriz ampliada con operaciones de fila y sustituyendo de abajo arriba.

Regla de Cramer

Con tantas ecuaciones como incógnitas y $|A| \neq 0$, cada incógnita es $\frac{|A_x|}{|A|}$: $|A|$ con su columna cambiada por la de los términos independientes.

Sistema homogéneo

El que tiene todos los términos independientes nulos. Siempre es compatible (tiene la solución $(0, 0, 0)$) y tiene infinitas soluciones si y solo si $\operatorname{rg} A < n$.

MODO PAU

Siete reglas que valen puntos

Incógnitas

Defínelas con palabras y unidades antes de plantear: puntúa en Madrid, Murcia y Cantabria.

Plantear

Una frase, una ecuación. «La suma de» y «juntos» llevan paréntesis.

Comprobar

Sustituye en el enunciado, no en tu sistema.

Interpretar

Responde con palabras y unidades. Negativos o decimales donde no caben: en Murcia, un 0; en la Comunitat Valenciana, también, salvo que avises de que la solución no es razonable.

Rouché-Frobenius

Rangos iguales y $= n$: determinado; iguales y $< n$: indeterminado; distintos: incompatible. Compara siempre con el número de incógnitas.

Determinante nulo

No es «incompatible»: mira A^* en cada valor crítico.

Infinitas soluciones

$n - \operatorname{rg} A$ parámetros. Da la solución general, no un ejemplo.

Cómo te lo pueden preguntar

- Plantea un sistema de tres ecuaciones a partir de un enunciado (precios, compras, entradas, inversiones, personas) y resuélvelo: salió en 20 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 15 comunidades (en Asturias, el sistema con contexto viene dado y hay que discutirlo).
- Discute un sistema según los valores de un parámetro con el teorema de Rouché-Frobenius y resuélvelo para algún valor: salió en 6 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 5 comunidades.
- Resuelve un sistema compatible indeterminado (soluciones en función de una incógnita o de un parámetro), halla el valor del parámetro que lo hace indeterminado o usa un dato extra para dejarlo con una sola solución: salió en 6 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 4 comunidades (Asturias, Cataluña, Madrid y País Vasco).
- Analiza si la solución tiene sentido en el contexto (precios negativos, personas que no son números enteros): lo pide Asturias en tres de sus cuatro convocatorias de 2025 y 2026, y los criterios de la Comunitat Valenciana y Murcia lo puntúan.
- Escribe el sistema en forma matricial $AX = B$ o plantéalo a partir de una igualdad de matrices: Galicia 2026 (ordinaria y extraordinaria), Asturias (opción B de sus cuatro convocatorias) y, en extraordinarias, Andalucía 2025 y País Vasco 2025 y 2026.
- Resuelve por Cramer (Asturias, Cantabria, modelo 2027 de Madrid) o estudia un sistema homogéneo con parámetro (País Vasco 2026).

No lo confundas

- $|A| = 0$ (el rango de A es menor que el número de incógnitas) con «incompatible» (rangos distintos).
- Compatible indeterminado (infinitas soluciones) con incompatible (ninguna).

- Una solución concreta, como $(1125, 675, 900)$, con la solución general $(2025 - \lambda,\ 675,\ \lambda)$.
- «Un 40 % más que y» $(1{,}4\,y)$ con «el 40 % de y» $(0{,}4\,y)$.
- Una solución del sistema con una solución del problema: tiene que tener sentido (precios positivos, personas enteras).

Ponte a prueba

PAU Castilla-La Mancha 2026, Ejercicio 2 (2,5 puntos; obligatorio). Una empresa invirtió un total de 20000 euros entre tres fondos de inversión: A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 994 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C. a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió la empresa en cada fondo. (1,5 puntos) b) Encuentra cuánto dinero se ha invertido en cada uno de los fondos de inversión. (1 punto)

Solución: a) Con a, b, c = euros invertidos en los fondos A, B y C: $a + b + c = 20\,000$; $0{,}05a + 0{,}1b + 0{,}02c = 994$, o $5a + 10b + 2c = 99\,400$; y $a = 3(b + c)$, o $a - 3b - 3c = 0$. b) Atajo: como $b + c = \frac{a}{3}$, la primera da $a + \frac{a}{3} = 20\,000$, así que $a = 15\,000$ y $b + c = 5000$. La segunda queda $75\,000 + 10b + 2c = 99\,400$, es decir, $5b + c = 12\,200$; restándole $b + c = 5000$: $4b = 7200$, $b = 1800$ y $c = 3200$. Comprobación: $0{,}05 \cdot 15\,000 + 0{,}1 \cdot 1800 + 0{,}02 \cdot 3200 = 750 + 180 + 64 = 994$. **15 000 € en el fondo A, 1800 € en el B y 3200 € en el C**, como la solución oficial.

PAU Asturias 2026, Pregunta 3, opción A (2,5 puntos; a elegir entre las opciones A y B). Las variables x e y representan, respectivamente, las horas semanales de fisioterapia y de asistencia doméstica que los servicios sociales deben asignar a una persona. Se realizan dos valoraciones independientes para intentar determinar las horas correspondientes, obteniéndose una ecuación a partir de cada valoración. La valoración depende del parámetro a:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ ax + 6y = 15 \end{cases}$$

a) Encuentra el valor de a para que existan infinitas soluciones a este problema. Expresa, a modo de ejemplo, cuántas horas de fisioterapia (x) y de ayuda domiciliaria (y) recibiría una persona en una de estas soluciones. (1 punto) b) Asume que a = 1, encuentra la solución y analiza si tiene sentido en el contexto del problema. (1.5 puntos)

Solución: a) Infinitas soluciones quiere decir $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* < 2$. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 6 \end{vmatrix} = 6 - 2a$, que se anula si $a = 3$; con $a = 3$, la segunda ecuación, $3x + 6y = 15$, es la primera multiplicada por 3: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = 1$, compatible indeterminado. Las soluciones son $x = 5 - 2y$, con $0 \leq y \leq 2{,}5$ para que ninguna cantidad de horas sea negativa; por ejemplo, $(x, y) = (1, 2)$: 1 hora semanal de fisioterapia y 2 de asistencia doméstica (la de la solución oficial). b) Con $a = 1$, $|A| = 4 \neq 0$: compatible determinado. Restando las ecuaciones, $4y = 10$, $y = 2{,}5$, y $x = 5 - 2 \cdot 2{,}5 = 0$. **Tiene sentido**: 0 horas de fisioterapia y 2,5 horas semanales de asistencia doméstica, ninguna negativa.

PAU País Vasco 2026, Problema 4, opción 4B (2 puntos; a elegir entre 4A y 4B). Se considera el siguiente sistema lineal dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x - z = 0 \end{cases}.$$

(a) (1 punto) Discute el sistema para los distintos valores de k. (b) (1 punto) Resuelve el sistema en los casos que sea posible.

Solución: (a) Es **homogéneo**: la columna de los términos independientes es de ceros, así que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^*$ y el sistema es **siempre compatible**. Por Sarrus, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (k + 45 + 0) - (-5k + 0 + 3) = 6k + 42$, que se anula para $k = -7$. Si $k \neq -7$, $\operatorname{rg} A = 3$: compatible determinado. Si $k = -7$, $\operatorname{rg} A = 2$ (el menor $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$): compatible indeterminado. (b) Si $k \neq -7$, la única solución es la trivial, $(0, 0, 0)$. Si $k = -7$: de la 3.ª ecuación, $z = 5x$; en la 1.ª, $x - 3y + 5x = 0$, $y = 2x$. Con $x = \lambda$: $(x, y, z) = (\lambda,\ 2\lambda,\ 5\lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, como la solución oficial. Comprobación en la 2.ª con $k = -7$: $\lambda + 14\lambda - 15\lambda = 0$.

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II)
2. PAU Madrid 2025, ordinaria: examen, soluciones y criterios

3. PAU Madrid 2026, extraordinaria: examen, soluciones y criterios
4. PAU Cantabria 2026, ordinaria: examen
5. PAU Cantabria 2026, ordinaria: criterios
6. PAU Cantabria 2025, ordinaria: examen
7. PAU Cantabria 2025, ordinaria: criterios
8. PAU Cataluña 2026, ordinaria: examen
9. PAU Cataluña 2026, ordinaria: criterios (en catalán)
10. PAU Cataluña 2026, extraordinaria: examen
11. PAU Castilla-La Mancha 2026, ordinaria: examen
12. PAU Castilla-La Mancha 2026, ordinaria: soluciones y criterios
13. PAU Castilla-La Mancha 2025, ordinaria: examen
14. PAU Castilla-La Mancha 2025, extraordinaria: examen
15. PAU Asturias 2025, ordinaria: examen
16. PAU Asturias 2026, ordinaria: examen, soluciones y criterios
17. PAU Asturias 2026, extraordinaria: examen, soluciones y criterios
18. PAU País Vasco 2026, ordinaria: examen
19. PAU País Vasco 2026, ordinaria: solucionario y criterios
20. PAU Galicia 2026, extraordinaria: examen
21. PAU Illes Balears 2025, extraordinaria: criterios y soluciones (en catalán)
22. PAU Illes Balears 2026, ordinaria: criterios (en catalán)
23. PAU Canarias 2025, ordinaria: examen
24. PAU Canarias 2026, ordinaria: examen
25. PAU Aragón 2025, ordinaria: examen y criterios
26. PAU Aragón 2026, ordinaria: examen y criterios
27. PAU Andalucía 2026, ordinaria: examen
28. PAU Andalucía 2026, ordinaria: criterios
29. PAU Comunitat Valenciana 2025, ordinaria: criterios
30. PAU Región de Murcia 2026, ordinaria: examen y criterios
31. PAU Castilla y León 2026, ordinaria: criterios
32. PAU Extremadura 2026, extraordinaria: examen
33. PAU Extremadura 2026, extraordinaria: criterios

Imágenes: Los tres tipos de sistema 2 × 2: Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con los datos exactos.

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 31 de octubre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.