Aplicaciones de la derivada: monotonía, extremos y optimización

Test de 10 preguntas y flashcards de este tema en **farmeandopau.com** ›

Última revisión: 31 de octubre de 2026.

Escanea y haz el test del tema

LA IDEA EN 30 SEGUNDOS

El signo de la derivada dice si un modelo sube o baja: donde $f' > 0$, **crece**; donde $f' < 0$, **decrece**; y donde f' cambia de signo hay un **máximo** o un **mínimo relativo**. En un intervalo cerrado, el **máximo y el mínimo absolutos** se buscan entre los puntos críticos y los **extremos del intervalo**. Con eso se hallan **parámetros** y se resuelven problemas de **optimización**. Es el ejercicio que más se repite de la asignatura: la monotonía y los extremos salieron en **31 de las 34** convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en las 17 comunidades, y los extremos absolutos de un modelo en un intervalo, en **19 de las 34**.

1 Qué te piden y cómo cae en tu comunidad

Casi todos los ejercicios de este tema son iguales por dentro: una **función que modeliza algo** (seguidores, glucosa, beneficio, la velocidad del agua de un pantano), definida en un intervalo de tiempo, y tres preguntas: **cuándo crece y cuándo decrece**, **cuándo alcanza su máximo y su mínimo y cuánto valen**, y **qué significa** en el contexto. El Real Decreto 243/2022 lo recoge como «La derivada como razón de cambio en resolución de problemas de optimización en contextos diversos».

- **Lo que más cae:** la monotonía y los extremos relativos (31 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en las 17 comunidades) y los máximos y mínimos absolutos de un modelo en un intervalo (19 de las 34, en 13 comunidades).
- **Casi nunca viene solo:** el mismo ejercicio pide la continuidad de una función a trozos (Tema 4), una recta tangente (Tema 5), la curvatura o la gráfica (Tema 7) o un área (Tema 8).
- **Lo que necesitas del Tema 5:** derivar bien. Un error en la derivada arrastra todo lo que viene detrás: en Aragón 2025, con la derivada mal calculada, el apartado b), que vale 7 de los 10 puntos de la pregunta, tiene «como máximo 5,5 puntos».

Formato	Dónde (ordinarias 2025–2026)
Modelo polinómico en un intervalo: monotonía y extremos absolutos	Aragón 2026, Cataluña (ejercicio obligatorio), Extremadura (C1 en 2025 y 2026; en el modelo 2027, la pregunta 1, obligatoria), Galicia 2026, La Rioja, País Vasco, Castilla y León 2025 (dos cuestiones de 1,5 puntos)
Modelo racional en un intervalo (máximo de usuarios, asistentes, población)	Aragón 2025, Murcia 2025, Navarra 2025
Función a trozos, casi siempre con contexto, tras la continuidad (Tema 4)	Andalucía, Asturias, Canarias, Castilla-La Mancha, Comunitat Valenciana, Galicia 2026, Cantabria 2026, Castilla y León 2026

Formato	Dónde (ordinarias 2025–2026)
Función sin contexto (racional, exponencial, raíz o polinomio)	Murcia, Madrid 2025, Galicia 2025, La Rioja 2026, Comunitat Valenciana 2025, Baleares (con la recta tangente)
Hallar parámetros con un extremo, un punto o una tangente	Castilla-La Mancha, Galicia 2025, La Rioja 2025, Navarra 2026, País Vasco 2025
Plantear la función y optimizarla (ingresos, beneficio)	Cataluña 2025, Comunitat Valenciana 2026

Cuenta las opciones a elegir. Solo Cantabria 2025 y Madrid 2026 no tuvieron ejercicio de este tema.

El esquema de siempre

Dominio o intervalo → derivada factorizada → puntos donde $f' = 0$ (o donde no existe) → **tabla de signos** → crece y decrece → extremos relativos → valores en los puntos críticos **y en los extremos del intervalo** → una frase en el contexto, con unidades.

2 Crecimiento y decrecimiento: el signo de f'

Una función es **creciente** en un intervalo si, al aumentar x, aumenta $f(x)$, y **decreciente** si disminuye. La derivada es la pendiente de la tangente (Tema 5): si es **positiva** en todo un intervalo, la función **sube** en él; si es **negativa**, **baja**. Estudiar la monotonía es, por tanto, estudiar el **signo de f'**.

- **Ejemplo (Galicia 2025, Pregunta 3, apartado 3.1).** $B(t) = (4-t)(t-1)^2$ con $0 \le t \le 4$. Por la regla del producto, $B'(t) = -(t-1)^2 + 2(4-t)(t-1) = (t-1)(9-3t) = 3(t-1)(3-t)$, que se anula en $t = 1$ y $t = 3$:

t	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,4)$
signo de B'	$-$	$+$	$-$
B	↘	↗	↘

  B **decrece** en $(0,1) \cup (3,4)$ y **crece** en $(1,3)$.

- **Con un hueco en el dominio (Murcia 2025, Apartado 2, Cuestión 1).** $f(x) = \dfrac{x^2+3}{1-x}$ no existe en $x = 1$. Su derivada, $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$, se anula en $x = -1$ y $x = 3$, y el $x = 1$ entra en la tabla aunque no sea un punto crítico. Decrece en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y crece en $(-1,1) \cup (1,3)$, como en la solución oficial. No escribas «crece en $(-1,3)$»: $f(0) = 3$ y $f(2) = -7$.

1 Escribe el dominio o el intervalo
Sin los puntos que anulan un denominador, o el intervalo del enunciado, como $9 \le t \le 17$.

2 Deriva y factoriza
Saca factor común y factoriza: $B'(t) = 3(t-1)(3-t)$ se lee mejor que $-3t^2 + 12t - 9$. En un cociente con el denominador al cuadrado, el signo lo da el numerador.

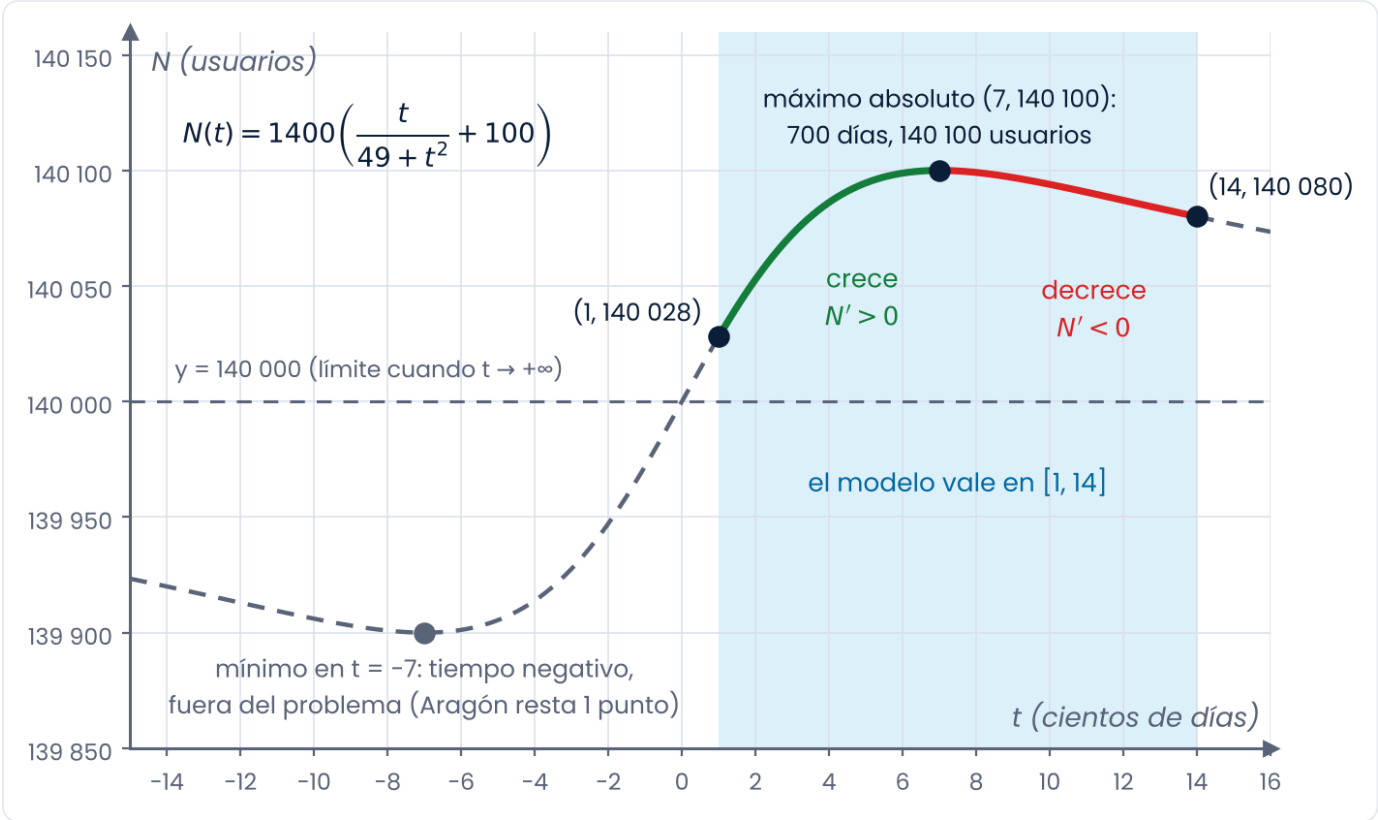
3 Busca los puntos que parten la tabla
Las soluciones de $f'(x) = 0$ del dominio, los puntos que no son del dominio y los puntos de unión de una función a trozos.

4 Haz la tabla de signos
En cada intervalo, sustituye un valor de prueba en f' o razona el signo de cada factor.

5 Concluye con palabras
$f' > 0$: crece; $f' < 0$: decrece. Da los intervalos abiertos, como las soluciones oficiales, y, si hay contexto, dilo: «la asistencia crece durante la primera hora».

Error típico: estudiar el signo fuera del contexto

Si el modelo vale para $t \in [1, 14]$, una raíz negativa de f' no existe para el problema (figura). Aragón 2025, con los usuarios de una aplicación: «Se penalizará con 1 pto si se incluyen intervalos de tiempo negativos asociados a la raíz t= -7 (ya que no tiene sentido en el contexto del problema)».



Los usuarios de ViviChat (Aragón 2025, resuelto más abajo). En $[1, 14]$ (zona sombreada), N crece hasta $t = 7$ (en verde, $N' > 0$) y decrece después (en rojo, $N' < 0$): máximo absoluto de 140 100 usuarios a los 700 días. La otra raíz de N', $t = -7$ (en gris, el mínimo de la fórmula), es un tiempo negativo y no entra en la tabla. El eje vertical no empieza en 0: dentro del intervalo el modelo varía menos de 100 usuarios.

3 Extremos relativos: máximos y mínimos locales

f tiene un **máximo relativo** (o local) en $x = a$ si $f(a)$ es mayor o igual que los valores de f **cerca de** a, y un **mínimo relativo** si es menor o igual. Si f es derivable en a y tiene ahí un extremo, la tangente es horizontal: $f'(a) = 0$. Al revés no vale: $f'(a) = 0$ no basta. Los puntos con $f'(a) = 0$ (o en los que f no es derivable) son los **puntos críticos**: los candidatos. Para decidir hay dos criterios.

- **Ejemplo (Galicia 2025, sigue el anterior).** B pasa de decrecer a crecer en $t = 1$: **mínimo relativo** en $(1, B(1)) = (1, 0)$. Pasa de crecer a decrecer en $t = 3$: **máximo relativo** en $(3, 4)$.
- **Exponencial (Madrid 2025, Pregunta 2.2).** $f(x) = e^x(-x^2 + 3)$ da $f'(x) = e^x(-x^2 - 2x + 3) = -e^x(x + 3)(x - 1)$; como e^x es siempre positiva, f' pasa de $-$ a $+$ en $x = -3$ y de $+$ a $-$ en $x = 1$: mínimo relativo en $(-3, -6e^{-3}) \approx (-3;\ -0{,}30)$ y máximo relativo en $(1, 2e) \approx (1;\ 5{,}44)$, los de la solución oficial. Los criterios de Madrid dan 0,25 puntos por la «Determinación del máximo y mínimo (basta con la abscisa)»; en un problema con contexto, en cambio, casi siempre piden también el valor.
- **Una tangente horizontal no es siempre un extremo:** $f(x) = x^3$ tiene $f'(0) = 0$, pero $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ y crece a los dos lados. Si f' no cambia de signo, no hay extremo.
- **Un máximo relativo puede estar más bajo que un mínimo relativo.** En Murcia 2025 (Cuestión 1, la del ejemplo anterior) el máximo relativo vale -6 y el mínimo relativo, 2, cada uno a un lado de la asíntota $x = 1$: cada extremo relativo se compara solo con sus vecinos.

Criterio	Cómo se aplica	Cuándo usarlo
Cambio de signo de f'	De $+$ a $-$: máximo. De $-$ a $+$: mínimo. Si no cambia: no hay extremo	Siempre que f sea continua en a, aunque no sea derivable ahí. Y ya lo tienes hecho si te han pedido la monotonía
Segunda derivada	$f'(a)=0$ y $f''(a)<0$: máximo. $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$: mínimo	Cuando f'' sale fácil (polinomios). Si $f''(a)=0$, no decide: vuelve al cambio de signo

Los dos criterios valen igual. La curvatura, que también usa la segunda derivada, es del Tema 7.

Da el punto entero

El extremo es el punto $(a, f(a))$: a dice **dónde** (o cuándo) y $f(a)$, **cuánto**. En Murcia 2025 (Cuestión 1) se dan 0,25 + 0,25 puntos por identificar $x=-1$ y $x=3$ como mínimo y máximo locales y otros 0,25 por «Calcular f (-1) y f (3)».

4 Máximo y mínimo absolutos en un intervalo cerrado: el ejercicio estrella

El **máximo absoluto** de f en un intervalo es el mayor valor que toma en todo él, y el **mínimo absoluto**, el menor. Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, los dos existen (**teorema de Weierstrass**), y solo pueden estar en tres sitios: en un **punto crítico** de dentro, en un punto donde f **no es derivable** o en los **extremos del intervalo**, a y b.

- **Ejemplo (Extremadura 2026, resuelto más abajo).** La velocidad de desembalse $C(t)=-2000+576t-42t^2+t^3$, en $[9, 17]$, tiene puntos críticos en $t=12$ y $t=16$. Candidatos: $C(9)=511$, $C(12)=592$, $C(16)=560$ y $C(17)=567$. **Máximo absoluto, 592 m³/s a las 12 h; mínimo absoluto, 511 m³/s a las 9 h**, en un extremo del intervalo, no en el mínimo relativo de las 16 h (figura).
- **El máximo relativo no siempre gana.** Cataluña 2025 (Ejercicio 2): una inversión $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{35x^2}{2}+300x+250$, con $x\in[0, 24]$ en horas, tiene un máximo relativo en $x=15$, con $1937{,}5$ €, pero el valor máximo del día es el de las 24 h: $f(24)=1978$ €.
- **Empates.** En Galicia 2025, $B(0)=4$, $B(1)=0$, $B(3)=4$ y $B(4)=0$: el máximo absoluto, 4, se alcanza en $t=0$ y en $t=3$, y el mínimo absoluto, 0, en $t=1$ y en $t=4$. Se dan los dos puntos.
- **Atajo:** si la función es continua en el intervalo y en él solo hay un punto crítico, que es un máximo relativo (la función sube y después baja), ese punto es también el máximo absoluto. Es el caso de los usuarios de una aplicación en Aragón 2025 (resuelto más abajo): en $[1, 14]$ el único punto crítico es $t=7$ (700 días), con 140 100 usuarios.

1 Haz la lista de candidatos

Los puntos críticos que caen dentro de $[a, b]$, los puntos de unión o sin derivada y los dos extremos, a y b.

2 Evalúa f en todos

Una línea por candidato, con la función original (no con la derivada).

3 Compara

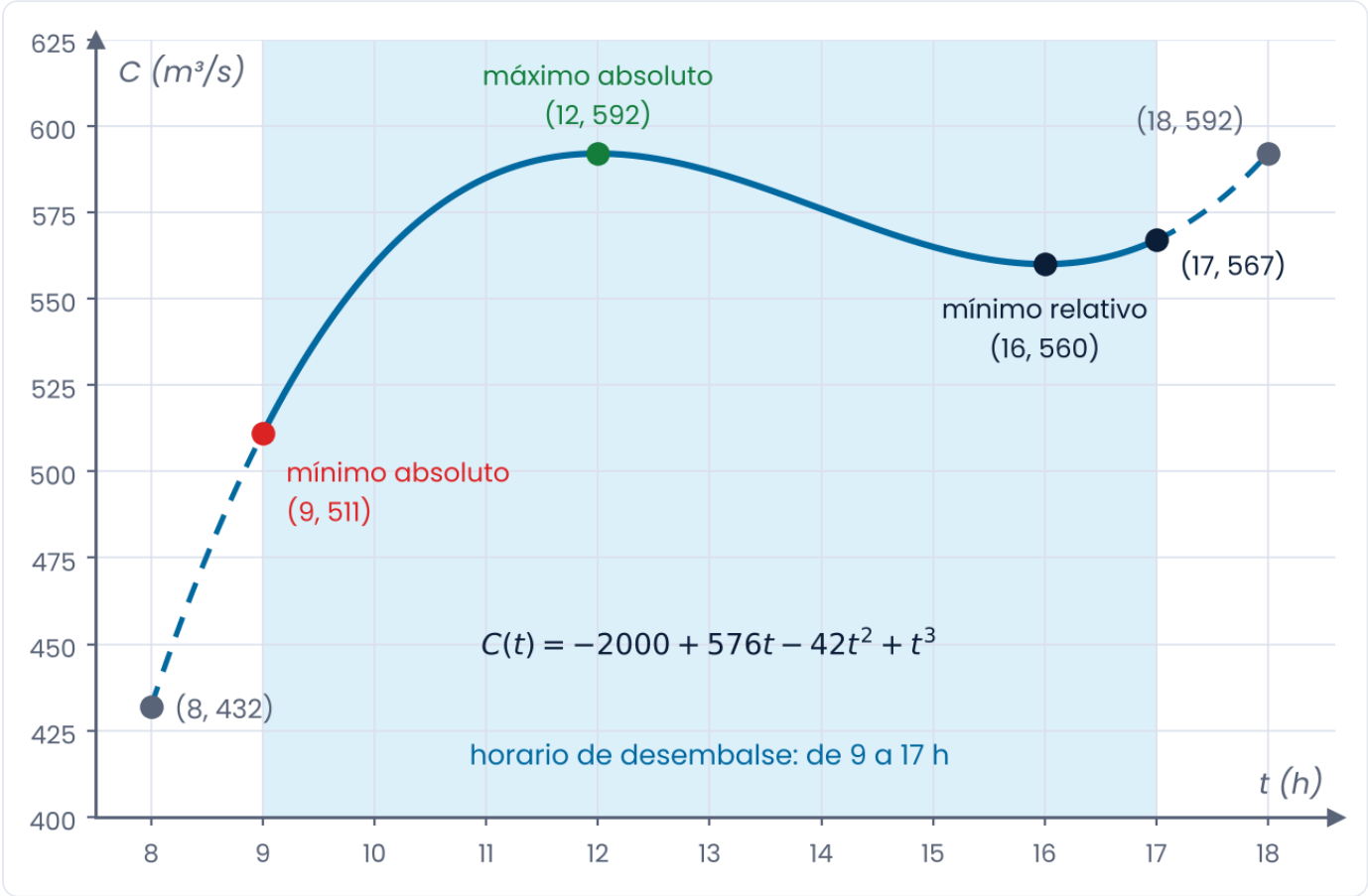
El mayor valor es el máximo absoluto y el menor, el mínimo absoluto. Cualquiera de los dos puede estar en un extremo del intervalo, y pueden alcanzarse en más de un punto.

4 Responde a la pregunta

«¿A qué hora…?» es el valor de t; «¿a cuánto asciende…?» es $f(t)$, con sus unidades.

Error típico: olvidar los extremos del intervalo

Dar el máximo relativo como si fuera el absoluto, sin evaluar en a y en b. Se puntúa aparte: Extremadura 2026 da 0,75 puntos por los extremos relativos y otros 0,5 por la «Determinación del máximo y del mínimo absoluto»; La Rioja 2025, 0,75 por los relativos y 0,5 por «Hallar los extremos absolutos».



La velocidad de desembalse de Extremadura 2026 (resuelto más abajo). En $[9, 17]$ (zona sombreada) el máximo absoluto está en $t = 12$ (592 m³/s) y el mínimo absoluto, en el extremo $t = 9$ (511 m³/s), más bajo que el mínimo relativo de las 16 h (560 m³/s). Discontinua, la fórmula de 8 a 9 h y de 17 a 18 h: el apartado c).

5 Funciones a trozos: los puntos de unión también cuentan

Muchos modelos cambian de fórmula en un instante: la glucosa antes y después de un medicamento, el valor de una empresa con tres gerentes. La continuidad en las uniones es del Tema 4; aquí, la monotonía y los extremos.

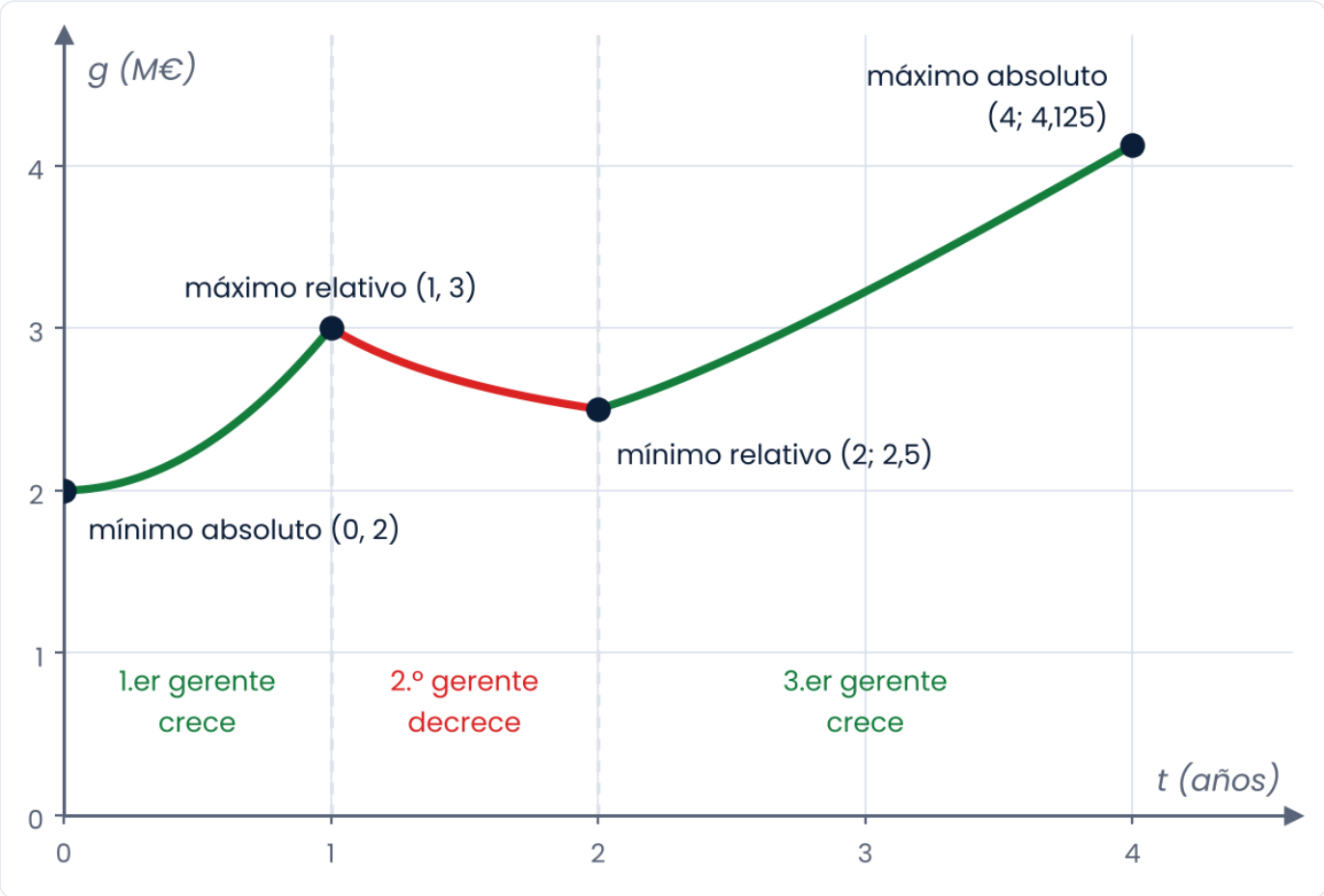
- **Cada trozo con su derivada,** en su intervalo **abierto**. En el punto de unión no basta con derivar con una de las dos fórmulas (la derivabilidad, con las derivadas laterales, es del Tema 5): allí la función puede no ser derivable (un pico) y, aun así, tener un extremo.
- **Ejemplo (Comunitat Valenciana 2026, Problema 2.A).** El valor de mercado de una empresa, en millones de euros, con los parámetros del apartado a) ($a = 1, b = 2$ y $c = 1$):

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \le t \le 1, \\ \dfrac{1}{t} + 2, & 1 < t \le 2, \\ t + \dfrac{2}{t^2}, & 2 < t \le 4. \end{cases}$$

- **Monotonía.** Primer trozo: $g'(t) = 2t > 0$, crece. Segundo: $g'(t) = -\dfrac{1}{t^2} < 0$, decrece. Tercero: $g'(t) = 1 - \dfrac{4}{t^3}$, positiva si $t^3 > 4$, y en $(2, 4)$ lo es, porque $t^3 > 8$: crece. Con el primer gerente y con el tercero el valor sube; con el segundo, baja.
- **Extremos.** Ningún trozo tiene puntos críticos dentro de su intervalo ($t^3 = 4$ da $t \approx 1{,}59$, que no es del tercer trozo). Quedan las uniones y los bordes: $g(0) = 2$, $g(1) = 3$, $g(2) = 2{,}5$ y $g(4) = 4{,}125$. **Máximo relativo en $t = 1$, mínimo relativo en $t = 2$, mínimo absoluto en $t = 0$ y máximo absoluto en $t = 4$**: lo mismo que los criterios oficiales, que dan 0,25 puntos por «justificar que no hay máximos ni mínimos relativos en el interior de ninguno de los tramos» (figura).

Los puntos de unión, siempre en la lista

En una función a trozos, los candidatos a extremo son los puntos críticos de cada trozo (dentro de su intervalo), los **puntos de unión** y los **extremos del intervalo**. Evalúa la función en todos.



El valor de mercado de la Comunitat Valenciana 2026, por gerentes. Sube, baja y vuelve a subir. Los extremos están en los puntos de unión ($t = 1$, máximo relativo; $t = 2$, mínimo relativo) y en los bordes ($t = 0$, mínimo absoluto; $t = 4$, máximo absoluto). En $t = 1$ y $t = 2$ hay un pico: no hay tangente horizontal.

6 Hallar parámetros con condiciones de extremo, punto o tangente

El enunciado da propiedades de la función y hay que traducir cada una a una ecuación. Con tantas ecuaciones como parámetros sale un sistema, casi siempre muy sencillo (Tema 2). Cayó en 6 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en 5 comunidades.

- **Ejemplo con contexto (Castilla-La Mancha 2026, Ejercicio 3, apartado b.1).** La atención en clase es $F(t) = at(b - t)$, con $0 \le t \le 40$ minutos, y «a los 20 minutos de comenzar la clase le prestan la máxima atención, es decir, el grado de atención es 100». Como $F(t) = abt - at^2$, $F'(t) = ab - 2at$.

- Condiciones: $F'(20) = ab - 40a = a(b-40) = 0$ y $F(20) = 20a(b-20) = 100$. Con $a = 0$ la atención sería siempre 0 y no podría valer 100, así que $b = 40$, y entonces $400a = 100$, $a = \frac{1}{4}$. Es un máximo: $F''(t) = -2a = -\frac{1}{2} < 0$. Y a los cinco minutos (b.2), $F(5) = \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 35 = 43{,}75$, como en la solución oficial.
- **Ejemplo sin contexto (Navarra 2026, Pregunta 2, i).** $f(x) = ax^2 + 5x + \dfrac{b}{x}$ con un extremo relativo en $(1, 4)$: $f(1) = a + 5 + b = 4$ y, como $f'(x) = 2ax + 5 - \dfrac{b}{x^2}$, $f'(1) = 2a + 5 - b = 0$. Con $a + b = -1$ y $2a - b = -5$, sumando, $3a = -6$: $a = -2$ y $b = 1$. Comprobación: $f''(1) = 2a + 2b = -2 < 0$, así que hay de verdad un extremo (un máximo).
- **Los parámetros pueden cambiar a mitad del ejercicio.** La Rioja 2025 pide a y b en el apartado a) y después dice «Para a = -12 y b = 100»: usa los valores que te dan, no los tuyos (resuelto más abajo).

El enunciado dice…	Se escribe	Ejemplo real
«extremo relativo en $x = a$», «tangente horizontal en $x = a$»	$f'(a) = 0$	La Rioja 2025: «un extremo relativo en x=1», $f'(1) = 0$
«pasa por el punto (a, b)»	$f(a) = b$	La Rioja 2025: «pase por el punto (0, 3)», $f(0) = 3$
«extremo relativo en el punto (a, b)»	$f'(a) = 0$ y $f(a) = b$	Navarra 2026: «un extremo relativo en el punto (1, 4)»
«la recta $y = mx + n$ es tangente en $x = a$»	$f(a) = ma + n$ y $f'(a) = m$ (Tema 5)	País Vasco 2025: $y = -2$ tangente en $x = 1$: $f(1) = -2$ y $f'(1) = 0$; sale $a = b = -1$

Una condición sobre un extremo da casi siempre dos ecuaciones: la de la derivada (dónde) y la del punto (cuánto).

Comprueba que la condición se cumple de verdad

$f'(a) = 0$ es necesaria, pero no basta para que haya extremo. Si el enunciado dice «máximo», comprueba el signo de $f''(a)$ o el cambio de signo de f', y descarta los valores sin sentido, como el $a = 0$ de Castilla-La Mancha 2026, que la solución oficial descarta: «a = 0 no es posible».

7 Optimización: escribir la función y buscar su extremo

A veces la función no viene dada: hay que **escribirla** a partir del enunciado y después buscar su máximo o su mínimo. En las ordinarias de 2025 y 2026 cayó en 2 de las 34 convocatorias (Cataluña 2025 y Comunitat Valenciana 2026), pero es habitual en las extraordinarias: Andalucía 2026, Asturias 2025, Cataluña 2025 y 2026 y País Vasco 2026.

- **Ejemplo (Cataluña 2025, Ejercicio 4, opción B, apartado b).** A 80 € la noche, un hotel tendría 100 reservas de habitaciones dobles, y «por cada euro de descuento sobre el precio de la habitación consiguen dos reservas más». Con x descuentos de 1 €, el precio es $80 - x$, las reservas son $100 + 2x$ y los ingresos, $I(x) = (80 - x)(100 + 2x) = -2x^2 + 60x + 8000$.
- $I'(x) = -4x + 60 = 0$ da $x = 15$; I' es positiva antes y negativa después: **máximo** (también $I''(x) = -4 < 0$). La pregunta es el precio: $80 - 15 = 65$ €, con 130 reservas e ingresos de $I(15) = 65 \cdot 130 = 8450$ €, frente a los 8000 € sin descuento (figura).
- **Una parábola tiene el vértice donde siempre:** $y = ax^2 + bx + c$ con $a < 0$ tiene el máximo en $x = -\frac{b}{2a}$; en Cataluña 2025, $x = -\frac{60}{-4} = 15$. Sirve para comprobar, pero en el examen hazlo con la derivada: los criterios de Cataluña dan 0,25 puntos por el «Cálculo de la derivada» (traducido del catalán).

1 Elige la variable
Lo que se decide (el descuento, el precio, la cantidad), con unidades y límites: un precio no puede ser negativo.

2 Escribe la función
Ingresos = precio × cantidad; beneficio = ingresos − gastos. Déjala en función de **una sola variable**.

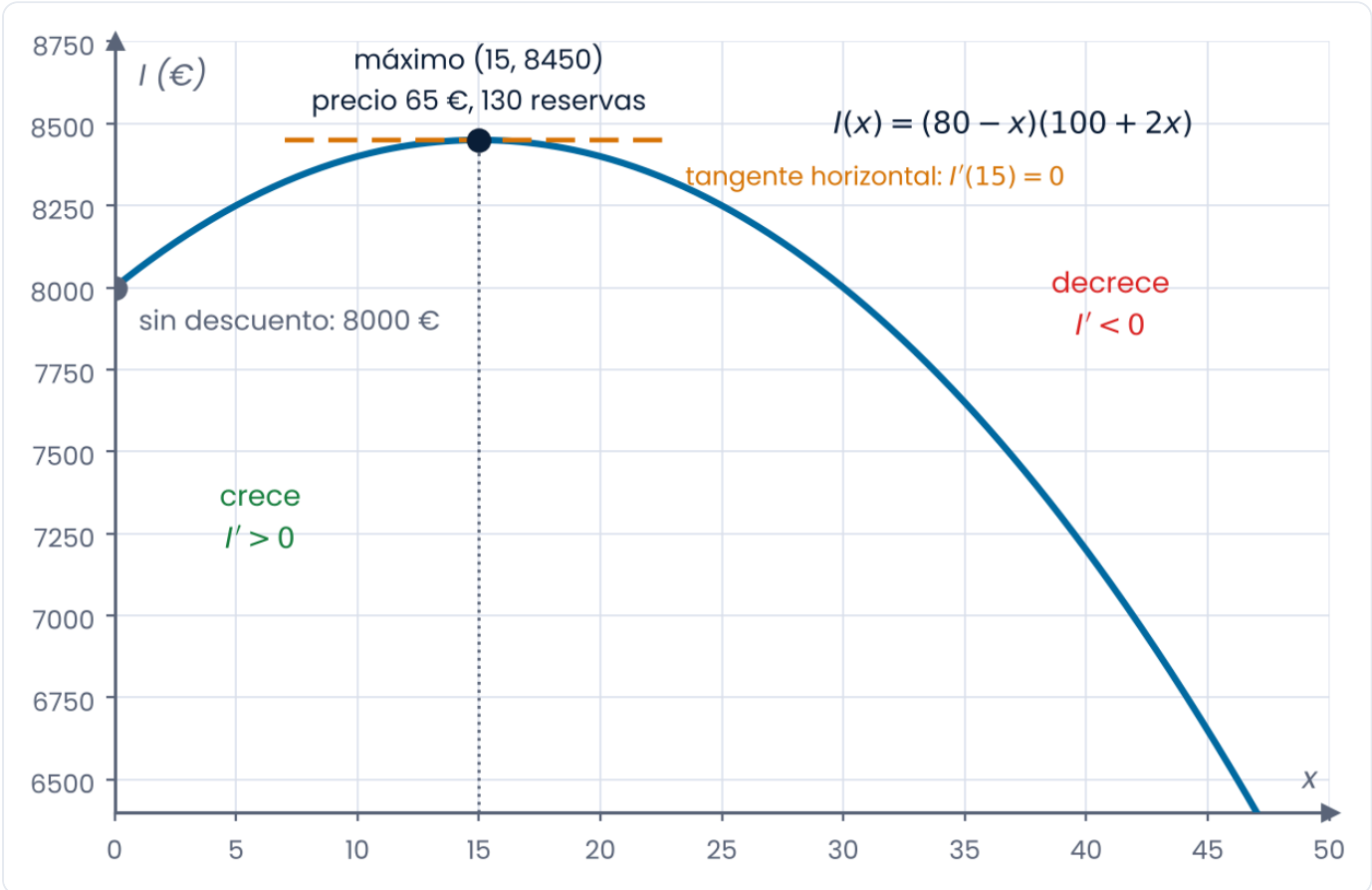
3 Deriva e iguala a cero
Candidatos: las soluciones de $f' = 0$ del dominio y, si lo hay, los extremos del intervalo.

4 Justifica que es máximo (o mínimo)
Con el cambio de signo de f' o con el signo de f''. Puntúa aparte.

5 Contesta a lo que te preguntan
A veces no es la variable: te piden el **precio**, y tu variable era el descuento.

Justifica que es un máximo

Cataluña 2025 da 0,25 puntos por la «Justificación de que se trata de un máximo» (criterios traducidos del catalán), aparte de los 0,25 de encontrar el punto. Basta una línea: «I' pasa de positiva a negativa en $x = 15$» o «$I''(15) = -4 < 0$».



Los ingresos del hotel de Cataluña 2025. $I(x) = (80 - x)(100 + 2x)$ crece mientras $I' > 0$ y decrece después: el máximo, 8450 €, está en $x = 15$ descuentos de 1 €, es decir, con la habitación doble a 65 €. Sin descuento ($x = 0$) se ingresan 8000 €.

8 Ejercicio resuelto: monotonía y extremos absolutos de un modelo en un intervalo (Extremadura 2026)

PAU EXTREMADURA 2026 · CONVOCATORIA ORDINARIA · APARTADO C, PROBLEMA C1 (A ELEGIR ENTRE C1 Y C2; 3 PUNTOS)

Después de este invierno tan lluvioso, la Confederación Hidrográfica del Guadiana ha decidido que un determinado pantano desembalse agua cada día desde las 9 hasta las 17 horas. La velocidad

a la que el agua sale por sus compuertas, en m^3 por segundo, depende de la hora del día según la expresión:

$$C(t) = -2000 + 576t - 42t^2 + t^3 \qquad 9 \leq t \leq 17$$

Calcular:

a) Los intervalos de tiempo en los que la velocidad de desembalse crece y en los que decrece. (1,5 puntos)

b) ¿A qué horas se producen las velocidades de desembalse máxima y mínima?, ¿a cuánto ascienden estas velocidades? (1 punto)

c) Se desea ampliar una hora el período de desembalse diario. Si se quiere desembalsar una mayor cantidad de agua por las compuertas, ¿interesará comenzar a las 8 (una hora antes) o continuar desembalsando hasta las 18 horas (una hora después)? (0,5 puntos)

Apartado a)

1. Idea: «crece» y «decrece» es el **signo de** C' en el intervalo $[9, 17]$. Derivamos: $C'(t) = 576 - 84t + 3t^2 = 3(t^2 - 28t + 192)$.
2. Puntos críticos: $t^2 - 28t + 192 = 0$ da $t = \dfrac{28 \pm \sqrt{784 - 768}}{2} = \dfrac{28 \pm 4}{2}$, es decir, $t = 12$ y $t = 16$, los dos dentro de $[9, 17]$. Factorizada, $C'(t) = 3(t - 12)(t - 16)$.
3. Tabla de signos (valores de prueba: $C'(10) = 36$, $C'(14) = -12$ y $C'(16{,}5) = 6{,}75$):

t	$(9, 12)$	$(12, 16)$	$(16, 17)$
$C'(t)$	$+$	$-$	$+$
$C(t)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

4. Extremos relativos: en $t = 12$ pasa de crecer a decrecer, **máximo relativo**, con $C(12) = -2000 + 6912 - 6048 + 1728 = 592$; en $t = 16$ pasa de decrecer a crecer, **mínimo relativo**, con $C(16) = -2000 + 9216 - 10\,752 + 4096 = 560$.

SOLUCIÓN La velocidad de desembalse **crece de 9 a 12 h y de 16 a 17 h**, y **decrece de 12 a 16 h**. Tiene un máximo relativo a las 12 h (592 m³/s) y un mínimo relativo a las 16 h (560 m³/s).

Apartado b)

1. Idea: ahora son los extremos **absolutos** en $[9, 17]$. Candidatos: los puntos críticos, $t = 12$ y $t = 16$, y los extremos del intervalo, $t = 9$ y $t = 17$.
2. $C(9) = -2000 + 5184 - 3402 + 729 = 511$; $C(12) = 592$; $C(16) = 560$; $C(17) = -2000 + 9792 - 12\,138 + 4913 = 567$.
3. El mayor es 592 y el menor, 511. El mínimo del día no es el relativo de las 16 h, sino el de las 9 h.

SOLUCIÓN La velocidad máxima es de **592 m³/s, a las 12 h**, y la mínima, de **511 m³/s, a las 9 h**, al empezar a desembalsar.

Apartado c)

1. Idea: interesa la hora en la que el agua sale más deprisa. El enunciado no da otra fórmula para esas horas, así que hay que suponer —es lo que espera la pregunta— que la misma expresión sigue valiendo de 8 a 9 y de 17 a 18. Es una extrapolación del modelo, que se dio para $9 \leq t \leq 17$: dilo en una frase.
2. De 8 a 9: $C'(t) > 0$ para $t < 12$, así que C crece y en toda esa hora $C(t) \leq C(9) = 511$ (empieza en $C(8) = 432$).
3. De 17 a 18: $C'(t) > 0$ para $t > 16$, así que C crece y en toda esa hora $C(t) \geq C(17) = 567$ (acaba en $C(18) = 592$).
4. En cada instante de la hora de 17 a 18 el agua sale más deprisa que en cualquier instante de 8 a 9 ($567 > 511$). Con integrales (Tema 8), la velocidad media de cada hora es de $474{,}25$ m³/s de 8 a 9 y de $577{,}75$ m³/s de 17 a 18.

SOLUCIÓN Interesa **continuar desembalsando hasta las 18 h**: en esa hora la velocidad va de 567 a 592 m³/s, y de 8 a 9 solo iría de 432 a 511 m³/s.

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Extremadura (dan el reparto, no la solución). a) «Cálculo de extremos relativos: de 0 a 0.75 puntos. Cálculo razonado de los intervalos de crecimiento: de 0 a 0.5 puntos. Expresión contextualizada de la solución: de 0 a 0.25». b) «Determinación del máximo y del mínimo absoluto: de 0 a 0.5 puntos. Determinación del valor de la función en el máximo y el mínimo absoluto de 0 a 0.25 puntos. Contextualización de la solución final: de 0 a 0.25 puntos». c) «Cálculo, razonamiento y contextualización de la solución final: de 0 a 0.5 puntos».

Error típico que te quita puntos. Dar como velocidad mínima la del mínimo relativo de las 16 h (560 m³/s) sin evaluar los extremos del intervalo: la mínima es la de las 9 h (511 m³/s). Y, en el c), contestar sin justificar: no basta con un valor suelto, hay que razonar que en toda la hora de 17 a 18 la velocidad es mayor (por la monotonía o con la integral).

9 Ejercicio resuelto: máximo absoluto de un modelo racional en un intervalo (Aragón 2025)

PAU ARAGÓN 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · PREGUNTA 2 (OBLIGATORIA; SE CALIFICA SOBRE 10 PUNTOS Y PESA 2,5 EN LA NOTA FINAL)

Se ha lanzado al mercado la aplicación social *ViviChat* y el número de usuarios en la aplicación en el momento t está dado por la función

$$N(t) = 1.400 \left(\frac{t}{49 + t^2} + 100 \right)$$

donde t se mide en cientos de días desde el lanzamiento.

a) Gracias a la campaña previa al lanzamiento, la aplicación ha logrado captar usuarios desde el inicio. Se considera que la campaña ha tenido éxito si el número de usuarios en el momento del lanzamiento ($t = 0$) es de, al menos, 100.000. Determine si la campaña ha sido exitosa. Además, calcule cuántos usuarios tendrá la aplicación en un horizonte infinito de tiempo. (3 puntos)

b) Suponiendo que $t \in [1, 14]$, calcule el valor de t en el que la aplicación alcanzará el máximo número de usuarios. ¿Cuántos usuarios tendrá la aplicación en ese momento?, y ¿cuántos días

habrán transcurrido desde su lanzamiento? (7 puntos)

Apartado a)

1. Es del Tema 4 (valor de la función y límite en el infinito); aquí, la idea. En el lanzamiento, $N(0) = 1400 \cdot (0 + 100) = 140\,000$ usuarios, que es al menos 100 000.
2. A largo plazo, $\dfrac{t}{49 + t^2} \to 0$ cuando $t \to +\infty$ (el denominador tiene mayor grado), así que $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 1400 \cdot 100 = 140\,000$.

SOLUCIÓN La campaña **tuvo éxito**: la aplicación empezó con **140 000 usuarios**. En un horizonte infinito de tiempo tenderá también a **140 000 usuarios**.

Apartado b)

1. Idea: es el máximo **absoluto** de N en $[1, 14]$. Se estudia el signo de N' solo en ese intervalo y se comparan los candidatos. El sumando constante $1400 \cdot 100$ no influye en la derivada.
2. Regla del cociente en $\dfrac{t}{49 + t^2}$: $N'(t) = 1400 \cdot \dfrac{(49 + t^2) - t \cdot 2t}{(49 + t^2)^2} = \dfrac{1400\,(49 - t^2)}{(49 + t^2)^2}$.
3. $N'(t) = 0 \iff 49 - t^2 = 0 \iff t = \pm 7$. **Solo $t = 7$ está en $[1, 14]$**: $t = -7$ sería un tiempo negativo, y Aragón resta 1 punto si aparece en los intervalos.
4. Signo en $[1, 14]$: el denominador es positivo, así que manda $49 - t^2$. Por ejemplo, $N'(2) = \dfrac{1400 \cdot 45}{53^2} > 0$ y $N'(10) = \dfrac{1400 \cdot (-51)}{149^2} < 0$:

t	$(1, 7)$	$(7, 14)$
$N'(t)$	$+$	$-$
$N(t)$	$\nearrow$	$\searrow$

   N crece hasta $t = 7$ y decrece después: en $t = 7$ hay un máximo relativo y, como es el único punto crítico del intervalo, también el **máximo absoluto**.
5. Comprobación con los extremos del intervalo: $N(1) = 1400\left(\frac{1}{50} + 100\right) = 140\,028$, $N(7) = 1400\left(\frac{7}{98} + 100\right) = 140\,100$ y $N(14) = 1400\left(\frac{14}{245} + 100\right) = 140\,080$. El mayor es $N(7)$.
6. Por la otra vía que admiten los criterios: $N''(t) = \dfrac{2800\,t\,(t^2 - 147)}{(49 + t^2)^3}$ y $N''(7) = -\frac{100}{49} < 0$, así que es un máximo.
7. Unidades: t está en **cientos de días**, así que $t = 7$ son 700 días.

SOLUCIÓN El máximo se alcanza en $t = 7$, es decir, **700 días después del lanzamiento**, con **140 100 usuarios**: solo 100 más que al principio y que a largo plazo.

Lo que puntúa. Criterios oficiales de Aragón (sobre 10 puntos). a) «Identificar la pregunta con el cálculo del número inicial de clientes, calcular dicho valor y responder a la pregunta (1 pto). Identificar la pregunta con el cálculo del límite y calcularlo (2 ptos)». b) «Calcular N′(t) (2,5 ptos) y obtener las raíces de la ecuación (1 pto)» y, por la vía de la monotonía, «Intervalos de crecimiento y decrecimiento (2 ptos). Se penalizará con 1 pto si se incluyen intervalos de tiempo negativos asociados a la raíz t= -7 (ya que no tiene sentido en el contexto del problema). Determinar el valor de t para el que N(t) es máximo (0,5 ptos) y calcular dicho valor máximo (0,5 ptos). Responder al número de días transcurridos (0,5 ptos)»; por la de la segunda derivada, «Calcular la derivada segunda N″(t) (1,5 ptos)», su signo en el punto crítico (1 punto) y «Concluir carácter comparando con el valor en

los extremos del intervalo u otra caracterización (0,5 ptos)». Con la primera derivada mal calculada, el apartado b) vale «como máximo 5,5 puntos».

Error típico que te quita puntos. Meter la raíz $t = -7$ en la tabla (decir, por ejemplo, que N decrece en $(-\infty, -7)$): no hay tiempos negativos y Aragón lo penaliza con 1 punto. Y contestar «7 días»: t está en cientos de días, son 700.

10 Ejercicio resuelto: parámetros con un extremo y un punto, y extremos absolutos en [0, 8] (La Rioja 2025)

PAU LA RIOJA 2025 · CONVOCATORIA ORDINARIA · EJERCICIO 3, OPCIÓN 3.1 (A ELEGIR ENTRE 3.1 Y 3.2; 3 PUNTOS)

Dada la función $f(x) = x^3 + a\,x^2 + 21\,x + b$ (a y b: números reales), se pide:

a) Calcula qué valores deben tomar "a" y "b" para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 1$ y la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(0,\ 3)$. (0,75 puntos)

b) Para $a = -12$ y $b = 100$: calcula los máximos y mínimos, relativos y absolutos, de $f(x)$ en el intervalo cerrado $[0,\ 8]$. (1,25 puntos)

c) Calcula el valor que debe tomar "a" para que se cumpla la igualdad:

$$\int_0^2 (3x^2 + 2ax + 21)\,dx = 30$$

(1 punto)

Apartado a)

1. Idea: dos condiciones, dos ecuaciones. «Extremo relativo en $x = 1$» es $f'(1) = 0$ y «pasa por $(0, 3)$» es $f(0) = 3$.
2. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 21$, así que $f'(1) = 3 + 2a + 21 = 0$ y $a = -12$.
3. $f(0) = 0 + 0 + 0 + b = 3$, así que $b = 3$.
4. Comprobación: con $a = -12$, $f'(x) = 3x^2 - 24x + 21 = 3(x - 1)(x - 7)$ pasa de positiva a negativa en $x = 1$: hay de verdad un extremo (un máximo).

SOLUCIÓN $a = -12$ y $b = 3$: $f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 3$.

Apartado b)

1. Ojo: el enunciado cambia a $b = 100$. El término independiente sube la gráfica, pero no cambia la derivada: $f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 100$ y $f'(x) = 3(x - 1)(x - 7)$.
2. Puntos críticos: $x = 1$ y $x = 7$, los dos en $[0, 8]$. Clasificación con la segunda derivada, $f''(x) = 6x - 24$: $f''(1) = -18 < 0$, **máximo relativo**; $f''(7) = 18 > 0$, **mínimo relativo**.
3. Valores: $f(1) = 1 - 12 + 21 + 100 = 110$ y $f(7) = 343 - 588 + 147 + 100 = 2$.
4. Extremos absolutos: comparamos con los extremos del intervalo, $f(0) = 100$ y $f(8) = 512 - 768 + 168 + 100 = 12$. El mayor de 100, 110, 2 y 12 es 110, y el menor, 2.

SOLUCIÓN Máximo relativo en $(1, 110)$ y mínimo relativo en $(7, 2)$. En $[0, 8]$, el **máximo absoluto es 110, en $x = 1$**, y el **mínimo absoluto es 2, en $x = 7$**: los extremos del intervalo, $f(0) = 100$ y $f(8) = 12$, no los superan.

Apartado c)

1. Es del Tema 8 (regla de Barrow); aquí, la idea. El integrando es justo $f'(x)$, así que una primitiva es $x^3 + ax^2 + 21x$.
2. $\left[x^3 + ax^2 + 21x\right]_0^2 = 8 + 4a + 42 = 50 + 4a$, y $50 + 4a = 30$ da $a = -5$.

SOLUCIÓN $a = -5$.

Lo que puntúa. Criterios oficiales de La Rioja (sin solución numérica publicada): a) «Plantear condiciones f ' (1) = 0, f (0) = 3 y calcular "a" y "b" (0,75 puntos)». b) «Extremos relativos: Calcular los puntos críticos y clasificarlos (0,75 puntos)» y «Hallar los extremos absolutos (0,5 puntos)». c) «Calcular primitiva; aplicar regla de Barrow y resolver ecuación resultante (1 punto)».

Error típico que te quita puntos. Arrastrar la $b = 3$ del apartado a) al b): los puntos críticos son los mismos, pero todos los valores salen 97 unidades más bajos. Y dar solo los extremos relativos cuando piden también los absolutos: hay que evaluar en $x = 0$ y en $x = 8$.

Conceptos clave

Función creciente

En un intervalo, si $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$. Si $f'(x) > 0$ en todo el intervalo, f es creciente en él.

Función decreciente

En un intervalo, si $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$. Si $f'(x) < 0$ en todo el intervalo, f es decreciente en él.

Monotonía

Estudio de dónde crece y dónde decrece una función, con el signo de f'.

Punto crítico

Punto del dominio en el que $f'(x) = 0$ (tangente horizontal) o en el que f no es derivable. Es candidato a extremo, pero no siempre lo es.

Extremo relativo

Máximo (o mínimo) relativo en a: $f(a)$ es mayor (o menor) o igual que los valores de f cerca de a. Se da como punto $(a, f(a))$.

Extremo absoluto

El mayor (máximo absoluto) o el menor (mínimo absoluto) valor que toma f en todo su dominio o en el intervalo dado. Puede estar en un extremo del intervalo.

Teorema de Weierstrass

Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza en él un máximo y un mínimo absolutos.

Criterio de la segunda derivada

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, hay un máximo relativo en a; si $f''(a) > 0$, un mínimo relativo. Si $f''(a) = 0$, no decide.

Optimización

Buscar el valor de la variable que hace máxima (o mínima) una magnitud, como el beneficio: se escribe la función y se busca su extremo absoluto.

MODO PAU

Ocho reglas que valen puntos

Primero, dónde vive

Dominio o intervalo del enunciado, y todo se estudia solo ahí. Aragón 2025 resta 1 punto por los intervalos con tiempos negativos.

Derivada factorizada

Factor común y raíces: $3(t-12)(t-16)$ da el signo de un vistazo. Un error en la derivada arrastra todo.

Tabla completa

Puntos críticos, puntos fuera del dominio y puntos de unión: todos parten la tabla. Un valor de prueba en cada tramo.

Intervalos abiertos

Crece en $(-1,1) \cup (1,3)$, nunca «en $(-1,3)$» si $x=1$ no es del dominio.

Extremo = punto

Di si es máximo o mínimo y da $(a, f(a))$: dónde y cuánto.

Absolutos: mira los bordes

Evalúa también en los extremos del intervalo y en las uniones. El máximo relativo no siempre es el absoluto.

Justifica

Cambio de signo de f' o signo de f''. Cataluña 2025 da 0,25 puntos solo por justificar que es un máximo.

Responde en el contexto

Hora, cantidad y unidades: «592 m³/s a las 12 h». Extremadura puntúa la «Contextualización de la solución final».

Cómo te lo pueden preguntar

- En total, el tema salió en 32 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en las 17 comunidades: solo faltó en Cantabria 2025 y Madrid 2026.
- Estudia el crecimiento y el decrecimiento de una función o de un modelo y sus extremos relativos: salió en 31 de las 34 convocatorias ordinarias de 2025 y 2026, en las 17 comunidades.
- Halla el máximo y el mínimo absolutos de un modelo en un intervalo e interprétalos («¿a qué hora…?, ¿a cuánto asciende…?»): 19 de las 34, en 13 comunidades.
- Halla los parámetros de una función a partir de un extremo, un punto o una tangente: 6 de las 34, en 5 comunidades (Castilla-La Mancha, Galicia, La Rioja, Navarra y País Vasco).
- Escribe la función de una magnitud (ingresos, beneficio) a partir del enunciado y optimízala: 2 de las 34, en 2 comunidades (Cataluña 2025 y Comunitat Valenciana 2026), y en las extraordinarias de Andalucía 2026, Asturias 2025, Cataluña 2025 y 2026 y País Vasco 2026.

No lo confundas

- Punto crítico con extremo: $f'(a)=0$ no basta. $f(x)=x^3$ tiene $f'(0)=0$ y no tiene extremo, porque f' no cambia de signo.
- Extremo relativo con extremo absoluto: en Cataluña 2025, la inversión tiene un máximo relativo a las 15 h (1937,5 €), pero el valor máximo del día es el de las 24 h (1978 €).
- Máximo relativo con «el punto más alto»: un máximo relativo puede estar por debajo de un mínimo relativo (Murcia 2025: máximo $(3,-6)$, mínimo $(-1,2)$).
- Dónde se alcanza el extremo (la abscisa: «a qué hora») con cuánto vale (la ordenada: «a cuánto asciende»). Los criterios los puntúan por separado.
- Monotonía (signo de f', este tema) con curvatura (signo de f'', Tema 7): una función puede crecer siendo cóncava o convexa.

Ponte a prueba

PAU Andalucía 2025, Bloque B, Ejercicio 3 (a elegir entre los Ejercicios 2 y 3; 2,5 puntos). A un paciente con diabetes se le monitoriza durante un día completo, suministrándole un medicamento a mediodía para observar su reacción. La función que aproxima la cantidad de glucosa en sangre (mg/dl) del paciente, en cada instante t (horas), es:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{5}{6}\left(\dfrac{t^3}{3}-12t^2+108t+108\right) & 0\le t\le 12\\ t^2-40t+546 & 12<t\le 24\end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Halle en qué periodos de tiempo el nivel de glucosa va aumentando. b) (1 punto) ¿En qué momentos del día el paciente tiene los niveles más alto y más bajo de glucosa en sangre y a cuánto ascienden? c) (0.75 puntos) ¿En qué momentos, después del mediodía, el paciente tiene 155 mg/dl?

Solución: Los dos trozos valen 210 en $t=12$: la función es continua. a) Primer trozo: $f'(t)=\frac{5}{6}(t^2-24t+108)=\frac{5}{6}(t-6)(t-18)$, positiva en $(0,6)$ y negativa en $(6,12)$ (el 18 no es de este trozo). Segundo: $f'(t)=2t-40$, negativa en $(12,20)$ y positiva en $(20,24)$. La glucosa **aumenta de 0 a 6 h y de 20 a 24 h**. b) Candidatos: $f(0)=90$, $f(6)=\frac{5}{6}\cdot 396=330$, $f(12)=210$, $f(20)=146$ y $f(24)=162$. **El nivel más alto es de 330 mg/dl, a las 6 h, y el más bajo, de 90 mg/dl, a las 0 h**, al empezar la monitorización. c) $t^2-40t+546=155$, $t^2-40t+391=0$: $t=17$ y $t=23$, las dos en $(12,24]$: **a las 17 h y a las 23 h**.

PAU Cataluña 2026, Ejercicio 1 (obligatorio; 2,5 puntos). Un médico empieza a hacer divulgación sobre salud en las redes sociales. A medida que publica contenidos relacionados con este tema, observa un aumento en su número de seguidores. En un momento determinado graba un vídeo polémico y pierde un pequeño número de seguidores, pero al cabo de unos días publica otro que tiene mucho éxito y, a partir de entonces, su número de seguidores vuelve a crecer. La función que describe su número de seguidores en función del tiempo t, medido en semanas, es $f(t)=10t^3-120t^2+450t+700$, $t\in[0,\ 10]$. 1.1. ¿Cuántos seguidores tiene al principio? ¿Cuántos tiene al cabo de 10 semanas? Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y determine sus extremos locales. Haga un esbozo de la gráfica utilizando la información obtenida. [1,5 puntos] 1.2. ¿En qué semana cuelga el vídeo polémico y cuántos seguidores tiene en aquel momento? ¿En qué semana cuelga el vídeo que tiene mucho éxito? A lo largo de las 10 semanas, ¿en qué momento tiene más seguidores? [1 punto]

Solución: 1.1. $f(0)=700$ y $f(10)=10\,000-12\,000+4500+700=3200$ seguidores. $f'(t)=30t^2-240t+450=30(t-3)(t-5)$: crece en $(0,3)$ y en $(5,10)$ y decrece en $(3,5)$. Máximo local en $(3,f(3))=(3,1240)$ y mínimo local en $(5,1200)$. Esbozo (Tema 7): sube de 700 a 1240, baja hasta 1200 y sube hasta 3200. 1.2. El vídeo polémico, en la **semana 3**, con **1240 seguidores**; el de éxito, en la **semana 5**, cuando empieza a crecer de nuevo. El máximo de seguidores es **en la semana 10, con 3200**: el máximo local de la semana 3 no es el absoluto. Coincide con la solución oficial.

PAU Comunitat Valenciana 2026, Apartado 2, Problema 2.B (a elegir entre 2.A y 2.B; 3,5 puntos). Cierta empresa tecnológica ofrece servicio de almacenamiento de datos en la nube. Sus ingresos I (en unidades monetarias) dependen de la cantidad de datos almacenados x (en terabytes), siendo $I(x) = 400\,x$, y su función de gastos G (en unidades monetarias) depende también de la cantidad de datos almacenados x (en terabytes), siendo $G(x) = 4\,x^2 + 100$. a) Calcula la cantidad de datos que maximiza el beneficio (ingresos menos gastos), e indica cuál es el beneficio máximo que puede obtener la empresa. (1 punto) b) El ratio ingresos/gastos mide la eficiencia financiera de la empresa. Calcula la cantidad de datos para los cuales la eficiencia financiera de la empresa es máxima, e indica cuál es esa eficiencia máxima. (1,5 puntos) c) Calcula $\int_0^2 G(x)^2\,dx$. (1 punto)

Solución: a) Beneficio: $B(x) = 400x - (4x^2 + 100) = -4x^2 + 400x - 100$. $B'(x) = 400 - 8x = 0$ da $x = 50$, y $B''(x) = -8 < 0$: máximo. **50 TB, con un beneficio máximo de** $B(50) = 20\,000 - 10\,000 - 100 = 9900$ unidades monetarias. b) Eficiencia: $e(x) = \dfrac{400x}{4x^2 + 100} = \dfrac{100x}{x^2 + 25}$. $e'(x) = \dfrac{100(x^2 + 25) - 100x \cdot 2x}{(x^2 + 25)^2} = \dfrac{100(25 - x^2)}{(x^2 + 25)^2}$. Con $x \geq 0$ se anula en $x = 5$, y es positiva antes y negativa después: máximo. **5 TB, con una eficiencia máxima de** $e(5) = \frac{500}{50} = 10$: los ingresos son 10 veces los gastos. c) (Tema 8) $\int_0^2 (16x^4 + 800x^2 + 10\,000)\,dx = \left[\frac{16}{5}x^5 + \frac{800}{3}x^3 + 10\,000x\right]_0^2 = \frac{512}{5} + \frac{6400}{3} + 20\,000 = \frac{333\,536}{15} \approx 22\,235{,}73$. Todo coincide con los criterios oficiales.

Fuentes

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II)
2. Examen PAU Matemáticas CCSS II Extremadura 2026 (ordinaria)
3. Criterios de corrección PAU Matemáticas CCSS II Extremadura 2026 (ordinaria)
4. Examen y criterios PAU Matemáticas CCSS II Región de Murcia 2025 (ordinaria)
5. Examen y criterios PAU Matemáticas CCSS II La Rioja 2025 (ordinaria)
6. Examen PAU Matemáticas CCSS II Andalucía 2025 (ordinaria)
7. Examen PAU Matemáticas CCSS II Cataluña 2026 (ordinaria)
8. Criterios de corrección PAU Matemáticas CCSS II Cataluña 2026 (ordinaria, en catalán)
9. Examen PAU Matemáticas CCSS II Comunitat Valenciana 2026 (ordinaria)
10. Criterios de corrección PAU Matemáticas CCSS II Comunitat Valenciana 2026 (ordinaria)
11. Examen PAU Matemáticas CCSS II Cataluña 2025 (ordinaria)
12. Criterios de corrección PAU Matemáticas CCSS II Cataluña 2025 (ordinaria, en catalán)
13. Examen PAU Matemáticas CCSS II Galicia 2025 (ordinaria)
14. Examen y criterios PAU Matemáticas CCSS II Comunidad de Madrid 2025 (ordinaria)
15. Examen y criterios PAU Matemáticas CCSS II Aragón 2025 (ordinaria)
16. Examen PAU Matemáticas CCSS II Castilla-La Mancha 2026 (ordinaria)
17. Criterios de corrección PAU Matemáticas CCSS II Castilla-La Mancha 2026 (ordinaria)
18. Examen PAU Matemáticas CCSS II Navarra 2026 (ordinaria)
19. Examen PAU Matemáticas CCSS II País Vasco 2025 (ordinaria)

Imágenes: Monotonía en el intervalo del modelo (Aragón 2025): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con los datos exactos. · Extremos absolutos en un intervalo (Extremadura 2026): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con los datos exactos. · Extremos en los puntos de unión (Comunitat Valenciana 2026): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con los datos exactos. · Optimizar ingresos (Cataluña 2025): Farmeando PAU, gráfica de elaboración propia (Python y matplotlib) calculada con los datos exactos.

Apuntes de Farmeando PAU · farmeandopau.com · Revisados frente a fuentes. Última revisión: 31 de octubre de 2026. Licencia CC BY-NC-ND 4.0: puedes copiarlo y compartirlo citándonos, sin uso comercial ni cambios (las imágenes, con su propia licencia). ¿Un error? Avísanos desde la página del tema. Cómo los hacemos: farmeandopau.com/metodologia.