

Criteris de correcció globals

- Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades. Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.
- Cada problema té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions màximes que apareixen a cada apartat (si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració). Les puntuacions dels apartats són independents: si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades equivocades), donau-li la puntuació adient.
- Es valorarà conjuntament el resultat, la justificació (ja sigui simbòlica o escrita), la claredat i ús del llenguatge matemàtic i no matemàtic, i l'estructura de la resposta. Orientativament, penalitzau:
 - Els errors de càlcul amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes de justificar, si la justificació és només "intuïtiva" (p. ex. una observació que no respon exhaustivament a allò que s'ha demanat), amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris generals o específics. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta".

P1. — Sigui el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases}.$$

- (a) **[7 punts]** Discuteix el nombre de solucions que té el sistema segons el paràmetre m .

Criteris: 1 punt pel càlcul de $\det(A)$, 2 punts per cada cas concret. -1 punt per conclusió mal feta. -1 punt per error de càlcul.

- (b) **[3 punts]** Resol el sistema per al cas $m = 1$.

Criteris: -1 punt per error de càlcul.

P2. — Sigui A una matriu invertible $n \times n$ amb coeficients reals tal que compleix la igualtat $A^2 + A = I$. Aleshores,

- (a) [3 punts] Satisfà la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

les condicions de l'enunciat? És a dir, compleix M la igualtat de l'enunciat i, a més, és invertible?

Criteris: +1 punt si comproven $\det(M) \neq 0$ (invertible), +1 si punt realitzen correctament M^2 i +1 punt si demostren bé la igualtat $M^2 + M = I$.

Tornant a considerar que A és una matriu qualsevol que satisfà les condicions de l'enunciat,

- (b) [3 punts] Calcula la inversa de A .

Criteris: +3 punts si proporciona el resultat. 0 altrament.

- (c) [4 punts] Comprova que se satisfà la igualtat $A(B + A) - I = A(B - I)$, sent B una matriu quadrada qualsevol $n \times n$ amb coeficients reals.

Criteris: +2 punts si realitza les passes correctes, +2 si arriba al resultat final correcte.

P3. — Siguin els punts $A = (1, 2, 0)$, $B = (-1, 0, 1)$, $C = (0, 0, 1)$ i $D = (3, 1, 2)$.

- (a) [4 punts] Determina la recta r que passa per D i és perpendicular al pla que conté els punts A , B i C .

Criteris: +2 punts si calcula bé el vector de la recta, +2 punts si proporciona la recta correctament.

- (b) [4 punts] Determina si els punts A , B , C i D són coplanaris o no.

Criteris: +1 punt si calcula bé els vectors, +2 punts si calcula bé el determinant, +1 punt si dona bé la resposta.

- (c) [2 punts] És D el punt de tall de la recta amb el pla de l'apartat (a)? Justifica la resposta.

Criteris: +2 punts si la resposta està correctament justificada.

P4. — Sigui el pla $\pi : 3x + y + z = 2$ i els punts $P = (0, 1, 1)$ i $Q = (2, -1, -3)$.

- (a) [2 punts] Són P i Q punts del pla π ? Justifica la resposta.

Criteris: +1 punt per punt ben justificat.

- (b) [4 punts] Calcula el punt S situat sobre la recta PQ que es troba a $3/4$ parts de P i a $1/4$ part de Q .

Criteris: -1 punt per error de càlcul.

- (c) [4 punts] Determina l'equació implícita (també anomenada cartesiana) de la recta que passa per P i és perpendicular al pla π .

Criteris: +2 punts pel càlcul del vector director, +2 punts si proporcionen correctament l'equació implícita. -1 punt per error de càlcul.

P5. — La reproducció d'un insecte al llarg del temps segueix la funció $f(x) = e^{-x}(2x+1)$ sent $x \geq 0$ el temps en mesos i $f(x)$ el nombre d'insectes en milions.

- (a) **[4 punts]** Quants de milions d'insectes hi havia en l'instant inicial? Cap a on tendeix la quantitat d'insectes al llarg dels anys? Interpreta els resultats.

Criteris: 1 punt pel càlcul de $f(0)$, 2 punts pel càlcul del límit i 1 punt per la interpretació.

- (b) **[4 punts]** Quin és el màxim nombre d'insectes que hi arriba a haver? En quin instant de temps s'assoleix aquest valor?

Criteris: 2 punts per cada pregunta. -1 punt per càlculs mal fets.

- (c) **[2 punts]** Hi ha algun moment en què la població supera els 2 milions d'insectes? Justifica la resposta.

Criteris: -2 punts si no està justificat.

P6. — **[10 punts]** Calcula la integral de la funció $f(x) = \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}$.

Criteris: 3 punts si realitzen correctament la divisió polinòmica, 3 punts si realitzen correctament la separació de la fracció (A,B), 4 punts per les integrals immediates correctes, -1 punt per error de càlcul.

P7. — En una classe on tots els alumnes practiquen algun esport, el 60% dels alumnes juga a futbol o bàsquet i el 10% practica els dos. Per altra banda, se sap que hi ha un 60% d'alumnes que no juga a futbol.

- (a) **[3 punts]** Sigui F = 'juga a futbol' i sigui B = 'juga a bàsquet', escriu, en termes d'unions, interseccions i complementaris d'aquests dos esdeveniments, les tres probabilitats que indica l'enunciat.

Criteris: 1 punt per esdeveniment.

- (b) Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un alumne de la classe,

(b.1) **[1 punt]** Jugui a futbol.

(b.2) **[2 punts]** Jugui a bàsquet.

(b.3) **[2 punts]** Jugui a bàsquet i no a futbol (és a dir, només jugui a bàsquet).

(b.4) **[2 punts]** No jugui ni a futbol ni a bàsquet.

Criteris: -1 punt per càlcul mal realitzat. En els tres darrers ítems, 1 punt per desglossar la fórmula i 1 punt pel resultat. Si el resultat no té sentit, es té un 0 de l'apartat directament.

P8. — (a) **[5 punts]** En un examen de tecnologia, quina és la probabilitat de treure una nota entre 5 i 7 si se sap que les notes segueixen una distribució normal de mitjana 6 i desviació típica 2?

Criteris: 2 punts pel plantejament, 1 punt per tipificar, 1 punt separar les probabilitats, 1 punt per la solució.

- (b) **[5 punts]** En un examen de filosofia, el 35% dels alumnes presentats varen obtenir una nota major que 6, mentre que el 51% en varen obtenir una menor que 4. Suposant que les notes segueixen una distribució normal, determina quina és la seva mitjana μ i la seva desviació típica σ .

Criteris: 1.5 punts per cada probabilitat ben plantejada (un total de 3 punts), 1 punt per tipificar, 1 punt per resoldre el sistema i proporcionar la solució correcta.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Sigui el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases}.$$

(a) **[7 punts]** Discuteix el nombre de solucions que té el sistema segons el paràmetre m .

Solució. Sigui el sistema escrit en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenim que

– Cas general:

$$\det(A) = m^3 + m - 2m = m(m^2 - 1) = 0 \text{ si i només si } m = 0, m = \pm 1. \rightarrow \text{Rang}(A) = 3.$$

– Si $m = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rang}(A) = 2.$$

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3.$$

– Si $m = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rang}(A) = 2.$$

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 2.$$

– Si $m = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rang}(A) = 2.$$

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3.$$

Quadre solució:

si $m \neq 0$ i $m \neq \pm 1$	$\text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(A \mathbf{b})$	Sistema comp. determinat	1 solució
si $m = 0$	$\text{Rang}(A) = 2 \neq 3 = \text{Rang}(A \mathbf{b})$	Sistema incompatible	0 solucions
si $m = 1$	$\text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}(A \mathbf{b})$	Sistema comp. indet.	∞ solucions
si $m = -1$	$\text{Rang}(A) = 2 \neq 3 = \text{Rang}(A \mathbf{b})$	Sistema incompatible	0 solucions

(b) [3 punts] Resol el sistema per al cas $m = 1$.

Solució. Com que el sistema és compatible indeterminat, sigui $z = t \in \mathbb{R}$. Aleshores,

$$\begin{cases} x + y = 1 + t \rightarrow x + 1 - 2x = 1 + t \rightarrow x = -t, \\ 2x + y = 1 \rightarrow y = 1 - 2x \rightarrow y = 1 + 2t. \end{cases}$$

Aleshores, $\mathbf{x} = (-t, 1 + 2t, t)$ amb $t \in \mathbb{R}$.

P2. — Sigui A una matriu invertible $n \times n$ amb coeficients reals tal que compleix la igualtat $A^2 + A = I$. Aleshores,

(a) [3 punts] Satisfà la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

les condicions de l'enunciat? És a dir, compleix M la igualtat de l'enunciat i, a més, és invertible?

Solució. Sí, ho compleix ($\det(M) \neq 0$, per tant, és invertible, i compleix que $M^2 + M = I$).

Tornant a considerar que A és una matriu qualsevol que satisfà les condicions de l'enunciat,

(b) [3 punts] Calcula la inversa de A .

Solució. $A(A + I) = I$ i, per tant, $A + I = A^{-1}$.

(c) [4 punts] Comprova que se satisfà la igualtat $A(B + A) - I = A(B - I)$, sent B una matriu quadrada qualsevol $n \times n$ amb coeficients reals.

Solució. $A(B + A) - I = AB + A^2 - I = AB + (I - A) - I = AB - A = A(B - I)$.

P3. — Siguin els punts $A = (1, 2, 0)$, $B = (-1, 0, 1)$, $C = (0, 0, 1)$ i $D = (3, 1, 2)$.

(a) [4 punts] Determina la recta r que passa per D i és perpendicular al pla que conté els punts A , B i C .

Solució. El pla que conté els punts A , B i C té per vectors directores $\vec{AB} = (-2, -2, 1)$ i $\vec{AC} = (-1, -2, 1)$. La recta r té per vector director el vector normal del pla, que és un vector perpendicular als dos vectors directores. I.e.

$$\vec{d}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (0, 1, 2).$$

Per tant, la recta és

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1 + t, \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

- (b) [4 punts] Determina si els punts A , B , C i D són coplanaris o no.

Solució. Els quatre punts seran coplanaris si els vectors $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ i $\vec{AD}$ són linealment independents. Tenim que

$$\vec{AB} = (-2, -2, 1), \quad \vec{AC} = (-1, -2, 1), \quad \vec{AD} = (2, -1, 2),$$

Ara bé, com que

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 4 + 4 - 2 - 4 = 3 \neq 0,$$

tenim que els 4 punts NO són coplanaris.

- (c) [2 punts] És D el punt de tall de la recta amb el pla de l'apartat (a)? Justifica la resposta.

Solució. No. Ja hem vist que no pertany al pla.

P4. — Sigui el pla $\pi : 3x + y + z = 2$ i els punts $P = (0, 1, 1)$ i $Q = (2, -1, -3)$.

- (a) [2 punts] Són P i Q punts del pla π ? Justifica la resposta.

Solució. Sí, perquè verifiquen l'equació: $0 + 1 + 1 = 2$ i $6 - 1 - 3 = 2$.

- (b) [4 punts] Calcula el punt S situat sobre la recta PQ que es troba a $3/4$ parts de P i a $1/4$ part de Q .

Solució. Si no ho saben fer directament, basta fer dues vegades el punt mitjà:

- punt mitjà de P i Q : $M = (1, 0, -1)$.
- punt mitjà de M i Q : $S = (3/2, -1/2, -2)$.

- (c) [4 punts] Determina l'equació implícita (també anomenada cartesiana) de la recta que passa per P i és perpendicular al pla π .

Solució. El vector director d'aquesta recta ha de ser el vector normal del pla ($\vec{n} = (3, 1, 1)$). Per tant, l'equació contínua és

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

D'on tenim que l'equació implícita és

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

P5. — La reproducció d'un insecte al llarg del temps segueix la funció $f(x) = e^{-x}(2x+1)$ sent $x \geq 0$ el temps en mesos i $f(x)$ el nombre d'insectes en milions.

- (a) [4 punts] Quants de milions d'insectes hi havia en l'instant inicial? Cap a on tendeix la quantitat d'insectes al llarg dels anys? Interpreta els resultats.

Solució.

- Inicialment hi ha $f(0) = 1$ milió d'insectes.
- Tenim que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(2x+1) = 0$ (per De L'Hôpital). Llavors la població d'insectes tendeix a extingir-se.

- (b) [4 punts] Quin és el màxim nombre d'insectes que hi arriba a haver? En quin instant de temps s'assoleix aquest valor?

Solució.

- Cercam el màxim de la funció: $f'(x) = -e^{-x}(2x+1) + 2e^{-x} = e^{-x}(-2x+1) = 0$ quan $-2x+1 = 0$. És a dir, a $x = \frac{1}{2}$ mes.
- En aquest moment hi ha un total de $f(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}(2\frac{1}{2}+1) = 2e^{-\frac{1}{2}} = 1.213$ milions d'insectes.

- (c) [2 punts] Hi ha algun moment en què la població supera els 2 milions d'insectes? Justifica la resposta.

Solució. No, perquè el màxim s'assoleix quan hi ha 1.213061319425267 milions d'insectes.

P6. — [10 punts] Calcula la integral de la funció $f(x) = \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}$.

Solució.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2} \right) dx &= \int \left(x^2 - x + 3 + \frac{-3x}{x^2 + x - 2} \right) dx = \\ &= \int (x^2 - x + 3) dx - 3 \int \left(\frac{x}{(x-1)(x+2)} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 3 \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \right) dx = (*) \end{aligned}$$

Es troba que $A = 1/3$ i $B = 2/3$ i per tant,

$$(*) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 3 \int \left(\frac{1}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3} \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - (\ln|x-1| + 2\ln|x+2|) + C.$$

P7. — En una classe on tots els alumnes practiquen algun esport, el 60% dels alumnes juga a futbol o bàsquet i el 10% practica els dos. Per altra banda, se sap que hi ha un 60% d'alumnes que no juga a futbol.

- (a) [3 punts] Sigui F = 'juga a futbol' i sigui B = 'juga a bàsquet', escriu, en termes d'unions, interseccions i complementaris d'aquests dos esdeveniments, les tres probabilitats que indica l'enunciat.

Solució. Sigui F = 'juga a futbol' i sigui B = 'juga a bàsquet'. L'enunciat ens diu que $P(F \cup B) = 0.6$, $P(F \cap B) = 0.1$, $P(\bar{F}) = 0.6$.

- (b) Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un alumne de la classe,

- (b.1) [1 punt] Jugui a futbol.
- (b.2) [2 punts] Jugui a bàsquet.
- (b.3) [2 punts] Jugui a bàsquet i no a futbol (és a dir, només jugui a bàsquet).
- (b.4) [2 punts] No jugui ni a futbol ni a bàsquet.

Solució. Tenim que

- $P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 0.4$
- $P(B) = P(F \cup B) - P(F) + P(F \cap B) = 0.6 - 0.4 + 0.1 = 0.3$
- $P(B \cap \bar{F}) = P(B) - P(B \cap F) = 0.3 - 0.1 = 0.2$
- $P(\bar{F} \cap \bar{B}) = 1 - P(F \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4$

- P8.** — (a) **[5 punts]** En un examen de tecnologia, quina és la probabilitat de treure una nota entre 5 i 7 si se sap que les notes segueixen una distribució normal de mitjana 6 i desviació típica 2?

Solució. Les dades segueixen una $N(6, 2)$. Per tant,

$$p(5 < x < 7) = p\left(\frac{5-6}{2} < z < \frac{7-6}{2}\right) = p(-0.5 < z < 0.5) =$$

$$p(z < 0.5) - p(z < -0.5) = 2p(z < 0.5) - 1 = 2 \cdot 0.6915 - 1 = 0.383.$$

- (b) **[5 punts]** En un examen de filosofia, el 35% dels alumnes presentats varen obtenir una nota major que 6, mentre que el 51% en varen obtenir una menor que 4. Suposant que les notes segueixen una distribució normal, determina quina és la seva mitjana μ i la seva desviació típica σ .

Solució. Les dades segueixen una $N(\mu, \sigma)$ i sabem que

$$p(x > 6) = p\left(z > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 1 - p\left(z < \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.35 \rightarrow p\left(z < \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.65$$

$$p(x < 4) = p\left(z < \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0.51.$$

Així doncs, mirant a la taula tenim que

$$\frac{6-\mu}{\sigma} = 0.385, \quad \frac{4-\mu}{\sigma} = 0.025.$$

Resolent el sistema tenim que

$$\mu = 3.861, \quad \sigma = 5.5.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.