

**INSTRUCCIONES:** El estudiante **deberá resolver obligatoriamente las preguntas de la 1 a la 3, y elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5.** Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Las respuestas a los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando dichas respuestas, ya que **se valorará en estas y en los procedimientos desarrollados el rigor matemático. Su falta se podrá penalizar con hasta 1 punto en todo el examen.** Solo se permite el uso de **calculadoras de tipo 1 y 2**, tal y como se indica en la información de las pruebas. Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. **Duración de la prueba: 90 minutos.**

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte

**Pregunta 1.**

Un equipo de investigación de la UCLM está creando una línea de trabajo para producir un motor, pero a veces este motor no funciona. El motor creado funciona correctamente en el 85% de los casos. Para evaluar la eficacia del proceso de creación del motor, se seleccionan 10 motores al azar. Halla la probabilidad de que:

- a) **[0,5 puntos]** No haya ningún motor defectuoso.
- b) **[0,5 puntos]** Sean 3 los motores defectuosos.
- c) **[1 punto]** Al menos la mitad de los motores funcionen correctamente.

**Pregunta 2.**

En un laboratorio de la UCLM se calienta una muestra metálica hasta 180°C y, a continuación, se deja enfriar en una cámara a 20°C. Un sensor digital registra cómo disminuye la temperatura y los investigadores concluyen que la evolución de la temperatura en función del tiempo se ajusta a un modelo exponencial  $T(t) = 20 + 160e^{-0.3t}$ , donde  $T(t)$  es la temperatura (en °C), y  $t$  es el tiempo en horas desde que comienza el enfriamiento.

- a) **[0,25 puntos]** Determina la temperatura de la muestra a las 2 horas.
- b) **[1 punto]** Calcula cuánto tiempo tardará la muestra en alcanzar los 50°C, expresándolo en horas.
- c) **[0,75 puntos]** Determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función  $T(t)$ , que representa la rapidez de enfriamiento de la muestra en  $t=1$  hora.

**Pregunta 3.**

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro  $a$ :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + ay + 3z = 7 \\ x + 2y + (a - 1)z = a \end{cases}$$

- a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema según los valores del parámetro  $a$ , indicando el número de soluciones en cada caso.
- b) **[0,5 puntos]** Sea  $M$  una matriz cuadrada de orden 4, tal que  $\det M=12$ . Determina el rango de  $M^2$ .

PARTE B (preguntas 4 y 5)

**Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)**

**4.1.** En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  se considera el plano  $\pi \equiv 2x - y + 3z - 6 = 0$ , la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$ , y el punto  $P(2, 1, -1)$ .

- a) **[1 punto]** Determina la posición relativa entre la recta  $r$  y el plano  $\pi$ , razonando la respuesta, y halla su punto de corte, en el caso de que lo tengan.
- b) **[1 punto]** Halla, razonadamente, la distancia del punto  $P(2, 1, -1)$  a la recta  $r$ .

**4.2.**

- a) **[1 punto]** Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(2,0,-1) y Q(3,2,0) en su forma general o implícita.
- b) **[1 punto]** Dado el punto P del apartado anterior, P(2,0,-1), y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

encuentra razonadamente la ecuación general del plano que, pasando por dicho punto P, es paralelo a las rectas r y s.

**Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)**
**5.1. [2 puntos]** Dada la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2x^2 + 5x - 1 & \text{si } x < 1 \\ bx^2 - 3x + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula los parámetros a y b, de manera que la función f(x) sea continua y derivable en x=1.

**5.2.**

- a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la integral siguiente:  $\int (x \ln x) dx$
- b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{2x^3 - 3x^2 + x}$

| p<br>n | r  | .01   | .05   | .10   | .15   | .20   | .25   | .30   | 1/3   | .35   | .40   | .45   | .49   | .50   |
|--------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 9      | 0  | .9135 | .6302 | .3874 | .2316 | .1342 | .0751 | .0404 | .0260 | .0207 | .0101 | .0046 | .0023 | .0020 |
|        | 1  | .0830 | .2985 | .3874 | .3679 | .3020 | .2253 | .1556 | .1171 | .1004 | .0605 | .0339 | .0202 | .0176 |
|        | 2  | .0034 | .0629 | .1722 | .2597 | .3020 | .3003 | .2688 | .2341 | .2162 | .1612 | .1110 | .0776 | .0703 |
|        | 3  | .0001 | .0077 | .0446 | .1069 | .1762 | .2336 | .2668 | .2731 | .2716 | .2508 | .2119 | .1739 | .1641 |
|        | 4  | .0000 | .0006 | .0074 | .0283 | .0661 | .1168 | .1715 | .2048 | .2194 | .2508 | .2600 | .2506 | .2461 |
|        | 5  | .0000 | .0000 | .0008 | .0050 | .0165 | .0389 | .0735 | .1024 | .1181 | .1672 | .2128 | .2408 | .2461 |
|        | 6  | .0000 | .0000 | .0001 | .0006 | .0028 | .0087 | .0210 | .0341 | .0424 | .0743 | .1160 | .1542 | .1641 |
|        | 7  | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0003 | .0012 | .0039 | .0073 | .0098 | .0212 | .0407 | .0635 | .0703 |
|        | 8  | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0004 | .0009 | .0013 | .0035 | .0083 | .0153 | .0176 |
|        | 9  | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0001 | .0003 | .0008 | .0016 | .0020 |
| 10     | 0  | .9044 | .5987 | .3487 | .1969 | .1074 | .0563 | .0282 | .0173 | .0135 | .0060 | .0025 | .0012 | .0010 |
|        | 1  | .0914 | .3151 | .3874 | .3474 | .2684 | .1877 | .1211 | .0867 | .0725 | .0403 | .0207 | .0114 | .0098 |
|        | 2  | .0042 | .0746 | .1937 | .2759 | .3020 | .2816 | .2335 | .1951 | .1757 | .1209 | .0763 | .0495 | .0439 |
|        | 3  | .0001 | .0105 | .0574 | .1298 | .2013 | .2503 | .2668 | .2601 | .2522 | .2150 | .1665 | .1267 | .1172 |
|        | 4  | .0000 | .0010 | .0112 | .0401 | .0881 | .1460 | .2001 | .2276 | .2377 | .2508 | .2384 | .2130 | .2051 |
|        | 5  | .0000 | .0001 | .0015 | .0085 | .0264 | .0584 | .1029 | .1366 | .1536 | .2007 | .2340 | .2456 | .2461 |
|        | 6  | .0000 | .0000 | .0001 | .0012 | .0055 | .0162 | .0368 | .0596 | .0689 | .1115 | .1596 | .1966 | .2051 |
|        | 7  | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0008 | .0031 | .0090 | .0163 | .0212 | .0425 | .0746 | .1080 | .1172 |
|        | 8  | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0004 | .0014 | .0030 | .0043 | .0106 | .0229 | .0389 | .0439 |
|        | 9  | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0003 | .0005 | .0016 | .0042 | .0083 | .0098 |
|        | 10 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0003 | .0008 | .0010 |