

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

Criterios de Avaliación

Só puntúan as tres primeiras preguntas respondidas

1. Álgebra.

- a) 1 punto
- b) 1 punto
- c) 1,33 puntos

2. Álgebra.

- a) 1,5 puntos
- b) 1,5 puntos
- c) 0,33 puntos

3. Análise.

- a) 1,83 puntos
- b) 1,5 puntos

4. Análise.

- a) 1 punto
- b) 2,33 puntos

5. Estatística e Probabilidade.

- a) 1 punto
- b) 1 punto
- c) 1,33 puntos

6. Estatística e Probabilidade.

- a) 1,83 puntos
- b) 1,5 puntos

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 1. Álgebra. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule os valores de a para os cales a matriz A ten inversa

A matriz A ten inversa $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A) = 2 - 3a$$

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow a = 2/3$$

Polo tanto, a matriz A ten inversa para tódolos valores de a distintos de $2/3$

b) Para $a=1$, calcule, se é posible, a inversa da matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = 2 - 3 = -1 \rightarrow \text{Adj}(A) = A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (1/\det(A)) \cdot (A^*)^t \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

c) Exprese en forma matricial o sistema de ecuacións seguinte e resólvao

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (A \cdot X = B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $x=2, y=-1, z=-1$

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 2. Álgebra. Un barco pesqueiro dedícase a captura de xurelo e xarda. As normas sobre cotas son: As capturas totais non poden exceder de 30 toneladas(Tm); a cantidade de xurelo como máximo pode triplicar a de xarda e a cantidade de xarda non pode superar as 18 Tm.

Se o prezo o que vende o xurelo é de 5 €/kg e o da xarda é de 6€/kg

a) **Formule e resolva o problema que determina as cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar os ingresos, cumprindo as normas.**

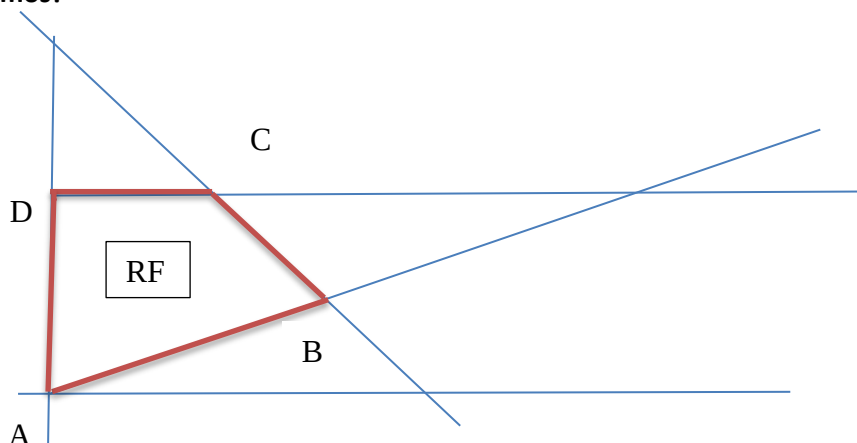
x: nº de Kg de xurelo capturados ; y: nº de Kg de xarda capturados

Restricións:

$$\left. \begin{array}{l} x+y \leq 30000 \\ y \leq 18000 \\ x \leq 3y \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

Función a optimizar, $\max f(x, y) = 5x + 6y$

b) **Represente graficamente a rexión factible e indique os seus vértices. A canto ascenden os ingresos máximos?**



Vértices:

A: $x=0$ **A (0,0)** B: $x=3y$ **B (22500, 7500)** C: $y=18000$ **C (12000, 18000)**
 $y=0$ $x+y=30000$ $x+y=30000$
D: $x=0$ **D (0, 18000)**
 $y=18000$

$f(A)=0$; $f(B)= 157500$; **$f(C)=168000$ (Máximo)**; $f(D)=420000$

f alcanza o seu máximo no vértice C (12000, 18000)

Os máximos ingresos ascenden a 168000 euros e para elo deben capturar 12000Kg de xurelo e 18000 de xarda.

c) **Cumpriría as normas sobre cotas pesqueiras se captura 20 Tm de xurelo e 6 Tm de xarda? Explique a súa resposta.**

$x=20000$

$y=6000$ verifican as dúas primeiras restricións pero non verifican a terceira ($x \leq 3y$)

Non cumpriría as normas sobre cotas pesqueiras se captura 20 Tm de xurelo e 6 Tm de xarda

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 3. Análise. O número de exemplares vendidos dunha revista (en miles de unidades) nos primeiros cinco meses del ano ven dado pola función

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t - 2) & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1 & \text{se } 3 < t \leq 5 \end{cases} \quad \text{onde } t \text{ é o tempo transcorrido en meses}$$

a) Estude o crecemento e decrecemento do número de exemplares vendidos. Calcule en que momentos se produciron o máximo e o mínimo número de ventas e a canto ascenderon.

En (0, 3) $N(t) = -t^2 + 2t + 8 \rightarrow N'(t) = -2t + 2 \rightarrow N'(t) = 0 \rightarrow t = 1$ (punto crítico)

En (0, 1), $N'(t) > 0 \Rightarrow N$ crecente

En (1, 3), $N'(t) < 0 \rightarrow N$ decrecente

En $t_0=1$ máximo relativo: (1, 9) ($N(1)=9$)

En (3, 5) $N'(t) = 2 \rightarrow N'(t) = 0$ non ten solución

En (3, 5), $N'(t) > 0 \Rightarrow N$ crecente

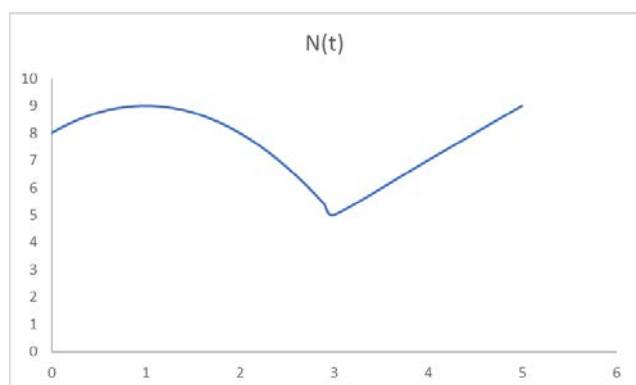
$N(0)=8, N(3)=5, N(3^+)=5, N(5)=9$

O número de exemplares vendidos crece desde o momento inicial ata transcorrido 1 mes e desde transcorridos 3 meses ata transcorridos 5 meses

O máximo número de ventas prodúcese transcorrido 1 mes e tamén transcorridos 5 meses e ascende a 9000 exemplares

O número mínimo de ventas prodúcese transcorridos 3 meses e é de 5 000 exemplares

b) Represente graficamente a función $N(t)$. Calcule a area da rexión delimitada pola gráfica da función $N(t)$, o eixe de abscisas e as rectas $t=0$ e $t=5$.



$$\text{Area} = \left| \int_0^3 (-t^2 + 2t + 8) dt \right| + \left| \int_3^5 (2t - 1) dt \right|$$

$$\left| \frac{-t^3}{3} + t^2 + 8t \right|_0^3 + \left| t^2 - t \right|_3^5 = 24 + 14 = 38 \text{ u}^2$$

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 4. Análise. Dada a función $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \neq 0$

a) Calcule os valores do parámetro "a" para que $f(x)$ teña un punto crítico en $x_0=3$.

$$x_0=3, \text{ punto crítico} \Rightarrow f'(3)=0$$

$$f'(x) = 1/a - a/x^2 \rightarrow f'(3) = 1/a - a/9 = 0 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

Os valores do parámetro "a" para os que $f(x)$ ten un punto crítico en $x_0=3$ son $a=3$ e $a=-3$

b) Para $a=3$, estude o crecemento e decrecemento da función e os seus máximos e mínimos, se existen. Estude tamén os seus intervalos de concavidade e convexidade e os seus puntos de inflexión, se existen.

$$f(x) = x/3 + 3/x, x \neq 0$$

$$f'(x) = 1/3 - 3/x^2 \rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \text{ puntos críticos}$$

$$\text{En } (-\infty, -3), f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ crecente}$$

$$\text{En } (-3, 0), f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ decrecente}$$

$$\text{En } (0, 3), f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ decrecente}$$

$$\text{En } (3, +\infty), f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ crecente}$$

$$x_0=-3 \text{ máximo relativo: } (-3, -2) \quad (f(-3)=-2)$$

$$x_0=3 \text{ mínimo relativo: } (3, 2)$$

$$f''(x) = 6/x^3 \rightarrow f''(x) = 0 \text{ non ten solución}$$

$$\text{En } (-\infty, 0), f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ cóncava}$$

$$\text{En } (0, +\infty), f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ convexa}$$

Non existen puntos de inflexión

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 5. Estatística e Probabilidade.

Nunha furna A hai 8 bolas verdes e 6 vermellas e noutra furna B hai 4 verdes e 5 vermellas. Lánzase un dado e se sae un número menor que 3 sácase unha bola da furna A e se sae un número maior ou igual a 3 sácase a bola da furna B. Extraese unha bola o chou,

a) Calcule a probabilidade de que a bola extraída sexa vermella

Sucesos: A= sacar unha bola da furna A

B= sacar unha bola da furna B

V= bola verde

R= bola vermella

$P(A)=P(\text{menos de 3 no lanzamento do dado})=2/6$

$P(B)=P(3 \text{ ou mais no lanzamento do dado})=4/6$

$P(\text{bola vermella})= P(R)= P(R | A) \cdot P(A) + P(R | B) \cdot P(B) = (6/14) \cdot (2/6) + (5/9) \cdot (4/6) = 97/189$

b) Sabendo que se extraeu unha bola verde, cal é a probabilidade de que saíra da furna A?

$$P(A | V) = \frac{P(V | A) \cdot P(A)}{P(V)} = \frac{P(V | A) \cdot P(A)}{P(V | A) \cdot P(A) + P(V | B) \cdot P(B)} = \frac{(8/14) \cdot (2/6)}{(8/14) \cdot (2/6) + (4/9) \cdot (4/6)} = 9/23$$

c) Son independentes os sucesos “extraer bola vermella” e “a bola procede da furna A “ ?

Os sucesos R e A son independentes se $P(R \cap A) = P(R) \cdot P(A)$ ou se $P(R | A) = P(R)$ ou se $P(A | R) = P(A)$,.....

Como $P(R \cap A) = P(R | A) \cdot P(A) = (6/14) \cdot (2/6) = 1/7$

$P(A) = 2/6 = 1/3$

$P(R) = 97/189$

$P(R) \cdot P(A) = (1/3) \cdot (97/189) \neq 1/7 = P(R \cap A)$

Os sucesos “extraer bola vermella” e “a bola procede da furna A “ non son sucesos independentes

(Tamén podemos resolver o exercicio a través de unha táboa ou un diagrama de árbore)

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 6. Estatística e Probabilidade.

O salario(en €) dos traballadores dunha empresa distribúese normalmente con desviación típica $\sigma=300$ €. Preguntouse a 36 traballadores elixidos ó chou, e estableceuse que o salario medio dos traballadores da empresa oscila entre 1552€ e 1748€.

a) Cal foi o salario medio dos traballadores da mostra?

X = salario dos traballadores

$\sigma=300$, $n=36$

I.C para μ = salario medio: $(\hat{\mu} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})_{1-\alpha}$

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1552 \text{ e } \left(\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1748 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1552+1748}{2} = 1650 \text{ €}$$

O salario medio dos traballadores da mostra foi de 1650 €

Con que nivel de confianza se estableceu o intervalo anterior?

$$e = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 1748-1552 = z_{\alpha/2} \frac{300}{\sqrt{36}}$$

$$98 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot 50 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow 1 - \alpha = 0,95$$

O nivel de confianza co que se estableceu o intervalo e do 95%

b) Se o salario medio dos traballadores da empresa é $\mu=1650$ €, cal é a probabilidade de que o salario medio de mostras de 36 traballadores sexa superior a 1590€?

$$\bar{X} \rightarrow N(\mu=1650, \sigma=\frac{300}{\sqrt{36}}) = N(1650, 50)$$

$$P(\bar{X} > 1590) = P\left(Z > \frac{1590-1650}{50}\right) = P(Z > -1,2) = P(Z < 1,2) = 0,8849$$

A probabilidade de que o salario medio de mostras de 36 traballadores sexa superior a 1590€ é 0,8849