

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

Criterios de Avaliación

Só puntúan as tres primeiras preguntas respondidas

1. Álgebra.

- a) 1 punto
- b) 2,33 puntos

2. Álgebra.

- a) 1 punto
- b) 1,5 puntos
- c) 0,83 puntos

3. Análise.

- a) 2 puntos
- b) 0,33 puntos
- c) 1 punto

4. Análise.

- a) 1 punto
- b) 2 puntos
- c) 0,33 puntos

5. Estatística e Probabilidade.

- a) 1,33 puntos
- b) 1 punto
- c) 1 punto

6. Estatística e Probabilidade.

- a) 2 puntos
- b) 1,33 puntos

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 1. Álgebra.

Dadas as matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule a matriz A^t (sendo A^t a matriz trasposta de A) e calcule a matriz $A \cdot B$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2+3 & -1+3 \\ 2-1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calcule a matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumpre $A \cdot B \cdot X = C + I$ onde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I a matriz identidade 2×2 .

$$A \cdot B \cdot X = C + I \Rightarrow X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (C + I)$$

$$(C + I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(A \cdot B) = -5 \quad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Adj}(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos } X = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ou ben resolvendo o sistema,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2c = 2 \\ 3b + 2d = -2 \\ a - c = 0 \\ b - d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2/5 \\ b = -2/5 \\ c = 2/5 \\ d = -2/5 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

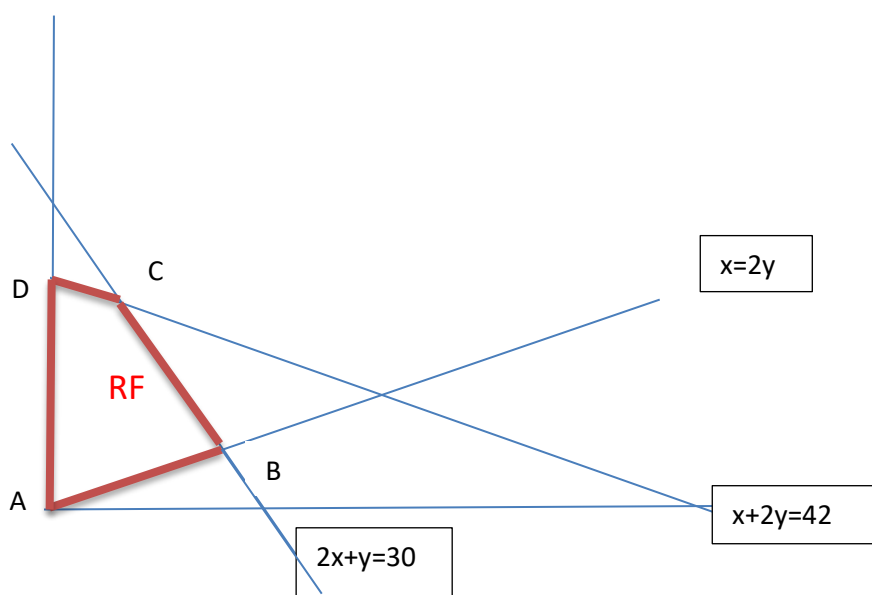
EXERCICIO 2. Álgebra. Un grupo empresarial desexa crear unha rede de produción formada por plantas de dous tipos: A e B. Cada planta de produción A xeraría uns custos mensuais de 1.000 euros e necesitaría 8 empregados para o seu funcionamento, mentres que cada planta de produción B xeraría uns custos mensuais de 2.000 euros e necesitaría 4 empregados. O número de plantas de produción A non deberá superar ó dobre das de tipo B. Ademais, os custos mensuais desta rede de produción non deben superar os 42.000 euros e tampouco debe supoñer a contratación de máis de 120 empregados.

a) **Formule o sistema de inecuacións asociado ó problema.**

x: nº de plantas tipo A ; y: nº de plantas tipo B

$$\text{Restricións: } \begin{cases} 1000x + 2000y \leq 42000 \\ 8x + 4y \leq 120 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y \leq 42 \\ 2x + y \leq 30 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

b)



Vértices:

$$\begin{array}{llll} \text{A: } \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=2y \end{array} \right\} \text{ A (0,0)} & \text{B: } \left. \begin{array}{l} x=2y \\ 2x+y=30 \end{array} \right\} \text{ B (12, 6)} & \text{C: } \left. \begin{array}{l} 2x+y=30 \\ x+2y=42 \end{array} \right\} \text{ C (6, 18)} & \text{D: } \left. \begin{array}{l} x+2y=42 \\ x=0 \end{array} \right\} \text{ D (0,21)} \end{array}$$

c) Se se sabe que cada planta de produción A xeraría uns beneficios mensuais de 24.000 euros e cada planta de produción B de 20.000 euros, cantas plantas de produción de cada tipo deberían formar a rede para que os beneficios mensuais sexan máximos?

función a optimizar, $f(x, y) = 24000x + 20000y$

$$f(A) = 0$$

$$f(B) = 408000$$

$$f(C) = 504000 \text{ (Máximo)}$$

$$f(D) = 420000$$

f alcanza o seu máximo no vértice C (6, 18)

Deben formarse 6 plantas de tipo A e 18 plantas de tipo B para maximizar os beneficios.

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II**EXERCICIO 3. Análise.**

O volume de auga (en millóns de litros) almacenado nun embalse ao longo dun período de 11 anos en función do tempo t (en anos) vén dado pola función $V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000$, $0 \leq t \leq 11$

a) Determine os períodos de crecemento e decrecemento da auga almacenada.

$$V'(t) = 3t^2 - 48t + 180 \rightarrow V'(t) = 0 \rightarrow t = 6 \text{ e } t = 10 \text{ (puntos críticos)}$$

En $(0, 6)$, $V'(t) > 0 \rightarrow V$ crecente

En $(6, 10)$, $V'(t) < 0 \rightarrow V$ decrecente

En $(10, 11)$, $V'(t) > 0 \rightarrow V$ crecente

A auga almacenada crece desde o momento inicial ata transcorridos 6 anos e desde transcorridos 10 anos ata transcorridos 11 anos.

A auga almacenada decrece desde transcorridos 6 anos ata transcorridos 10 anos.

b) Calcule a cantidade de auga almacenada no último ano ($t = 11$).

$$V(11) = 11^3 - 24 \times 11^2 + 180 \times 11 = 8407$$

A cantidade auga almacenada no último ano e de 8407 millóns de litros.

c) Calcule o ano do período no que o volume almacenado foi máximo e o volume máximo que tivo o embalse ao longo dese período.

$t_0 = 6$ e un máximo relativo

$$V(6) = 6^3 - 24 \times 6^2 + 180 \times 6 = 8432$$

$$V(11) = 8407$$

$t_0 = 6$ e un máximo absoluto

O máximo almacenamento de auga prodúcese no sexto ano e ascende a 8432 millóns de litros.

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 4. Análise.

Os beneficios obtidos durante o primeiro ano (en centos de euros) por un establecemento dedicado ó reparto de comida a domicilio veñen dados pola función

$$B(t) = t(t-a)^2, \quad 0 \leq t \leq 12$$

onde t é o tempo transcorrido en meses desde a apertura do establecemento.

a) Calcule o valor do parámetro a tendo en conta que $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$.

$$B'(t) = (t-a)^2 + 2t(t-a) = (t-a)(3t-a)$$

$$B''(t) = (3t-a) + 3(t-a) = 6t - 4a; \quad B''(6) = 0 \rightarrow 36 - 4a = 0 \rightarrow a = 9$$

b) Para $a = 9$, cal foi o maior beneficio obtido? En que momento ou momentos se produciu? Xustifique as respostas.

$$B(t) = t(t-9)^2; \quad B'(t) = (t-9)^2 + 2t(t-9) = (t-9)(3t-9); \quad B'(t) = 0 \rightarrow t=9, t=3 \text{ (puntos críticos)}$$

En $(0, 3)$, $B'(t) > 0 \rightarrow B$ crecente

En $(3, 9)$, $B'(t) < 0 \rightarrow B$ decrecente

En $(9, 12)$, $B'(t) > 0 \rightarrow B$ crecente

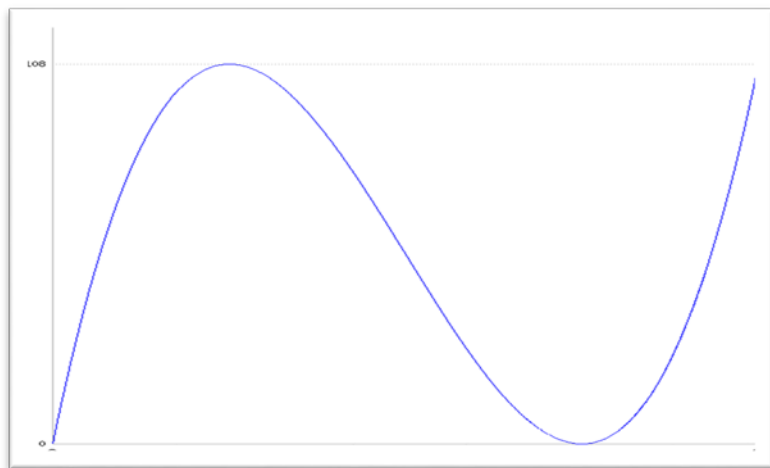
$t_0 = 3$ e un máximo relativo : $(3, 108)$ ($B(3) = 108$)

$t_0 = 9$ e un mínimo relativo : $(9, 0)$ ($B(9) = 0$)

$t=0 \rightarrow B(0) = 0$; $t=12 \rightarrow B(12) = 108$

O maior beneficio obtido foi de 10800€ e prodúcese transcorridos 3 meses e transcorridos 12 meses desde a apertura do establecemento.

c) Para $a = 9$, represente a gráfica da función $B(t)$ tendo en conta a información anterior e o estudo dos seus intervalos de crecemento e decrecemento.



MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II**EXERCICIO 5. Estatística e Probabilidade.**

Nunha cidade, o 70% da poboación recibe publicidade dun establecemento, dos cales un 90% realiza algunha compra en devandito establecemento. Tamén se sabe que dos que non reciben publicidade, un 60% realiza algunha compra en devandito establecemento.

a) Que porcentaxe da poboación da cidade realiza algunha compra nese establecemento?

Sucesos: P= recibe publicidade e C= realiza algunha compra

Datos: $P(P) = 0,7 \rightarrow P(\bar{P}) = 0,3$

$P(C|P) = 0,9$; $P(C|\bar{P}) = 0,6$

$P(C) = P(C|P) \cdot P(P) + P(C|\bar{P}) \cdot P(\bar{P}) = 0,9 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3 = 0,81$

O 81% da poboación da cidade realiza algunha compra nese establecemento

b) Se eliximos unha persoa ao azar que realizou algunha compra nese establecemento, cal é a probabilidade de que recibise publicidade do mesmo?

$$P(P|C) = \frac{P(C|P) \cdot P(P)}{P(C)} = \frac{0,9 \cdot 0,7}{0,81} = \frac{7}{9} = 0,777$$

Se eliximos unha persoa ao azar que realizou algunha compra nese establecemento, a probabilidade de que recibise publicidade do mesmo é $0,777 = 7/9$

c) Son independentes os sucesos “realizar algunha compra nese establecemento” e “recibir publicidade do mesmo”? Xustifique a resposta.

Os sucesos P e C son independentes se $P(P \cap C) = P(P) \cdot P(C)$ ou se $P(P|C) = P(P)$ ou se $P(C|P) = P(C)$,.....

Como $P(P \cap C) = P(C|P) \cdot P(P) = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63$

e $P(P) \cdot P(C) = 0,7 \cdot 0,81 \rightarrow P(P \cap C) \neq P(C|P) \cdot P(P)$

Os sucesos “realizar algunha compra nese establecemento” e “recibir publicidade do mesmo” non son sucesos independentes

(Tamén podemos resolver o exercicio a través de unha táboa ou un diagrama de árbore)

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 6. Estatística e Probabilidade.

Nunha mostra aleatoria de 120 empresas inspeccionadas, de entre as visitadas un ano polos inspectores de traballo dunha provincia, sancionouse a 30 delas.

a) Calcule, con un nivel de confianza do 90%, un intervalo de confianza para a proporción de empresas sancionadas pola Inspección de Traballo.

p = proporción de empresas sancionadas

O intervalo de confianza para p e da forma $(\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})_{1-\alpha}$

$$\hat{p} = \frac{30}{120} = 0,25$$

Nivel de confianza : $90\% \rightarrow 1-\alpha = 0,9 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$

Calculamos o intervalo

$$(0,25 - 1,645 \sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{120}} ; 0,25 + 1,645 \sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{120}}) = (0,25 - 0,065 ; 0,25 + 0,065) = (0,185 ; 0,315)$$

o I.C ao 90%, para a proporción de empresas sancionadas pola Inspección de Traballo e

$$(0,185 ; 0,315)) \Leftrightarrow (18,5\%; 31,5\%)_{90\%}$$

b) Se ignoramos os datos iniciais e cun nivel de confianza do 95%, cal é o tamaño mínimo da mostra necesaria para estimar a proporción de empresas sancionadas cun erro máximo do 2%?

$$e = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0,02$$

Como $\hat{p}$ e descoñecido consideramos $\hat{p} = 0,5$

Nivel de confianza : $95\% \rightarrow 1-\alpha = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$1,96 \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{n}} \leq 0,02 \Rightarrow \frac{1,96 \times 0,5}{0,02} \leq \sqrt{n} \Rightarrow n \geq 2401$$

O tamaño mínimo da mostra para estimar dita proporción cun erro máximo do 2% e un nivel de confianza do 95% debe ser de 2401 empresas.