

ABAU 2023
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

1. Números e Álgebra (2 puntos)

a) **0.75** puntos: **0.25** por despxar A , **0.25** por calcular B^{-1} , **0.25** por calcular A .

Se se pensa en A como unha matriz incógnita $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: **0.5** por chegar ao sistema, **0.25** pola solución.

b) **1.25** puntos: **0.25** polo cálculo de $\det(A - 3I)$, **0.25** por deducir que $x = 0$, **0.25** por calcular A^{-1} , **0.25** por chegar a $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} z+1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix}$, **0.25** pola conclusión.

2. Números e Álgebra (2 puntos)

0.5 por resolver $\det A = 0$, **0.5** por cada un dos tres casos.

Se se fai por Gauss, **1.25** por chegar ao sistema triangular equivalente, **0.25** por cada un dos tres casos.

3. Análise (2 puntos)

a) **1** punto: **0.5** polo teorema de Rolle e **0.5** polo teorema do valor medio.

b) **1** punto: **0.5** por dicir que a función é continua no cerrado e derivable no aberto e **0.5** por obter o valor de c .

4. Análise (2 puntos)

a) **1** punto: **0.5** por cada unha das dúas integrais, feitas mediante cambio de variable.

b) **1** punto: **0.5** pola primeira parte (integración por partes); **0.5** pola segunda parte, co seguinte reparto: **0.25** por chegar a $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = (1/2)(\ln B)^2 - 1/2$, **0.25** polo cálculo de B .

5. Xeometría (2 puntos)

- a) **1.5** puntos: **0.5** pola posición relativa, **0.5** polo valor de a que fai que $r \perp \pi$, **0.5** por razoarmos que r non pode estar contida en π .
- b) **0.5** puntos.

6. Xeometría (2 puntos)

- a) **1** punto: **0.5** polo punto de corte, **0.5** polo cálculo da distancia.
- b) **1** punto: **0.25** polas ecuacións da recta r perpendicular a π que pasa por P , **0.25** pola obtención de $Q = r \cap \pi$, **0.5** por determinar o punto simétrico.

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) **1** punto: **0.25** por obter $P(A|B)$, **0.25** por razoarmos que C e D non poden ser incompatibles, **0.25** por calcular $P(E \cup F)$ e **0.25** por calcular $P(E \cap \bar{F})$.
- b) **1** punto: **0.25** pola definición da variable e por dicir que é binomial, **0.25** pola fórmula da binomial, **0.5** polo resultado.

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

1 punto pola primeira parte, repartido do seguinte xeito: **0.25** por tipificar, **0.25** por chegar a $P(-1.33 \leq Z \leq -0.20)$, **0.25** por chegar a $P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.20)$, **0.25** polo cálculo da probabilidade pedida.

1 punto pola segunda parte, repartido do seguinte xeito: **0.25** pola formulación do problema, **0.5** por chegar a $P\left(Z < \frac{123.6-t}{17.8}\right) = 0.67$, **0.25** pola obtención de t .

MATEMÁTICAS II

1.

1.a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1}$.

Como $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, temos que $\det B = 1 + 1 = 2$ e, polo tanto,

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix},$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} c-d=0 \\ c+d=1 \end{cases} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} 2a=3 \\ b=2-a \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2c=1 \\ c=d \end{cases} \right]$$

$$\Leftrightarrow [a = 3/2, \quad b = 1/2, \quad c = 1/2 \quad \text{e} \quad d = 1/2].$$

Logo

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

1.b) Como $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, sabemos que $\det A = 3z - xy \neq 0$.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z - 3 \end{pmatrix}.$$

Ao ser $\det(A - 3I) = -xy = 0$ e $y \neq 0$, necesariamente ten que ser $x = 0$. En consecuencia, tamén teremos $z \neq 0$, porque $\det A = 3z - xy = 3z \neq 0$. Neste punto, sábese que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

con y e z non nulos. Obteremos os valores de y e z da igualdade

$$(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Posto que $\det A = 3z$,

$$A^{-1} = \frac{1}{3z} \begin{pmatrix} z & -y \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3z} \begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & 3 \end{pmatrix},$$

conque

$$(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} z+1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

de onde se deduce que $y = 1$ e $z = 1$.

En resumo, **os valores pedidos son $x = 0$, $y = 1$ e $z = 1$** . Equivalentemente,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA (que evita o cálculo da inversa):

Procédase como na resolución anterior ata chegar a que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ con y e z non nulos. Agora nótese que a igualdade $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ implica que $(3z)A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Polo tanto,

$$\begin{pmatrix} 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} = (3z)I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3+3y & 3z \end{pmatrix},$$

de onde $y = 1$ e $z = 1$.

MATEMÁTICAS II

2.

$$\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ m+1 \\ m \end{array} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & m-2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ m \\ m-1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{F_3 - mF_2} \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ m \\ -m^2 + m - 1 \end{array}.$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} (m+1)x + z = 1, \\ y = m, \\ (m-2)z = -m^2 + m - 1. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{-m^2 + m - 1}{m - 2}, \quad y = m, \quad x = \frac{1 - z}{m + 1}.$$

- Se $m = -1$, o sistema queda

$$\begin{cases} z = 1, \\ y = -1, \\ -3z = -3, \end{cases}$$

que é compatible indeterminado, porque ten as seguintes infinitas solucións:

$$x \in \mathbb{R}, \quad y = -1, \quad z = 1.$$

- Se $m = 2$, o sistema é incompatible, xa que a terceira ecuación queda $0 = -3$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ m+1 \\ m \end{array}.$$
 Sabemos que

$$\text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

MATEMÁTICAS II

$$\det A = \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= (m+1)(m-1+m-1-m) = (m+1)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 2\}.$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible determinado**.

- **Caso $m = -1$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right)$. Ao ser

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 1 = 0, \text{ tense que } \text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 =$$

n.º de incógnitas, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.

- **Caso $m = 2$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 -$

$2 - 2 = 5 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a)

Teorema de Rolle: se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , e tal que $f(a) = f(b)$, entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema do valor medio: se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) , entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

3.b) A función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, é claramente continua en $[0, 1]$. Ademais,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

conque f é derivable en $(0, 1)$.

Logo **f si que está nas hipóteses do teorema do valor medio**, polo que ten que existir algún $c \in (0, 1)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(c)(1 - 0)$.

Ao ser $f(1) = 0$ e $f(0) = 1$, estamos a dicir que $f'(c) = -1$ para algún $c \in (0, 1)$.

Neste caso haberá un único valor posible para c , o cal se pode obter do seguinte xeito:

$$f'(c) = -1 \Leftrightarrow \frac{-c}{\sqrt{1 - c^2}} = -1 \Leftrightarrow c = \sqrt{1 - c^2} \Leftrightarrow [c^2 = 1 - c^2 \quad \text{e} \quad c > 0]$$

$$\Leftrightarrow [2c^2 = 1 \quad \text{e} \quad c > 0] \Leftrightarrow [c^2 = 1/2 \quad \text{e} \quad c > 0] \Leftrightarrow c = \sqrt{1/2}.$$

Obsérvese que $c \in (0, 1)$.

MATEMÁTICAS II

4.

4.a)

Facendo o cambio $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$, tense

$$\int (\sin x)^5 \cos x \, dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{(\sin x)^6}{6} + C.$$

Facendo o cambio $u = \ln x$, $du = (1/x) \, dx$, tense

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

4.b)

Primeira parte:

Tomando

$u = \ln x$	$du = \frac{1}{x} \, dx$
$dv = \frac{1}{x} \, dx$	$v = \ln x$

vese que

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} \, dx$$

Logo $2 \int (\ln x)/x \, dx = (\ln x)^2 + K$ e, de aí,

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

Segunda parte:

$$\int_e^B \frac{\ln x}{x} \, dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_e^B = \frac{1}{2}(\ln B)^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (\ln B)^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow (\ln B)^2 = 4.$$

Unha solución sae por tanto de

$$\ln B = 2 \Leftrightarrow B = e^2.$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Temos $\pi: ax + y + z = 1$ e $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$.

- $\vec{n}_\pi(a, 1, 1)$ é normal a π e $\vec{d}_r(2, 3, 3)$ ten a dirección de r . Como

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 2a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -3,$$

a recta é paralela ao plano se $a = -3$ e corta ao plano nun punto se $a \neq -3$.

- Para que r e π sexan perpendiculares, $\vec{n}_\pi(a, 1, 1)$ ten que ser paralelo a $\vec{d}_r(2, 3, 3)$:

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}.$$

- $P(1, 0, -1)$ é un punto de r . Para que r estea contida en π ten que ser $a = -3$ e, á vez, $P \in \pi$, o que non é certo: $-3 + 0 - 1 = -4 \neq 1$. Logo **r non pode estar contida en π .**

5.b) Se $\pi: -3x + y + z = 1$, pídese o valor de b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en π . Xa sabemos polo apartado anterior que $\vec{n}_\pi(-3, 1, 1)$ e $\vec{d}_r(2, 3, 3)$ son perpendiculares, de xeito que r estará contida en π se, e só se, un punto calquera da recta pertence tamén ao plano π . Tomando $P(1, b, -1)$,

$$P(1, b, -1) \in \pi \Leftrightarrow -3 + b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = 5.$$

MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Pídese a distancia de $\pi: 2x - y + z = 1$ ao punto de corte das rectas

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \text{ e } r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0. \end{cases}$$

Podemos dar por feito que r_1 e r_2 se cortan. De $-1 - \lambda = 0$ dedúcese que $\lambda = -1$,
conque o punto de corte é $P(1,0,0)$.

A distancia de $P(1,0,0)$ a $\pi: 2x - y + z - 1 = 0$ é

$$d = \frac{|2 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

6.b) Punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a $\pi: 2x - y + z = 1$:

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(1,0,0)$ e é perpendicular a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(2, -1, 1), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de r con π :

$$2(1 + 2\lambda) + \lambda + \lambda = 6\lambda + 2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{6}.$$

Posto que $x = 1 + 2\lambda = 1 - 1/3 = 2/3$, $y = -\lambda = 1/6$ e $z = \lambda = -1/6$, o punto de
corte é

$$Q\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right).$$

- Punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a $\pi: 2x - y + z = 1$: se chamamos
 $P'(x', y', z')$ ao punto pedido, temos

$$\frac{1 + x'}{2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x' + 3 = 4 \Leftrightarrow x' = \frac{1}{3},$$

$$\frac{y'}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6y' = 2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3},$$

$$\frac{z'}{2} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow 6z' = -2 \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{3},$$

conque

$$P'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

MATEMÁTICAS II

7.

7.a)

- Se $B \subset A$, entón $A \cap B = B$, co cal

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

(Cando se fala de $P(A|B)$, dáse por feito que $P(B)$ non é 0.)

- Se $P(C) = 0.5$ e $P(D) = 0.6$, entón **C e D non poden ser incompatibles**, xa que, se o fosen, $P(C \cap D)$ sería igual a 0 e, consecuentemente,

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = P(C) + P(D) = 0.5 + 0.6 = 1.1$$

sería maior que 1, o que non é posible.

- Pídense $P(E \cup F)$ e $P(E \cap \bar{F})$ se E e F son independentes, $P(E) = 0.3$ e $P(F) = 0.2$.

○ $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.5 - P(E \cap F)$. Por ser E e independentes, $P(E \cap F) = P(E)P(F) = 0.06$, co cal **$P(E \cup F) = 0.44$** .

○ Da igualdade $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F})$ obtense

$$P(E \cap \bar{F}) = P(E) - P(E \cap F) = 0.3 - 0.06 = \mathbf{0.24}.$$

Ou, doutro xeito, **$P(E \cap \bar{F}) = P(E)P(\bar{F}) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$** , xa que E e $\bar{F}$ son independentes ao selo E e F .

7.b)

X = “n.º de seises obtidos nas sete tiradas”.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 7$ e $p = 1/6$ (logo $q = 1 - p = 5/6$).

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5^5}{(2!) \cdot 6^7} = \frac{7 \cdot 5^5}{2 \cdot 6^6} = \frac{21875}{93312} \approx 0.2344.$$

MATEMÁTICAS II

8. X = “tensión arterial sistólica en mmHg”.

$$X \rightarrow N(123.6, 17.8) \Rightarrow Z = \frac{X - 123.6}{17.8} \rightarrow N(0, 1).$$

- $P(100 \leq X \leq 120) = P\left(\frac{100-123.6}{17.8} \leq Z \leq \frac{120-123.6}{17.8}\right) \approx P(-1.33 \leq Z \leq -0.20) = P(0.20 \leq Z \leq 1.33) = P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.20) \approx 0.9082 - 0.5793 = \mathbf{0.3289}$ é a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg.

- Pídese tamén o valor de t tal que $P(X > t) = 0.67$. Ao ser 0.67 maior que 0.5, é claro que t terá que ser menor que a media 123.6. Entón

$$P(X > t) = P\left(Z > \frac{t - 123.6}{17.8}\right) = P\left(Z < \frac{123.6 - t}{17.8}\right) = 0.67.$$

Indo á táboa da normal vese que

$$\frac{123.6 - t}{17.8} \approx 0.44,$$

de onde

$$t \approx 123.6 - 17.8 \cdot 0.44 = \mathbf{115.768}.$$