

ABAU 2023
CONVOCATORIA ORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, pero, nalgúns casos, pode haber outras formas correctas de solucionarlos.

1. Números e Álgebra (2 puntos)

0.75 por despegar X , **0.5** por chegar a $B = -I$, **0.5** por calcular $(A - B)^{-1}$, **0.25** por concluír.

2. Números e Álgebra (2 puntos)

0.5 por resolver $\det A = 0$, **0.5** polo estudo de cada un dos tres casos.

Se se fai por Gauss, **1.25** por chegar ao sistema triangular equivalente, **0.25** por cada un dos tres casos.

3. Análise (2 puntos)

a) **1** punto:

0.25 por ver que $b = -a$, **0.75** por chegar a $a = 3$.

b) **1** punto:

0.5 por comprobar que non hai extremos e que hai un punto de inflexión en $x = \pi$, **0.5** por esbozar a gráfica.

4. Análise (2 puntos)

0.5 pola formulación, **0.5** polo cálculo da primitiva, **0.5** polo resultado, **0.5** polo debuxo da rexión.

5. Xeometría (2 puntos)

a) **1** punto: **0.5** polas ecuacións da recta, **0.5** pola ecuación do plano.

b) **1** punto.

6. Xeometría (2 puntos)

a) **1** punto: **0.25** pola recta perpendicular, **0.25** polo punto de corte, **0.5** polo cálculo do punto simétrico.

b) **1** punto: **0.5** pola posición relativa, **0.5** polo punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

a) **1** punto: **0.25** por cada unha das catro probabilidades que se piden.

b) **1** punto: **0.5** por cada unha das dúas probabilidades que se piden.

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

a) **1** punto:

0.5 por chegar a $P(X \geq 55) \approx P(\tilde{X} \geq 54.5)$, con $\tilde{X} \rightarrow N(50,7)$,

0.25 por chegar a $P(Z \geq 0.64)$,

0.25 polo resultado.

b) **1** punto:

0.25 pola formulación,

0.25 por chegar a $P\left(Z < \frac{x-100}{20}\right) = 0.95$,

0.5 pola obtención de x .

MATEMÁTICAS II**1.**Primeira parte:

$$XA = A + XB \Leftrightarrow XA - XB = A \Leftrightarrow X(A - B) = A \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}(\mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1}.$$

Segunda parte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A,$$

$$B = (A^2 - A - I)^{-1} = (-I)^{-1} = -I,$$

$$A - B = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A - B) = 2$,

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(\mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m-4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & -m^2 & 2m-4 & 4-m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + mF_2} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m-4 & 4 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m, \\ my - z = 1, \\ (m-4)z = 4. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{4}{m-4}, \quad y = \frac{1+z}{m}, \quad x = \frac{1+m - (2+m^2)y}{m}.$$

- Se $m = 0$, temos

$$\begin{cases} 2y = 1, \\ -z = 1, \\ -4z = 4, \end{cases}$$

e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$\left[x = \lambda, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = -1 \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Se $m = 4$, o sistema é incompatible, porque a terceira ecuación queda $0 = 4$.

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+m \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2+m^2 & 0 \\ m & -1 \end{vmatrix} = -(2+m^2) \neq 0$, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{vmatrix} = m^2(2m-4) - m(2+m^2) + 2m \\ &= m\{m(2m-4) - (2+m^2) + 2\} = m\{2m^2 - 4m - 2 - m^2 + 2\} = m(m^2 - 4m) \\ &= m^2(m-4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 4\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 2 + 8 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $m = 4$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 20 - 16 = -16 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a) Se $f(x) = ae^x + b$, obteña os valores de a e b para que se cumpran $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$:

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a.$$

$$f(x) = ae^x - a.$$

Podemos excluír do estudo o caso $a = 0$ (xa que entón f é a función nula e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = 0$).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - a}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} ae^x = a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \Leftrightarrow a = 3.$$

En definitiva, **os valores pedidos son $a = 3$, $b = -3$.**

MATEMÁTICAS II

3.b) Estude se a función $f(x) = x + \sin x$ ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo $(0, 2\pi)$, diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de f nese intervalo:

$$f(x) = x + \sin x, \quad f'(x) = 1 + \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi.$$

$$f''(\pi) = -\sin \pi = 0, \quad f'''(\pi) = -\cos \pi = -1 \neq 0,$$

polo que **o punto de abscisa $x = \pi$ é un punto de inflexión de f** . Non hai outros puntos de inflexión, xa que f'' non se anula en ningún outro punto do intervalo $(0, 2\pi)$. Non hai extremos, xa que o único punto crítico resultou ser punto de inflexión.

Para a representación gráfica, pensamos na función estendida a $[0, 2\pi]$. Tense que:

$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = \pi, \quad f(2\pi) = 2\pi,$$

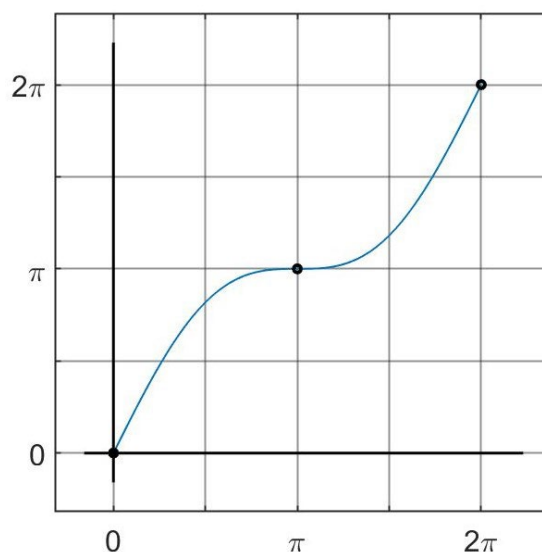
$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \forall x \in (0, 2\pi) \quad (f \text{ é non decrecente en } (0, 2\pi)).$$

De feito, f é crecente en $(0, 2\pi)$, xa que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$ e $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (\pi, 2\pi)$,

$$f''(x) = -\sin x < 0 \quad \forall x \in (0, \pi) \quad (f \text{ é cóncava en } (0, \pi)),$$

$$f''(x) = -\sin x > 0 \quad \forall x \in (\pi, 2\pi) \quad (f \text{ é convexa en } (\pi, 2\pi)).$$

Polo tanto, a gráfica de f é a que se mostra na seguinte figura:

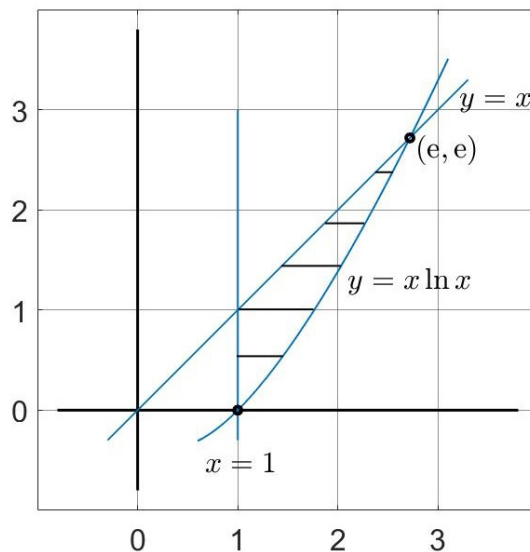


MATEMÁTICAS II

4. Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Faga un esbozo gráfico da rexión.

$$f(x) = x \ln x, \quad f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x, \quad f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Na zona de interese ($x \geq 1$), f é crecente e convexa, porque tanto f' como f'' son positivas. Como $f(1) = 0$ e $f(e) = e$, a situación é a do debuxo seguinte, no que se raia a rexión cuxa área hai que calcular:



O valor do límite superior ($x = e$) tamén pode obterse do xeito seguinte:

$$x = x \ln x \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

A área pedida é

$$A = \int_1^e (x - x \ln x) dx = \int_1^e x(1 - \ln x) dx.$$

Facendo partes coas eleccións

$$\begin{aligned} u &= 1 - \ln x & du &= -\frac{1}{x} dx \\ dv &= x dx & v &= \frac{1}{2} x^2 \end{aligned}$$

tense

$$\int x(1 - \ln x) dx = \frac{1}{2} x^2 (1 - \ln x) + \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 (1 - \ln x) + \frac{1}{4} x^2 + C,$$

co cal

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e x(1 - \ln x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 (1 - \ln x) + \frac{1}{4} x^2 \right]_{x=1}^{x=e} = \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \\ &\approx 1.0973 \text{ u}^2, \end{aligned}$$

onde u indica unidade de lonxitude.

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(2, -1, 0)$ e $Q(3, 0, 0)$ e a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $R(0, 4, -2)$ e é paralelo aos vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$ e $\vec{v}(2, 1, -2)$:

$$\vec{d}_r = \overrightarrow{PQ}(1, 1, 0) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y - 4 & z + 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Como

$$\begin{vmatrix} x & y - 4 & z + 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2(y - 4) + z + 2 + 2(y - 4) + x = x + z + 2,$$

a ecuación do plano é

$$\pi: x + z + 2 = 0.$$

5.b) Ángulo agudo que forma a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ co plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

$$\vec{d}_r(1, 1, 0), \quad \vec{n}_\pi(1, 0, 1).$$

Se α é o ángulo pedido,

$$\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{\|\vec{d}_r\| \|\vec{n}_\pi\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ ou, equivalentemente, } 30^\circ.$$

Nota: $| \quad |$ indica valor absoluto e $\| \quad \|$ indica norma euclidiana en $\mathbb{R}^3$. Ás veces, emprégase a mesma notación para os dous conceptos, posto que $| \quad |$ tamén é a norma euclidiana en $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$\vec{d}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (1, -1, -1).$$

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\|\vec{d}_r \times \vec{n}_\pi\|}{\|\vec{d}_r\| \|\vec{n}_\pi\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ ou, equivalentemente, } 30^\circ.$$

MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Punto simétrico de $P(2, -1, 0)$ con respecto ao plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(2, -1, 0)$ e é perpendicular a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(1, 0, 1), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de r con π :

$$(2 + \lambda) + \lambda + 2 = 2\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Logo o punto de corte é $Q(0, -1, -2)$.

- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x', y', z')$ ao punto,

$$\begin{aligned} \frac{2 + x'}{2} &= 0 \Leftrightarrow x' = -2, \\ \frac{-1 + y'}{2} &= -1 \Leftrightarrow -1 + y' = -2 \Leftrightarrow y' = -1, \\ \frac{z'}{2} &= -2 \Leftrightarrow z' = -4. \end{aligned}$$

Tense logo $P'(-2, -1, -4)$.

6.b) Posición relativa das rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ e $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

- Como $\vec{d}_r(1, 1, 0)$ e $\vec{d}_s(2, 1, -1)$ non son proporcionais ($\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$), non son nin paralelas nin coincidentes, polo que ou ben se cortan, ou ben se cruzan.

- $[P(2, -1, 0) \in r, Q(2, -2, -1) \in s] \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(0, -1, -1)$.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ}, \vec{d}_r \text{ e } \vec{d}_s \text{ son coplanares} \Rightarrow r \text{ e } s \text{ córtanse.}$$

- Punto de corte:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = -1 + \lambda, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s: \begin{cases} x = 2 + 2\mu, \\ y = -2 + \mu, \\ z = -1 - \mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

$$-1 - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -1.$$

Logo o punto de corte é $R(2 - 2, -2 - 1, -1 + 1) = R(0, -3, 0)$.

MATEMÁTICAS II

7.

7.a) Calcular as catro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sabendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A) = 2P(B)$.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.8 = P(A) + \frac{1}{2}P(A) - 0.2 \Rightarrow \frac{3}{2}P(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$.
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \frac{2}{3} = 0.2 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} = 0.4\bar{6}$.
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{\frac{1}{2}P(A)} = \frac{2}{10} : \frac{1}{3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0.6$.
- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{10} : \frac{2}{3} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.3$.

7.b) O = “participar online”, E = “ser europeo”. Sábese que $P(O) = 0.6$, $P(E) = 0.65$ e $P(E|\bar{O}) = 0.8$.

	E	$\bar{E}$	
O	33	27	60
$\bar{O}$	$40 \times 0.8 = 32$	8	40
	65	35	100

Segundo a táboa de continxencia,

$$P(E \cap O) = \frac{33}{100} = 0.33$$

e

$$P(O|E) = \frac{33}{65} \approx 0.5077.$$

ALTERNATIVA para 7.b):

- $0.8 = P(E|\bar{O}) = \frac{P(E \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = \frac{P(E \cap \bar{O})}{0.4} \Rightarrow P(E \cap \bar{O}) = 0.32 \Rightarrow P(E \cap O) = P(E) - P(E \cap \bar{O}) = 0.65 - 0.32 = 0.33$.
- $P(O|E) = \frac{P(O \cap E)}{P(E)} = \frac{0.33}{0.65} \approx 0.5077$.

MATEMÁTICAS II

8.

8.a) Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que ao menos 55 deles cheguen a ras adultas?

X = “n.º de cabezolos que chegan a ras adultas, de entre os 2500”.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 2500$ e $p = 0.02$. Tense logo $q = 1 - p = 0.98$. Pídese $P(X \geq 55)$.

$np = 50$, $nq = 2450$, $npq = 49$, $\sqrt{npq} = 7$. Como $np > 5$ e $nq > 5$, X pode aproximarse por $\tilde{X} \rightarrow N(50, 7)$.

$$Z = \frac{\tilde{X} - 50}{7} \rightarrow N(0, 1).$$

Aplicando a corrección de Yates ou de medio punto,

$$\begin{aligned} P(X \geq 55) &\approx P(\tilde{X} \geq 54.5) = P\left(Z \geq \frac{54.5 - 50}{7}\right) \approx P(Z \geq 0.64) = 1 - P(Z < 0.64) \\ &\approx 1 - 0.7389 = \mathbf{0.2611}. \end{aligned}$$

8.b)

X = “puntuación” $\rightarrow N(100, 20)$, conque $Z = \frac{X - 100}{20} \rightarrow N(0, 1)$. Pídese x tal que $P(X \geq x) = 0.05$.

$$P(X \geq x) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{x - 100}{20}\right) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{x - 100}{20}\right) = 0.95,$$

de onde

$$\frac{x - 100}{20} \approx 1.645 \Rightarrow x - 100 \approx 32.9 \Rightarrow x \approx \mathbf{132.9}.$$