

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$, si A y B son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de m , el sistema
$$\begin{cases} mx + (2 + m^2)y = 1 + m, \\ my - z = 1, \\ mx + 2y + (2m - 4)z = 5. \end{cases}$$

3. Análisis:

- a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.
- b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0, 2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

4. Análisis:

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota:** $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

5. Geometría:

- a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2, -1, 0)$ y $Q(3, 0, 0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0, 4, -2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$ y $\vec{v}(2, 1, -2)$.
- b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

6. Geometría:

- a) Calcule el punto simétrico de $P(2, -1, 0)$ con respecto al plano $\pi: x + z + 2 = 0$.
- b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

- a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$ sabiendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A) = 2P(B)$. **Nota:** $\bar{B}$ es el suceso contrario o complementario de B .
- b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan *online* y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe *online*; luego, la de que participe *online* si se sabe que es europeo.

8. Estadística y Probabilidad:

- a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?
- b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?