

PAU 2026
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

CRITERIOS

O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria**: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartados. Deben xustificarse todas as respostas.

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2 puntos)

1.1. 0.75 puntos, repartidos así:

- 0.25 puntos por chegar a $P(45 \leq X \leq 70) = P(-0.26 \leq Z \leq 1.03)$,
- 0.25 puntos por chegar a $P(Z \leq 1.03) - P(Z < -0.26)$,
- 0.25 puntos por los cálculos finais.

1.2. 1.25 puntos, repartidos así (se A é o suceso “estar na feira menos de 60 minutos” e B “estar na feira polo menos 45 minutos”):

- 0.25 puntos por saber que se pide $P(A|B)$ e por saber que $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$,
- 0.25 puntos por calcular $P(B)$,
- 0.5 puntos por calcular $P(A \cap B)$.
- 0.25 puntos por dar o valor de $P(A|B)$.

PREGUNTA 2. ÁLXEBRA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.

2.1.

2.1.1. 1.25 puntos, repartidos así:

- 0.25 puntos por calcular X,
- 0.25 puntos por calcular Y,
- 0.25 puntos por ver que X é invertible,
- 0.25 puntos por ver que Y non é invertible,
- 0.25 puntos por calcular a inversa de X.

2.1.2. 0.75 puntos.

2.2. 2 puntos, repartidos así:

- 0.5 puntos por resolver $\det(A) = 0$,
- 0.5 puntos polo caso $m \neq -2$.
- 1 punto polo caso $m = -2$ (0.5 polo estudo dos rangos e 0.5 pola conclusión).

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (4 puntos)

Responda dous destes tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. 2 puntos, repartidos así:

- 1 punto por chegar ás catro ecuacións.
- 1 punto por resolver o sistema.

3.2. 2 puntos, repartidos así:

- 1 punto pola gráfica.
- 1 punto polas explicacións.

3.3. 2 puntos, repartidos así:

- 1 punto polo debuxo.
- 1 punto polo cálculo da área.

PREGUNTA 4. XEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 4.1. ou 4.2.

4.1.

4.1.1. 1 punto.

4.1.2. 1 punto, repartido así:

- 0.5 puntos por comprobar que r é paralela a π^* .
- 0.5 puntos por calcular a distancia de r a π^* .

4.2.

4.2.1. 0.75 puntos.

4.2.2. 1.25 puntos, repartidos así:

- 0.5 puntos polo cálculo da recta que pasa por P e é perpendicular a π .
- 0.5 puntos por calcular o punto de corte da recta que pasa por P e é perpendicular a π co plano π .
- 0.25 puntos por calcular o punto simétrico pedido P'' .

PREGUNTA 1

Sexa $X \sim N(50, 19.5)$ a variable aleatoria que representa o tempo, en minutos, que unha persoa pasa na feira, e sexa

$$Z = \frac{X - 50}{19.5}$$

a variable tipificada, de xeito que $Z \sim N(0, 1)$.

1.1.

$$\begin{aligned} P(45 \leq X \leq 70) &= P\left(\frac{-5}{19.5} \leq Z \leq \frac{20}{19.5}\right) = P(-0.26 \leq Z \leq 1.03) \\ &= P(Z \leq 1.03) - P(Z < -0.26) = P(Z \leq 1.03) - 1 + P(Z \leq 0.26) \\ &= 0.8485 - 1 + 0.6026 = \mathbf{0.4511}. \end{aligned}$$

1.2. Chamemos A ao suceso «estar na feira menos de 60 minutos» e B ao suceso «estar na feira polo menos de 45 minutos». Pídese $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

- $P(B) = P(X \geq 45) = P\left(Z \geq \frac{-5}{19.5}\right) = P(Z \geq -0.26) = P(Z \leq 0.26) = 0.6026.$
- $P(A \cap B) = P(45 \leq X < 60) = P\left(\frac{-5}{19.5} \leq Z < \frac{10}{19.5}\right) = P(-0.26 \leq Z < 0.51) =$
 $P(Z < 0.51) - P(Z < -0.26) = P(Z < 0.51) - 1 + P(Z \leq 0.26) = 0.6950 - 1 +$
 $0.6026 = 0.2976.$

Polo tanto, a probabilidade pedida é

$$P(A|B) = \frac{0.2976}{0.6026} = \mathbf{0.4939}.$$

PREGUNTA 2

2.1. Téñense

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1.

$$X = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$Y = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det X = 8 \neq 0 \Rightarrow X$ é invertible.

$\det Y = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \Rightarrow Y$ non é invertible. (Ou ben, $\det Y = 0$ porque Y ten dúas filas iguais.)

A inversa de X é

$$X^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

2.1.2.

$$M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$$BM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix} = M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=a \\ b=b \\ a+c=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b \in \mathbb{R} \text{ calquera} \\ a=0 \end{cases}.$$

É dicir,

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

2.2. Polo método de Gauss, podemos reducir o sistema dado a outro equivalente con matriz triangular, cuxa discusión é sinxela:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & m & 5 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & m & 5 \\ 0 & 0 & m+2 & m-10 \end{pmatrix}.$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} x + (m-2)y + 3z = 2, \\ 2y + mz = 5, \\ (m+2)z = m-10. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \neq -2$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{m-10}{m+2}, \quad y = \frac{5-mz}{2}, \quad x = 2 - (m-2)y - 3z.$$

- Se $m = -2$, temos

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 2, \\ 2y - 2z = 5, \\ 0 = -12, \end{cases}$$

que é claramente incompatible.

2.2. SOLUCIÓN ALTERNATIVA

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{array} \right), \quad A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 2m-2 & m+6 \\ 1 & m-2 & 3 \\ 0 & 2 & 2m+2 \end{array} \right).$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $2 \leq \text{rank}(A) \leq \text{rank}(A^*) \leq 3$ e $[\text{rank}(A) = 2 \Leftrightarrow \det(A) = 0]$. Isto é certo para calquera valor de m .

$$\begin{aligned} \det(A) &= -2 \begin{vmatrix} 2 & m+6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (2m+2) \begin{vmatrix} 2 & 2m-2 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} \\ &= -2(6-m-6) + (2m+2)(2m-4-2m+2) = 2m-4m-4 = -2m-4 \\ &= 0 \Leftrightarrow m = -2. \end{aligned}$$

Polo tanto, o sistema é compatible determinado se $m \neq -2$.

Se $m = -2$, entón $\text{rank}(A) = 2$ e

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 9 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{array} \right).$$

Posto que

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = 2(-21+4) - (-28+18) = -34+10 = -24 \neq 0,$$

$\text{rank}(A^*) = 3 \neq \text{rank}(A) = 2$, e polo tanto o sistema é incompatible se $m = -2$.

PREGUNTA 3

3.1. $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, co cal $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Das igualdades $p'(1) = 0$ e $p(1) = -6$, que se cumpren porque p ten un extremo relativo en $(1, -6)$, sácanse as dúas ecuacións seguintes:

$$3a + 2b + c = 0, \quad (1)$$

$$a + b + c + d = -6, \quad (2)$$

A pendente da recta $y = 4x + 2$ é 4, así que $p'(-1) = 4$, é dicir,

$$3a - 2b + c = 4. \quad (3)$$

Ademais, $y(-1) = -4 + 2 = -2 = p(-1)$, de onde

$$-a + b - c + d = -2. \quad (4)$$

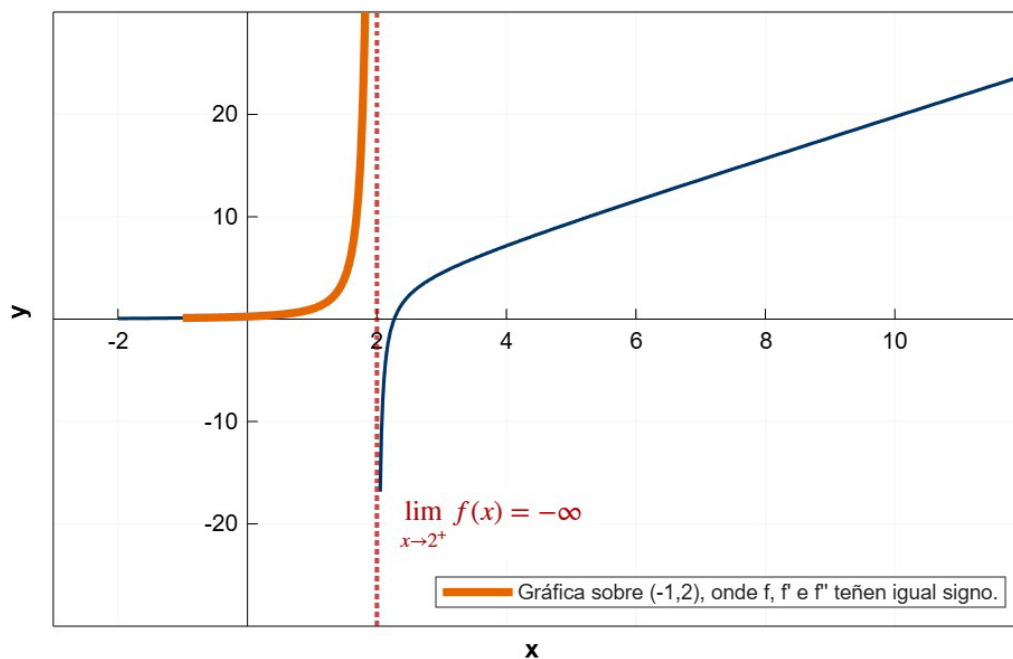
Facendo (1) - (3) vemos que $4b = -4$, conque $b = -1$.

Facendo agora (2) + (4) chégase a $2b + 2d = -8$, é dicir, $b + d = -4$, de onde $d = -3$.

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow 3a + c = 2 \\ (2) \Rightarrow a + c = -2 \end{cases} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2.$$

Por último, $c = -2 - a = -4$.

3.2. Vale, por exemplo,



No intervalo $(-1, 2)$, f é positiva, f' é positiva porque f é crecente e f'' é positiva porque f é convexa.

Ao ser $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$, a recta $x = 2$ é unha asíntota vertical.

3.3.

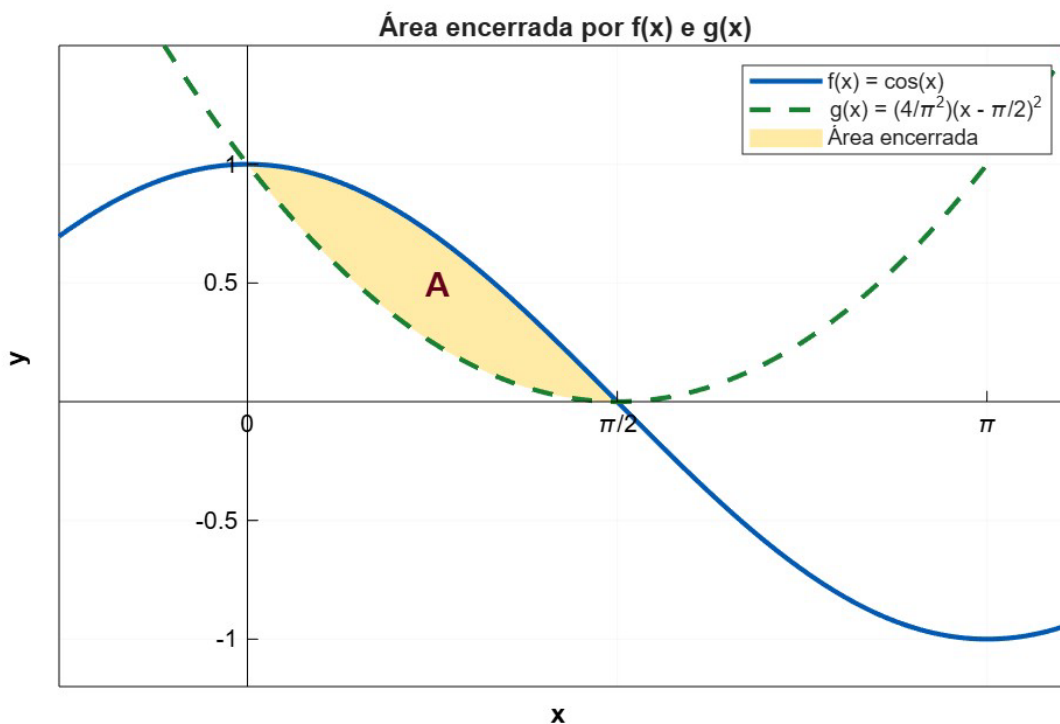
$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Obsérvase que $g(0) = 1 = f(0)$ e que $g(\pi/2) = 0 = f(\pi/2)$.

Por outra banda, como g é un polinomio de grao 2 con coeficiente principal positivo, a súa gráfica é unha parábola convexa. Ademais, o vértice atópase en $x = \pi/2$, porque

$$g'(x) = \frac{8}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

(Podería engadirse que, ao ser $g(0) = g(\pi) = 1$ e estar os valores de f comprendidos entre -1 e 1 , as gráficas das dúas funcións non se cortan en ningún outro punto á parte dos xa mencionados (ver debuxo).)



En consecuencia, a área pedida é:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} (f(x) - g(x)) \, dx = \int_0^{\pi/2} \left(\cos x - \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right) \, dx = \left[\sin x - \frac{4}{\pi^2} \frac{(x - \pi/2)^3}{3} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 \right) - \left(\sin(0) + \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{3} \frac{\pi^3}{8} \right) = 1 - \frac{\pi}{6} u^2, \end{aligned}$$

onde u indica unidade de lonxitude. Pode engadirse que

$$1 - \frac{\pi}{6} \approx 0.4764.$$

PREGUNTA 4

4.1. Considérase a recta

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}.$$

4.1.1. Ecuación do plano π que contén a r e ao punto $Q(2, -1, 1)$:

Posto que $P(1, 1, 0) \in r$, os vectores $\overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v}_r = (2, 1, 3)$ son xeradores de π .

Entón, como

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6(x-1) + 2(y-1) + z + 4z - (x-1) - 3(y-1) \\ = -6x + 6 + 2y - 2 + 5z - x + 1 - 3y + 3 = -7x - y + 5z + 8,$$

a ecuación pedida é $\pi: -7x - y + 5z + 8 = 0$.

4.1.2. $\pi^*: x + y - z - 1 = 0$.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_{\pi^*} = (2, 1, 3) \cdot (1, 1, -1) = 2 + 1 - 3 = 0,$$

o que demostra que o vector director de r , $\vec{v}_r$, e o vector normal ao plano π^* , $\vec{n}_{\pi^*}$, son perpendiculares, e polo tanto que **r e π^* son paralelos**.

A distancia de r a π^* coincide coa distancia de $P(1, 1, 0)$ a π^* . Ao ser $\pi^*: Ax + By + Cz + D = 0$ con $A = 1, B = 1, C = -1$ e $D = -1$, e $P(x_0, y_0, z_0)$ con $x_0 = 1, y_0 = 1$ e $z_0 = 0$, tense

$$d(r, \pi^*) = d(P, \pi^*) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 + 1 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

ou, se se quere, $\sqrt{3}/3$.

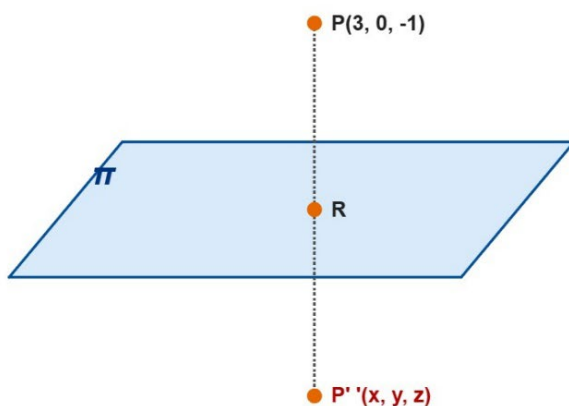
4.2.

4.2.1.



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3+x}{2} = 2 \Rightarrow 3+x = 4 \Rightarrow x = 1, \\ \frac{0+y}{2} = -1 \Rightarrow y = -2, \\ \frac{-1+z}{2} = 2 \Rightarrow -1+z = 4 \Rightarrow z = 5. \end{array} \right\} \Rightarrow P'(1, -2, 5) \text{ é o punto pedido.}$$

4.2.2.



$$\pi: x + 2y + z - 8 = 0.$$

Cálculo do punto R : este punto é a intersección do plano π coa recta r que pasa por $P(3, 0, -1)$ e ten como vector director $\vec{n}_\pi = (1, 2, 1)$, é dicir,

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Posto que

$$\underbrace{(3 + \lambda)}_x + 2 \underbrace{(2\lambda)}_y + \underbrace{(-1 + \lambda)}_z - 8 = 6\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1,$$

tense que $R(4, 2, 0)$.

Obtención do punto pedido P'' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3 + x}{2} = 4 \Rightarrow 3 + x = 8 \Rightarrow x = 5, \\ \frac{0 + y}{2} = 2 \Rightarrow y = 4, \\ \frac{-1 + z}{2} = 0 \Rightarrow z = 1. \end{array} \right\} \Rightarrow P''(5, 4, 1) \text{ é o punto pedido.}$$

NOTA FINAL: as solucións que se presentan aquí son só propostas. É habitual que os problemas admitan varias formas de resolución, todas elas correctas e, polo tanto, igualmente válidas.