

PAU 2026
CONVOCATORIA ORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

CRITERIOS

O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria**: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartados. Deben xustificarse todas as respostas.

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2 puntos)

1.1. 1.25 puntos, repartidos así:

- 0.5 puntos por explicar o significado de R , I , X e Y .
- 0.25 puntos por calcular $P(R|I)$ e 0.25 por calcular $P(R|\bar{I})$.
- 0.25 puntos calcular $P(R)$.

1.2. 0.75 puntos, repartidos así:

- 0.25 puntos por saber que se pide $P(Y < 765)$.
- 0.25 puntos por chegar a $P(Z < -1.125)$.
- 0.25 puntos por chegar ao resultado.

PREGUNTA 2. ÁLXEBRA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.

2.1.

2.1.1. 0.75 puntos.

2.1.2. 1.25 puntos, repartidos así:

- 0.5 puntos polas dimensións de X e de B .
- 0.75 puntos por obter X .

2.2. 2 puntos, repartidos así:

- 0.5 puntos por resolver $\det(A) = 0$.
- 0.5 puntos por cada un dos tres casos.

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (4 puntos)

Responda dous destes tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. 2 puntos, 0.5 puntos por apartado.

3.2. 2 puntos, 0.5 puntos por cada límite.

3.3. 2 puntos, repartidos así:

- 0.5 puntos por chegar a $A = -\int_0^2 f(x)dx$.
- 0.75 puntos por calcular $\int_0^2 f(x)dx$.
- 0.5 puntos por obter o valor de a .
- 0.25 puntos polo debuxo.

PREGUNTA 4. XEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 4.1. ou 4.2.

4.1.

4.1.1. 1 punto, repartido así:

- 0.5 puntos por obter P' .
- 0.5 puntos polas ecuacións paramétricas de r .

4.1.2. 1 punto.

4.2.

4.2.1. 1 punto, repartido así:

- 0.5 puntos por probar que P, Q e R non están aliñados.
- 0.5 puntos por obter a ecuación do plano.

4.2.2. 1 punto.

PREGUNTA 1

1.1. I é o suceso «prodúcense incidencias meteorolóxicas», R o suceso «hai un retraso significativo», mentres que $X \sim N(765, 18)$ é a variable aleatoria que representa o tempo de viaxe nun día sen incidencias e $Y \sim N(810, 40)$ é a variable aleatoria que representa o tempo de viaxe nun día con incidencias. Pídese $P(R)$.

En virtude do teorema da probabilidade total, sábese que

$$P(R) = P(R|I)P(I) + P(R|\bar{I})P(\bar{I}) = 0.3 P(R|I) + 0.7 P(R|\bar{I}),$$

porque $P(I) = 0.3$.

$$\begin{aligned} P(R|I) &= P(Y > 840) = P\left(Z_Y > \frac{840 - 810}{40}\right) = P\left(Z_Y > \frac{30}{40}\right) = P\left(Z_Y > \frac{3}{4}\right) = P(Z_Y > 0.75) \\ &= 1 - P(Z_Y \leq 0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(R|\bar{I}) &= P(X > 780) = P\left(Z_X > \frac{780 - 765}{18}\right) = P\left(Z_X > \frac{15}{18}\right) = P\left(Z_X > \frac{5}{6}\right) = P(Z_X > 0.83) \\ &= 1 - P(Z_X \leq 0.83) = 1 - 0.7967 = 0.2033. \end{aligned}$$

Conclúese que

$$P(R) = 0.3 \times 0.2266 + 0.7 \times 0.2033 = 0.06798 + 0.14231 = 0.21029 \approx \mathbf{0.2103}.$$

1.2.

$$\begin{aligned} P(Y < 765) &= P\left(Z_Y < \frac{765 - 810}{40}\right) = P\left(Z_Y < -\frac{45}{40}\right) = P\left(Z_Y < -\frac{9}{8}\right) = P(Z_Y < -1.125) \\ &= P(Z_Y > 1.125) = 1 - P(Z_Y \leq 1.125) = 1 - 0.8697 = \mathbf{0.1303}. \end{aligned}$$

PREGUNTA 2

2.1. $A(X - I)B = C$, con X cadrada.

2.1.1. Se A e B son cadradas e invertibles, entón

$$X - I = A^{-1}CB^{-1},$$

de onde

$$X = I + A^{-1}CB^{-1}.$$

2.1.2.

$$\underbrace{A}_{1 \times 2} \underbrace{(X - I)}_{2 \times 2} \underbrace{B}_{2 \times 2} = \underbrace{C}_{1 \times 2}.$$

Para que se poda facer o produto $A(X - I)$, a matriz $X - I$, e polo tanto X , ten que ter dúas filas.

Como é cadrada, **X ten que ser de dimensión 2×2 .**

Isto obriga a que B teña dúas filas e, para que C teña dúas columnas, B ten que ter dúas columnas. É dicir, **B tamén ten que ser de dimensión 2×2 .**

Pasamos á última parte desde exercicio:

$$(1 \ 1) \left(\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0) \Leftrightarrow (1 \ 1) \begin{pmatrix} x-1 & y \\ y & -x-1 \end{pmatrix} = (0 \ 0),$$

é dicir,

$$\begin{cases} x-1+y=0 \\ y-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ -x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1-y=0 \end{cases}.$$

Logo a matriz pedida é

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.

Polo método de Gauss, podemos reducir o sistema dado a outro equivalente con matriz triangular, cuxa discusión é sinxela:

$$\begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ m-4 & m-1 & 7 & m+9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ 0 & m-1 & 2 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} (m-4)x & + & 5z & = & 9, \\ (m-1)y & + & 6z & = & m+8, \\ & & z & = & 2. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,4\}$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = 2, \quad y = \frac{m+8-6z}{m-1} = \frac{m-4}{m-1}, \quad x = \frac{9-5z}{m-4} = \frac{-1}{m-4}.$$

- Se $m = 1$, o sistema é

$$\begin{cases} -3x + 5z = 9, \\ 6z = 9, \\ z = 2, \end{cases}$$

que é incompatible porque a segunda e a terceira ecuación non se poden cumprir á vez.

- Se $m = 4$, temos

$$\begin{cases} 5z = 9, \\ 3y + 6z = 12, \\ z = 2, \end{cases}$$

que é incompatible porque a primeira e a terceira ecuación non se poden cumprir á vez.

2.2. SOLUCIÓN ALTERNATIVA

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ m-4 & m-1 & 7 & m+9 \end{array} \right), \quad A = \begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 \\ 0 & m-1 & 6 \\ m-4 & m-1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} m-4 & 0 & 5 \\ 0 & m-1 & 6 \\ m-4 & m-1 & 7 \end{vmatrix} = (m-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & m-1 & 6 \\ 1 & m-1 & 7 \end{vmatrix} = (m-4)(m-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \\ &= (m-4)(m-1)(7-5-6) = -4(m-4)(m-1). \end{aligned}$$

Polo tanto, $\text{rank}(A) < 3$ se $m \in \{1,4\}$, porque $\det(A) = 0$,

$\text{rank}(A) = 3$ se $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,4\}$, porque $\det(A) \neq 0$.

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,4\}$, o sistema é compatible determinado, xa que $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$.

- Se $m = 1$,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 7 & 10 \end{array} \right), \quad A = \left(\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 7 \end{array} \right).$$

Como

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 9 \\ -3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 9 \\ 1 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -3(60 + 45 - 54 - 63) = -3(-12) = 36 \neq 0,$$

tense que $\text{rank}(A^*) = 3 \neq \text{rank}(A)$. Logo neste caso o sistema é incompatible.

- Se $m = 4$,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 7 & 13 \end{array} \right), \quad A = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \end{array} \right).$$

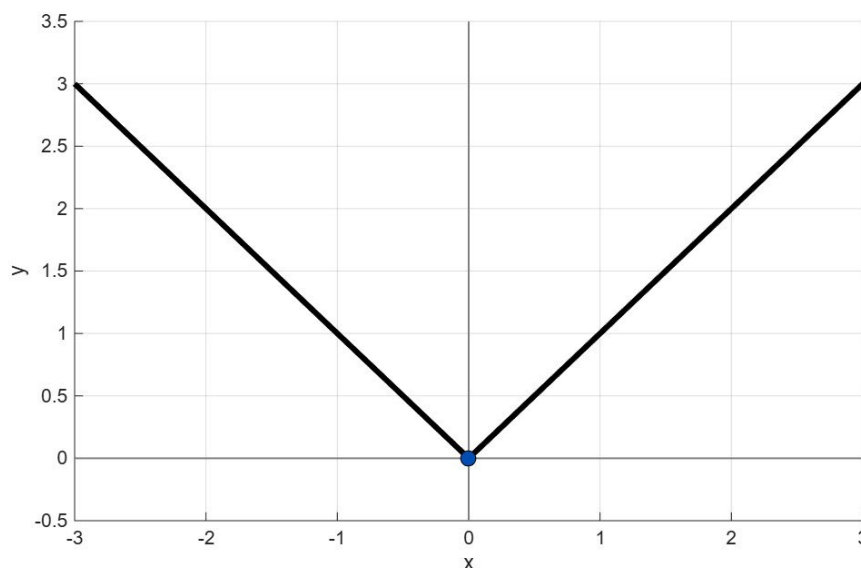
$$\text{Como } \begin{vmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \\ 3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 1 & 6 & 12 \\ 1 & 7 & 13 \end{vmatrix} = 3(60 + 63 - 54 - 65) = 3 \times 4 = 12 \neq 0,$$

tense que $\text{rank}(A^*) = 3 \neq \text{rank}(A)$. Logo neste caso o sistema tamén é incompatible.

PREGUNTA 3

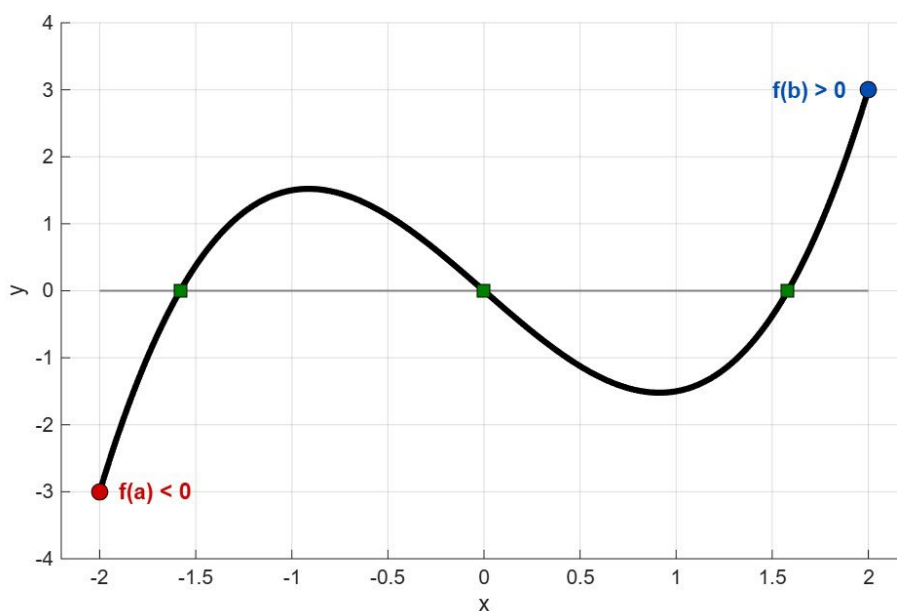
3.1.

3.1.a) Función continua pero non derivable en $x = 0$:



É a gráfica de $f(x) = |x|$. É continua pero non derivable en $x = 0$.

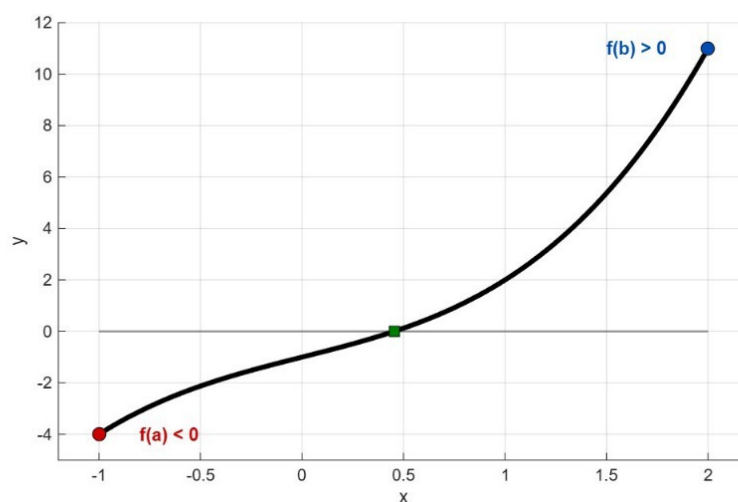
3.1.b) Función continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, e cuxa gráfica corta ao eixe x en máis dun punto do intervalo (a, b) .



Neste caso a gráfica corta ao eixe x en tres puntos do intervalo $(a, b) = (-2, 2)$.

3.1.c) Función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b) , e cuxa gráfica corta ao eixe x en máis dun punto do intervalo (a, b) .

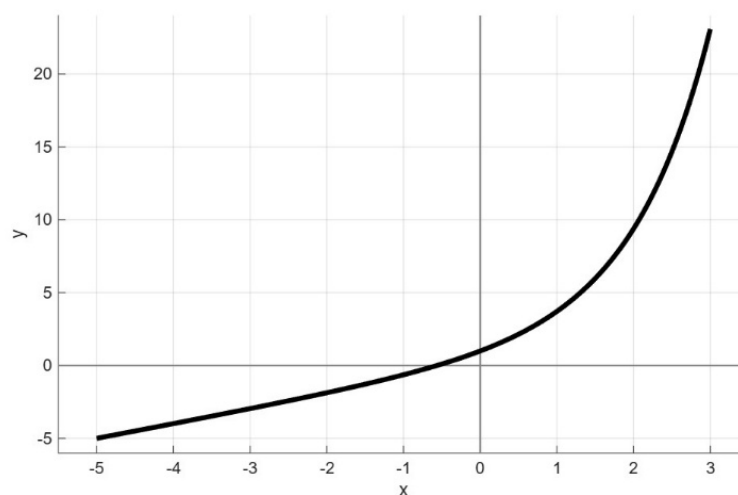
Non existe unha función que cumpra todas esas condicións, porque, ao ser estritamente crecente ($f' > 0$), a súa gráfica só pode cortar ao eixe x nun punto. Se se tivese $f(c_1) = f(c_2) = 0$ para certos c_1 e c_2 distintos de (a, b) , entón tería que haber algún punto entre eles onde f' fose 0 (polo teorema de Rolle).



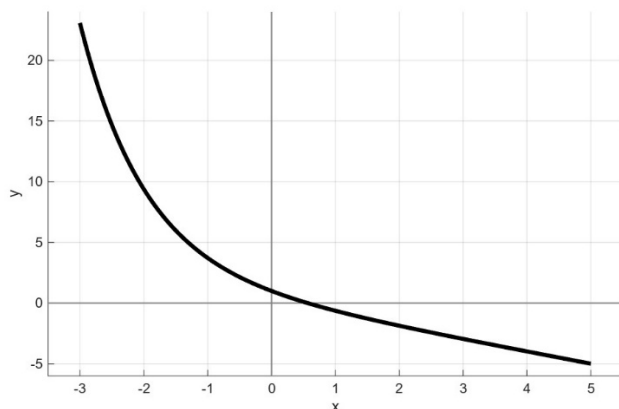
No debuxo, $a = -1$ e $b = 2$.

3.1.d) Función dúas veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ e monótona en $\mathbb{R}$.

Vale, por, exemplo:



A función ten que ser convexa, xa que $f'' > 0$, pero non ten por que ser crecente. Por exemplo, tamén vale a seguinte:



3.2.

3.2.a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x} = \frac{0}{1} = 0.$$

3.2.b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x}.$$

A substitución directa leva a unha indeterminación de tipo $0/0$, polo que aplicaremos a regra de L'Hôpital.

Posto que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1,$$

conclúese que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x} = 1.$$

3.2.c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Ou ben, empregando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x}{\cos x} = 1.$$

3.2.d)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x.$$

Aquí preséntase unha indeterminación de tipo $0 \times (-\infty)$. Ao reescribir o límite como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}}$$

a indeterminación pasa a ser de tipo $-\infty/\infty$ e pódese aplicar a regra de L'Hôpital:

Posto que

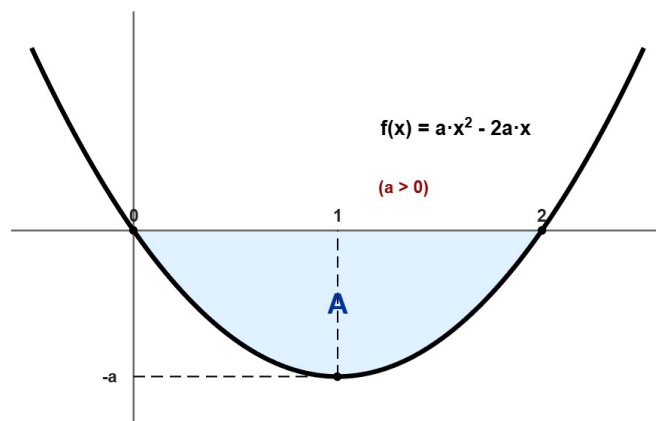
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{(-1/2)x^{-3/2}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1+3/2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0,$$

conclúese que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0.$$

3.3. $f(x) = ax^2 - 2ax = ax(x - 2)$, $f'(x) = 2ax - 2a = 2a(x - 1)$, $f''(x) = 2a > 0$. A gráfica de f é, por tanto, unha parábola convexa con vértice en $x = 1$.

Pódese representar a rexión de interese (ver debuxo) usando a información anterior xunto con $f(1) = a - 2a = -a < 0$, $f(0) = 0 = f(2)$.



$$\begin{aligned} A &= - \int_0^2 (ax^2 - 2ax) dx \\ &= \int_0^2 (2ax - ax^2) dx \\ &= a \int_0^2 (2x - x^2) dx = a \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = a \left(4 - \frac{8}{3} \right) = a \frac{12 - 8}{3} = \frac{4a}{3}. \end{aligned}$$

Agora calcúlase o valor pedido:

$$\frac{4a}{3} = 10 \Leftrightarrow 4a = 30 \Leftrightarrow a = \frac{30}{4} = 7.5.$$

PREGUNTA 4

4.1.



A recta r pasa por $O(0,0,0)$ e por $P'(x, y, z)$.

4.1.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{2} = 0 \Rightarrow x = -1, \\ \frac{y+0}{2} = 1 \Rightarrow y = 2, \\ \frac{z+1}{2} = 0 \Rightarrow z = -1. \end{array} \right\} \Rightarrow P'(-1, 2, -1).$$

$\vec{v}_r = \overrightarrow{P'O} = (-1, 2, -1)$ é vector director de r , conque

$$r: \begin{cases} x = -\lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

son ecuacións paramétricas de r .

4.1.2. Como o plano pasa pola orixe e $\vec{v}_r = (-1, 2, -1)$ é normal ao plano, a súa ecuación implícita é

$$-x + 2y - z = 0.$$

4.2. Considéranse os puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ e $R(1,1,1)$.

4.2.1. P , Q e R non están aliñados porque $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, -1)$ non é proporcional a $\overrightarrow{PR} = (0, 1, 0)$.

Tendo en conta que $Q(0,1,0) \in \pi$, que $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ son xeradores do plano e que

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & z \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-x + z) = x - z,$$

conclúese que a ecuación implícita pedida é $\pi: x - z = 0$. (Poderíamos evitar o razoamento empregado para probar que os puntos non están aliñados dicindo que **non están aliñados porque o determinante anterior non é identicamente nulo.**)

4.2.2. A distancia entre un plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ e un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ vén dada pola fórmula

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Neste caso,

$$d(S, \pi) = \frac{|a|}{\sqrt{2}}.$$

Por último,

$$\frac{|a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a| = 2 \Leftrightarrow \mathbf{a} \in \{-2, 2\}.$$

NOTA FINAL: *as solucións que se presentan aquí son só propostas. É habitual que os problemas admitan varias formas de resolución, todas elas correctas e, polo tanto, igualmente válidas.*