

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela y Barcelona-Sants. Los datos históricos muestran que, en condiciones operativas habituales, el tiempo de viaje sigue una distribución normal con una media de 765 minutos y una desviación típica de 18 minutos.

Sin embargo, durante los meses de invierno es frecuente que se produzcan incidencias meteorológicas que obligan a reducir la velocidad en ciertos tramos de la ruta. Esto ocurre aproximadamente el 30 % de los días de la temporada. Cuando se activa el protocolo por incidencia, la distribución del tiempo de viaje sigue siendo normal, pero pasa a tener una media de 810 minutos y una desviación típica de 40 minutos.

La compañía ferroviaria define que existe un “retraso significativo” cuando el tiempo de viaje supera los 780 minutos en un día sin incidencias, o los 840 minutos en un día con incidencia meteorológica declarada.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.3) = 0.6179$, $P(Z \leq 0.75) = 0.7734$, $P(Z \leq 0.83) = 0.7967$, $P(Z \leq 1.125) = 0.8697$, $P(Z \leq 4.16) = 1$.)

- 1.1.** Por el contexto, se sabe que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ y que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique el significado de los sucesos I y R y de las variables aleatorias X e Y . Luego, determine la probabilidad de que, seleccionando al azar un día de la temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo según la definición de la compañía.
- 1.2.** Calcule la probabilidad de que, en un día con incidencia meteorológica activa, el tren complete su viaje en un tiempo inferior a 765 minutos, que es el tiempo medio en condiciones habituales.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Considérese la igualdad matricial $A(X - I)B = C$, donde X es cuadrada e I es la matriz identidad.

2.1.1. Despeje X suponiendo que A y B son cuadradas e invertibles.

2.1.2. ¿Qué dimensiones tienen X y B si A y C son matrices 1×2 ? Obtenga X , simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m-4)x & & + 5z & = & 9, \\ & (m-1)y & + 6z & = & m+8, \\ (m-4)x & + & (m-1)y & + & 7z & = & m+9. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos)

Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Para cada uno de los siguientes casos, dibuje, cuando sea posible, la gráfica de una función que cumpla las propiedades indicadas:

- a) Continua pero no derivable en $x = 0$.
- b) Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- c) Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b) , y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b) .
- d) Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$.

3.2. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$.

3.3. Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo a para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Sea r la recta que pasa por el origen y por P' , siendo P' el punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto al punto $Q(0,1,0)$. Se pide:

4.1.1. Obtenga P' y las ecuaciones paramétricas de r .

4.1.2. Determine la ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r .

4.2. Considérense los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$.

4.2.1. Demuestre que P , Q y R no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por ellos.

4.2.2. Calcule el valor o valores de a que hacen que la distancia del punto $S(a, 0, 0)$ a ese plano π sea igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.