

O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria**: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartados. Deben xustificarse todas as respostas.

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2 puntos)

CONTEXTO

Renfe opera un servizo Alvia entre Santiago de Compostela e Barcelona-Sants. Os datos históricos mostran que, en condicións operativas habituais, o tempo de viaxe segue unha distribución normal cunha media de 765 minutos e unha desviación típica de 18 minutos.

Con todo, durante os meses de inverno é frecuente que se produzan incidencias meteorolóxicas que obrigan a reducir a velocidade en certos tramos da ruta. Isto ocorre aproximadamente o 30 % dos días da temporada. Cando se activa o protocolo por incidencia, a distribución do tempo de viaxe segue a ser normal, pero pasa a ter unha media de 810 minutos e unha desviación típica de 40 minutos.

A compañía ferroviaria define que existe un “retraso significativo” cando o tempo de viaxe supera os 780 minutos nun día sen incidencias, ou os 840 minutos nun día con incidencia meteorolóxica declarada.

Responda estes dous apartados: 1.1. e 1.2.

(Será preciso usar algún ou algúns dos seguintes valores, aínda que non todos (enténdase que Z segue unha distribución $N(0,1)$): $P(Z \leq 0.3) = 0.6179$, $P(Z \leq 0.75) = 0.7734$, $P(Z \leq 0.83) = 0.7967$, $P(Z \leq 1.125) = 0.8697$, $P(Z \leq 4.16) = 1$.)

1.1. Polo contexto, sábese que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ e que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique o significado dos sucesos I e R e das variables aleatorias X e Y . Logo, determine a probabilidade de que, seleccionando ao azar un día da temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo segundo a definición da compañía.

1.2. Calcule a probabilidade de que, nun día con incidencia meteorolóxica activa, o tren complete a súa viaxe nun tempo inferior a 765 minutos, que é o tempo medio en condicións habituais.

PREGUNTA 2. ÁLXEBRA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.

2.1. Considérese a igualdade matricial $A(X - I)B = C$, onde X é cadrada e I é a matriz identidade.

2.1.1. Despexa X supoñendo que A e B son cadradas e invertibles.

2.1.2. Que dimensións teñen X e B se A e C son matrices 1×2 ? Obteña X , simétrica e tal que os elementos da súa diagonal sumen 0, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema

$$\begin{cases} (m-4)x & & + 5z & = & 9, \\ & (m-1)y & + 6z & = & m+8, \\ (m-4)x & + & (m-1)y & + & 7z & = & m+9. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (4 puntos)

Responda dous destes tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Para cada un dos seguintes casos, debuxe, cando sexa posible, a gráfica dunha función que cumpra as propiedades indicadas:

- a) Continua pero non derivable en $x = 0$.
- b) Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, e cuxa gráfica corte ao eixe x en máis dun punto do intervalo (a, b) .
- c) Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) , con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b) , e cuxa gráfica corte ao eixe x en máis dun punto do intervalo (a, b) .
- d) Dúas veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ e monótona en $\mathbb{R}$.

3.2. Calcule os seguintes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$.
- d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$.

3.3. Calcule o valor que ten que tomar o parámetro positivo a para que a área da rexión encerrada pola gráfica da función $f(x) = ax^2 - 2ax$ e o eixe x sexa igual a 10 unidades de superficie. Faga un debuxo da rexión.

PREGUNTA 4. XEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 4.1. ou 4.2.

4.1. Sexa r a recta que pasa pola orixe e por P' , sendo P' o punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto ao punto $Q(0,1,0)$. Pídesse:

4.1.1. Obteña P' e as ecuacións paramétricas de r .

4.1.2. Determine a ecuación implícita do plano que pasa pola orixe e é perpendicular a r .

4.2. Considérense os puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ e $R(1,1,1)$.

4.2.1. Demostre que P , Q e R non están aliñados e obteña a ecuación implícita do plano π que pasa por eles.

4.2.2. Calcule o valor ou valores de a que fan que a distancia do punto $S(a, 0, 0)$ a ese plano π sexa igual a $\sqrt{2}$ unidades de lonxitude.