

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2 puntos).**CONTEXTO**

La caída de los tipos de interés en el segundo semestre de 2024 permitió a las familias ahorrar alrededor de 200 euros al mes en comparación con lo que venían pagando por sus hipotecas y préstamos. Este ahorro equivalía a más de 2000 euros anuales. Ante este escenario, los bancos ofrecieron condiciones más atractivas para captar clientes, lo que generó una fuerte competencia entre las entidades. Una de ellas lanzó los siguientes productos: Préstamo 24 Horas, Préstamo Auto y Préstamo Estudia. Cada cliente podía contratar, como máximo, uno de ellos.

La política de la empresa determinó que el reparto final de los préstamos concedidos fuera el siguiente: un 45 % correspondió a Préstamos 24 Horas, un 40 % a Préstamos Auto y un 15 % a Préstamos Estudia. Además, se analizó el porcentaje de impago en estos productos, que fue del 20 % en Préstamos 24 Horas, del 30 % en Préstamos Auto y del 25 % en Préstamos Estudia.

Responda estos cuatro apartados: 1.1., 1.2., 1.3. y 1.4.

- 1.1.** Seleccionado un préstamo al azar, calcule la probabilidad de que no se haya pagado.
- 1.2.** Sabiendo que no se pagó un préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Auto.
- 1.3.** Si se pagó el préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Estudia.
- 1.4.** Según los datos proporcionados por el enunciado, indique dos sucesos relacionados con este problema que sean incompatibles.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA (2 puntos).

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes. Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron compras o devoluciones, las cuales se recogieron (en miles de unidades) en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Indique qué representan las filas y las columnas, y especifique tanto las compras como las devoluciones realizadas por cada cliente durante el mes de febrero.

2.1.2. Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de 3250 €, el segundo un total de 2850 € y el cuarto un total de 2800 €, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} x + y + mz = 1, \\ x + my + z = 1, \\ mx + y + z = 1. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS (4 puntos).

Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \arctan(x + \pi)$, donde $\arctan$ denota la función arcotangente.

3.1.1. Determine los intervalos de concavidad y de convexidad de f . Estudie y halle, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

3.1.2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\sin x}.$$

¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos en el denominador $\sin x$ por $g(x)$, siendo $g(x) = \sin x$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$?

3.2. La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es igual a 100 metros. ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?

3.3. Responda:

3.3.1. Calcule el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2$ y $g(x) = |x|$.

3.3.2. Razone, sin calcular la integral, si $\int_1^2 x e^x dx$ tiene signo positivo o negativo. Luego, calcule la integral.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA (2 puntos).

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Responda:

4.1.1. Considere el triángulo de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(2, 4, 0)$ y $C(5, 0, 0)$. Utilizando productos vectoriales, calcule su área. Luego, compruebe el resultado mediante otro método.

4.1.2. Calcule la distancia del punto $P(2, 4, 2)$ al plano que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$, $C(5, 0, 0)$ y $D(0, 0, 3)$.

4.2. Responda:

4.2.1. Se consideran el plano $\pi: ax + y + z = 1$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$, donde a es un parámetro real.

- Estudie la posición relativa de π y r en función de a ,
- obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares y
- razone si r puede estar contenida en π o no.

4.2.2. Si π es el plano de ecuación $-3x + y + z = 1$, diga qué valor debe tomar el parámetro real b para que la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π .