

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN PAU JUNIO 2025 MATEMÁTICAS II

Por la propia naturaleza de la disciplina, una misma cuestión admite múltiples soluciones correctas. Por supuesto, cualquier solución de cualquiera de las cuestiones del examen que sea correcta y esté bien argumentada deberá ser considerada como válida en el proceso de corrección, aunque no esté incluida en este documento.

El examen consta de un total de cuatro cuestiones con dos opciones (A y B) cada una. En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, solo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2,5 puntos. Las cuatro cuestiones son:

Cuestión 1 (opciones 1A y 1B): Sentido numérico y algebraico (2,5 puntos cada una).

Cuestión 2 (opciones 2A y 2B): Sentido de la medida (2,5 puntos cada una).

Cuestión 3 (opciones 3A y 3B): Sentido espacial (2,5 puntos cada una).

Cuestión 4 (opciones 4A y 4B): Sentido estocástico (2,5 puntos una).

Solo se pueden usar las tablas estadísticas que se proporcionan con el examen y, según la normativa vigente, no se pueden usar calculadoras gráficas ni programables.

En Murcia, a 24 de junio de 2025.

Pedro Nicolás Zaragoza
Coordinador Matemáticas II
Departamento de Didáctica de las CC. Matemáticas y Sociales
Universidad de Murcia

Cuestión 1: Sentido numérico y algebraico (2,5 puntos cada una)

Opción 1A (2,5 p.):

Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m > 0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por m más el sueldo de Darío (sin multiplicar por m) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por m) es 600 €.

- (0,75 p.)** Denotando por x el sueldo de Darío, por y el sueldo de Hugo y por z el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.
- (0,25 p.)** Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de m).
- (1,5 p.)** Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de m), y lo que cobra cada uno para $m = 2$.

Solución:

a) El sistema es

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x + y + mz = 600 \end{cases}$$

b) Hay que ver que el sistema es compatible determinado para $m > 0$. La correspondiente matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $3m + 2$, que solo se anula cuando $m = -\frac{2}{3}$, de modo que para $m > 0$ el determinante no se anula y el sistema es compatible determinado.

c) Usando el método de Cramer, o simplemente despejando, se llega a que

$$x = \frac{1200m}{3m+2}, \quad y = \frac{1200}{3m+2}, \quad z = \frac{600}{3m+2}.$$

Para $m = 2$ tenemos $x = 300$ €, $y = 150$ €, $z = 75$ €.

Opción 1B (2,5 p.):

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) **(1,25 p.)** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.
- b) **(1,25 p.)** Resuelva la ecuación $A^t X B = C$, donde A^t es la transpuesta de A .

Solución: a) Las matrices son regulares porque los determinantes son

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0.$$

Haciendo

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{adj}(A)^t, \quad \text{adj}(B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{adj}(B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Como $A^t = A$, la ecuación es $AXB = C$, y tenemos $X = A^{-1}CB^{-1}$. De modo que

$$X = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cuestión 2: sentido de la medida (2,5 puntos cada una)

Opción 2A (2,5 p.):

Considere un triángulo rectángulo de catetos x e y cuya hipotenusa mide $7\sqrt{2}$ cm.

- a) (0,5 p.) Demuestre que su área viene dada por la expresión

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{98 - x^2}.$$

- b) (2 p.) Calcule las dimensiones que debe tener dicho triángulo para que su área sea la mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

Solución: a) El área de un triángulo rectángulo es el producto de los catetos dividido por 2. Gracias al Teorema de Pitágoras sabemos que $x^2 + y^2 = (7\sqrt{2})^2 = 49 \cdot 2 = 98$, de modo que $y = \sqrt{98 - x^2}$, y el área viene dada por la función del enunciado.

b) Tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{98 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{98 - x^2}} = \frac{98 - 2x^2}{2\sqrt{98 - x^2}} = \frac{49 - x^2}{\sqrt{98 - x^2}}.$$

De modo que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = 7.$$

No consideramos la posibilidad $x = -7$ porque estamos buscando una longitud.

El dominio de la función $f(x)$ es $[-7\sqrt{2}, 7\sqrt{2}]$, pero el único dominio realista según los datos del problema es $(0, 7\sqrt{2})$. Evaluando $f'(x)$ en $(0, 7)$, por ejemplo $f'(1) = \frac{49-1}{\sqrt{98-1}} > 0$, vemos que $f(x)$ es creciente en $(0, 7)$. Evaluando $f'(x)$ entre 7 y $7\sqrt{2}$ tenemos que $49 - x^2 < 0$, de modo que $f'(x)$ será negativa y $f(x)$ decreciente en $(7, 7\sqrt{2})$. Por lo tanto, $x = 7$ es un máximo de $f(x)$. El valor máximo del área será entonces

$$f(7) = \frac{1}{2}7\sqrt{98 - 7^2} = \frac{49}{2} = 24,5 \text{ cm}^2.$$

Los dos catetos miden 7 cm y $y = \sqrt{98 - 7^2} = \sqrt{49} = 7$ cm.

Opción 2B (2,5 p.):

Considere la función $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

a) **(1,5 p.)** Calcule la integral indefinida $\int f(x)dx$.

b) **(1 p.)** Compruebe que el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 1$ y $x = 2$ es $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$.

Solución: a) Integrando por partes, tomando $u = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ y $dv = dx$, tenemos $du = \frac{-1}{(x+1)x}dx$ y $v = x$, de modo que

$$\int \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \int \frac{x}{(x+1)x} dx = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \ln(|x+1|) + C.$$

b) La función logaritmo es no negativa en $[1, +\infty)$, (típicamente se comprueba si se anula, y no se anula en $(1, 2)$), de modo que el área pedida se obtiene simplemente calculando

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx &= \left[x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \ln(|x+1|) \right]_1^2 = 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(3) - (\ln(2) + \ln(2)) = \\ &= 2 \ln(3) - 2 \ln(2) + \ln(3) - 2 \ln(2) = \\ &= 3 \ln(3) - 4 \ln(2) = \ln(3^3) - \ln(2^4) = \ln(27) - \ln(16) = \ln\left(\frac{27}{16}\right). \end{aligned}$$

Cuestión 3: sentido espacial (2,5 puntos cada una)

Opción 3A (2,5 p.):

Considere las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad y \quad s : \begin{cases} x = 7 + 3\mu \\ y = -5 + \mu \\ z = 7 \end{cases}$$

- a) (0,5 p.) Compruebe que se cruzan.
- b) (1,5 p.) Halle la ecuación de la recta perpendicular a ambas.
- c) (0,5 p.) Calcule la distancia entre r y s .

Solución: a) Un método habitual es el siguiente. Podemos tomar puntos, $R(1, 5, 0) \in r$ y $S(7, -5, 7) \in s$, y comprobar que los vectores $\{\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{RS}\}$ son linealmente independientes. Esto se puede hacer viendo que la matriz

$$\begin{pmatrix} 6 & -10 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 3, porque su determinante es $-57 \neq 0$.

b) Un método habitual es encontrar la recta pedida, t , como intersección del plano que contiene a r y a t y el plano que contiene a s y a t . Para eso calculamos un vector director $\vec{d}_t$ de t sabiendo que tiene que ser perpendicular a $\vec{d}_r$ y a $\vec{d}_s$, de modo que podemos tomar:

$$\vec{d}_r \wedge \vec{d}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i + 3j - 3k = (-1, 3, -3),$$

o este otro $(1, -3, 3) =: \vec{d}_t$, que es proporcional.

Para calcular la ecuación del plano que contiene a r y a t usamos que, como $R(1, 5, 0) \in r$, si $T(x, y, z) \in t$ entonces el vector $\vec{TR} = (x - 1, y - 5, z)$ es linealmente dependiente de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_t$, de modo que

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 5 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 6x + y - z - 11 = 0$$

es la ecuación del plano determinado por r y t . Análogamente, para calcular la ecuación del plano que contiene a s y a t usamos que, como $S(7, -5, 7) \in s$, si $T(x, y, z) \in t$ entonces el vector $\vec{TS} = (x - 7, y + 5, z - 7)$ es linealmente dependiente de $\vec{d}_s$ y $\vec{d}_t$, de modo que

$$\begin{vmatrix} x - 7 & y + 5 & z - 7 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3x - 9y - 10z + 4 = 0$$

es la ecuación del plano determinado por s y t . Finalmente, la recta perpendicular a r y s viene dada por el sistema

$$t : \begin{cases} 6x + y - z - 11 = 0 \\ 3x - 9y - 10z + 4 = 0 \end{cases}$$

c) Un método habitual es el siguiente. Tomamos $R(1, 5, 0) \in r$ y $S(7, -5, 7)$, de modo que $\vec{RS} = (6, -10, 7)$. Ahora el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{RS} = (6, -10, 7)$, $\vec{d}_r = (0, 1, 1)$ y $\vec{d}_s = (3, 1, 0)$ viene dado por

$$\left| \begin{vmatrix} 6 & -10 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = |-57| = 57.$$

El área de la base de ese paralelepípedo viene dada por

$$|\vec{d}_r \wedge \vec{d}_s| = |(-1, 3, -3)| = \sqrt{1 + 9 + 9} = \sqrt{19}.$$

Finalmente, la distancia entre r y s vendrá dada por la altura del paralelepípedo, que se calcula dividiendo el volumen por el área de la base:

$$d(r, s) = \frac{|\det(\vec{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s)|}{|\vec{d}_r \wedge \vec{d}_s|} = \frac{57}{\sqrt{19}} = \frac{3 \cdot 19}{\sqrt{19}} = 3\sqrt{19}.$$

Opción 3B (2,5 p.):

Considere los planos $\pi_1 : x - y + z = 0$ y $\pi_2 : x + y - z = 2$

- a) (1 p.) Calcule la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2 .
- b) (0,75 p.) Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2, 3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 .
- c) (0,75 p.) Calcule la proyección ortogonal de P en π_1 .

Solución: a) Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

obtenemos $x = 1, y = 1 + z$, de modo que la recta intersección es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) La recta pedida pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y tiene como vector director el de la recta de intersección de π_1 y π_2 , que es $(0, 1, 1)$. Así, la ecuación de la recta pedida es:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, 1) = (1, 2 + \lambda, 3 + \lambda).$$

No hace falta comprobar que no corta ni a π_1 ni a π_2 . Pero sería fácil hacerlo. En efecto, no corta a π_1 porque si sustituimos $(x, y, z) = (1, 2 + \lambda, 3 + \lambda)$ en $x - y + z = 0$ obtenemos una contradicción:

$$0 = 1 - (2 + \lambda) + 3 + \lambda = 2.$$

Análogamente, no corta a π_2 porque si sustituimos $(x, y, z) = (1, 2 + \lambda, 3 + \lambda)$ en $x + y - z = 2$ obtenemos una contradicción:

$$2 = 1 + 2 + \lambda - (3 + \lambda) = 0.$$

c) La proyección ortogonal, P' , de P en π_1 es la intersección con π_1 de la recta perpendicular a π_1 que pasa por P , que es:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, -1, 1) = (1 + \lambda, 2 - \lambda, 3 + \lambda).$$

Para calcular su intersección con π_1 sustituimos $(x, y, z) = (1 + \lambda, 2 - \lambda, 3 + \lambda)$ en $x - y + z = 0$ y obtenemos:

$$0 = 1 + \lambda - (2 - \lambda) + 3 + \lambda = 2 + 3\lambda$$

de modo que con $\lambda = -\frac{2}{3}$ obtenemos la proyección ortogonal

$$P' \left(1 - \frac{2}{3}, 2 + \frac{2}{3}, 3 - \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3} \right).$$

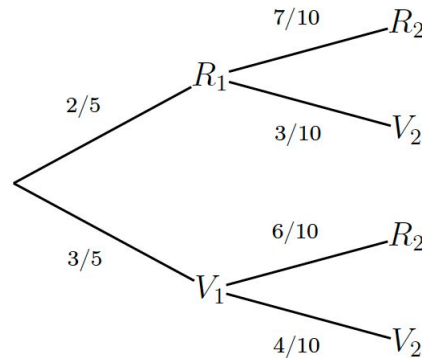
Opción 4: sentido estocástico (2,5 puntos cada una)

Opción 4A (2,5 p.): Considere dos urnas, U_1 y U_2 , tales que en U_1 hay 2 bolas rojas y 3 verdes, y en U_2 hay 6 bolas rojas y 3 verdes. El experimento aleatorio consiste en sacar una bola de U_1 , depositarla en U_2 y, a continuación, sacar una bola de U_2 . Calcule la probabilidad de que:

- a) (0,5 p.) Salga una bola roja en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1 .
- b) (0,5 p.) Salga una bola verde en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1 .
- c) (0,75 p.) Salga una bola verde en U_2 .
- d) (0,75 p.) Haya salido roja en U_1 sabiendo que ha salido roja en U_2 .

Solución: Llamamos R_i (respectivamente, V_i) al suceso “salir roja (respectivamente, verde) en la urna U_i ”. Con los datos del problema, y usando la fórmula de Laplace que calcula la probabilidad dividiendo el número de casos favorables entre el número de casos posibles, tenemos que:

$$P(R_1) = \frac{2}{5}, P(V_1) = \frac{3}{5}, P(R_2 | R_1) = \frac{7}{10}, P(V_2 | R_1) = \frac{3}{10}, P(R_2 | V_1) = \frac{6}{10}, P(V_2 | V_1) = \frac{4}{10}.$$



- a) La probabilidad pedida es ya una de las calculadas: $P(R_2 | R_1) = \frac{7}{10} = 0,7$.
- b) La probabilidad pedida es ya una de las calculadas: $P(V_2 | R_1) = \frac{3}{10} = 0,3$.
- c) Usando el Teorema de la Probabilidad Total, tenemos que

$$P(V_2) = P(V_2 | R_1) \cdot P(R_1) + P(V_2 | V_1) \cdot P(V_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{50} = \frac{9}{25} = 0,36.$$

- d) Para calcular la probabilidad *a posteriori* pedida aplicamos la fórmula de Bayes:

$$P(R_1 | R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_2 | R_1) \cdot P(R_1)}{P(R_2)}.$$

Calculamos $P(R_2)$ como sigue:

$$P(R_2) = P(R_2 | R_1) \cdot P(R_1) + P(R_2 | V_1) \cdot P(V_1) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{5} + \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{5} = \frac{32}{50} = \frac{16}{25}.$$

También se puede usar el trabajo de (c) y hacer:

$$P(R_2) = 1 - P(V_2) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Sea como fuere, una vez calculada $P(R_2)$ hacemos

$$P(R_1 | R_2) = \frac{P(R_2 | R_1) \cdot P(R_1)}{P(R_2)} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{16}{25}} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{16}{25}} = \frac{7}{16} = 0,4375.$$

Opción 4B (2,5 p.): El 2 % de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.

- a) **(1 p.)** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa.
- b) **(1,5 p.)** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas.

Solución:

a) Es una binomial con $n = 10$ y $p = 0,98$. Su media es $\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0,98 = 9,8$, y su desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{10 \cdot 0,98 \cdot 0,02} = 0,4427$. Tenemos que $n \cdot p = 9,8 > 5$ es grande, pero $n \cdot q = 0,2$ no es grande. Es mejor, por lo tanto, no hacer la aproximación mediante la normal, y usar en su lugar la fórmula de la distribución binomial. Como nos piden la probabilidad de que exactamente 1 pieza sea defectuosa, y nuestra variable X cuenta las piezas en buen estado, tenemos que calcular:

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot 0,98^9 \cdot 0,02^1 = 10 \cdot 0,98^9 \cdot 0,02 = 0,2 \cdot 0,98^9 = 0,1667.$$

b) Es una binomial con $n = 2000$ y $p = 0,98$. Su media es $\mu = n \cdot p = 2000 \cdot 0,98 = 1960$, y su desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{2000 \cdot 0,98 \cdot 0,02} = 6,26$. Tenemos que tanto $n \cdot p = 1960$ como $n \cdot q = 2000 \cdot 0,02 = 40$ son grandes. Es mejor, por lo tanto, hacer la aproximación mediante la normal para calcular la probabilidad pedida, que es $P(X \geq 1951)$. Para eso consideramos la variable X' del tipo $N(1960, 6,26)$, y la correspondiente normalizada Z de tipo $N(0, 1)$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1951) &= P(X' \geq 1951 - 0,5) = P(X' \geq 1950,5) = \\ &= P\left(Z \geq \frac{1950,5 - 1960}{6,26}\right) \simeq P(Z \geq -1,52) = P(Z \leq 1,52) = 0,9357 \end{aligned}$$

donde la igualdad $P(Z > -1,52) = P(Z \leq 1,52)$ se obtiene por simetría de la distribución $N(0, 1)$.