

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

- Azterketak bost problema izango ditu, eta horietatik lau egin behar dira:
- Lehenengo problema nahitaez erantzutekoa da.
- Beste lau problemetatik hiru aukeratuko dira.
- Atalak dituzten problemetan atal bat aukeratu behar izango da eta horri erantzungo zaio.
- Galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak egin diren ordenaren arabera zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
- Probari emango zaion puntuazioa 0 eta 10 puntu artekoa izango da.
- Problema guztiak 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko dira.
- Problema batek hainbat atal dituenean, atal bakoitzari dagokion puntuazioa azterketan adieraziko da.
- Galdera bakoitzaren puntuazio orokorra puntu-zatikitan banatzen da, azken emaitzara iristeko tarteko urratsen arabera. Horrela, partzialki ebatzitako edo emaitza okerrak dituzten ariketek puntuazio jakina lor dezakete, beren garapenaren arabera.
- Erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez den galderetan, ariketa hori zuzen ebazteko edozein metodo onartuko da.
- Azterketa-koadernoan jaso beharko dira ariketa bakoitza ebazteko behar izan diren eragiketa eta kalkulu guztiak. Erantzun guztiak behar bezala justifikatuta egongo dira; izan ere, soluzioa bakarrik agertzen baldin bada, inolako azalpenik gabe, problemak zero puntuko puntuazioa izango du.

BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza ontzat emango dira, zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab. ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak...
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek beharko lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.

BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, baldin eta hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten badute (adibidez, problema baten soluzioa $-3,7$ hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa $2,5$ dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebatzitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen baldin bada.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia ez ematea.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzeaz dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.
- Boli gorria edo arkatza erabiltzea problemak garatzeko.
- Ez da baloratuko ariketa baten ebazpena funtzio baten grafikotik abiatuta egitea, funtzio hori balio-taula batetik lortutako puntuetan soilik oinarrituta eraiki baldin bada (funtzio konstanteen, afinen eta linealen kasuan izan ezik).

ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

1. PROBLEMA (gehienez 2,5 puntu)

a. 2 puntu.

- Helburu-funtzioa zehaztea, **0,2 puntu.**
- Murrizketak determinatzea, **0,4 puntu.**
- Soluzio bideragarrien esparrua irudikatzea eta zehaztea.
 - Murrizketa bakoitzaren irudikapena 0,1 puntu; beraz, **0,2 puntu.**
 - Soluzio bideragarrien esparrua zehaztea, **0,3 puntu.**
- Soluzio bideragarrien esparruko erpinak zehaztea.
 - A erpina, **0,1 puntu.**
 - B erpina, **0,1 puntu.**
 - C erpina, **0,1 puntu.**
 - D erpina, **0,1 puntu.**
- Funtzioak erpinetan dituen balioak lortzea, **0,4 puntu.**
- Maximoa zehaztea, **0,1 puntu.**

b. 0,5 puntu.

- Funtzioaren balioa zehaztea puntu maximoan, **0,5 puntu.**

2. PROBLEMA 2.1 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

a. 1 puntu.

- Problemaren planteamendua, **1 puntu.**

b. 1,5 puntu.

- Hiru aldagaien kalkulua; 0,5 puntu aldagai bakoitza: **1,5 puntu.**

2. PROBLEMA 2.2 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,4 puntu.

- Ekuazio matrizialaren adieraztea, **0,4 puntu.**

b. 0,8 puntu.

- Arrazoitzea M erregularra dela, **0,3 puntu.**
- $|A|$ -ren kalkulua, **0,2 puntu.**
- A matrizeak alderantzizkorik ez duela ondorioztatzea, **0,3 puntu.**

c. 1,3 puntu.

- Ebazteko edozein metodo egoki planteatzea, **0,3 puntu.**
- Hiru aldagaien kalkulua, **1 puntu.**

3. PROBLEMA 3.1 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

a. 1 puntu.

- Lehenengo deribatuen kalkulua, **0,3 puntu.**
- Lehenengo deribatua zer baliok baliogabetzen duen kalkulatzea, **0,2 puntu.**
- Lehenengo deribatuaren zeinuaren azterketa, **0,2 puntu.**
- Adieraztea zer unetan lortzen den maximoa, **0,2 puntu.**
- Zehaztea irabaziaren balioa, **0,1 puntu.**

b. 0,4 puntu.

- Erantzun arrazoitua, **0,2 puntu.**
- Ondorioztatzea, **0,2 puntu.**

c. 0,4 puntu.

- Erantzun arrazoitua, **0,2 puntu.**
- Ondorioztatzea, **0,2 puntu.**

d. 0,7 puntu.

- Adieraztea joera zein den, **0,3 puntu.**
- Funtzioaren ezaugarriren batekin lotzea, **0,4 puntu.**

3. PROBLEMA 3.2 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

- a. 1 puntu.** Funtzioaren jarraitutasuna $(-2, 4)$ tartean.
- Jarraitutasuna $[(-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 4)]$ tartetean, **0,2 puntu.**
 - Jarraitutasuna $x = 0$ puntuan, **0,4 puntu.**
 - Funtzio baten jarraitutasuna puntu batean definitzea, **0,15 puntu.**
 - Alboko limiteak, **0,25 puntu.**
 - Jarraitutasuna $x = 2$ puntuan, **0,4 puntu.**
 - Funtzio baten jarraitutasuna puntu batean definitzea, **0,15 puntu.**
 - Alboko limiteak, **0,25 puntu.**
- b. 0,5 puntu.** Adierazpen grafikoa.
- Zuzen bakoitzaren adierazpena 0,1 puntu, hau da, **0,2 puntu.**
 - Parabolaren adierazpena, **0,3 puntu.**
- c. 1 puntu.** Funtzioak eta OX abzisa-ardatzak mugatutako eskualdearen azalera.
- $A_1 + A_2 + A_3$ integral mugatuen zehaztapena, **0,25 puntu.**
 - Integral mugatuen kalkulua, **0,75 puntu.**
 - A_1 integral mugatuaren kalkulua **0,3 puntu.**
 - A_2 integral mugatuaren kalkulua **0,15 puntu.**
 - A_3 integral mugatuaren kalkulua **0,3 puntu.**

4. PROBLEMA 4.1 ATALA (*gehienez 2,5 puntu*)

a. 0,9 puntu.

- Zuhaitz-diagrama edo eskemaren bat egitea, **0,2 puntu.**
- Probabilitate osoaren formula adieraztea, **0,2 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

b. 0,9 puntu.

- *A posteriori* probabilitatearen formula adieraztea, Bayes-en teorema, **0,2 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,7 puntu.**

c. 0,7 puntu.

- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,2 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

4. PROBLEMA 4.2 ATALA (*gehienez 2,5 puntu*)

a. 0,5 puntu.

- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

b. 0,5 puntu.

- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

c. 0,4 puntu.

- Arrazoitzea gertaera askeak direla, **0,3 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,1 puntu.**

d. 0,3 puntu.

- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,3 puntu.**

e. 0,8 puntu.

- Problemaaren planteamendua, **0,2 puntu.**
- Lehenengo deribatuen kalkulua, **0,2 puntu.**
- Lehenengo deribatua zer baliok baliogabetzen duen, **0,1 puntu.**
- Lehenengo deribatuaren zeinuaren azterketa, **0,1 puntu.**
- Adieraztea zein den minimoa, **0,1 puntu.**
- Txartelaren zenbakia zehaztea, **0,1 puntu.**

5. PROBLEMA 5.1 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

a. 1 puntu.

- Tarte bereizgarria nola adierazten den zehaztea, **0,25 puntu.**
- Aldagaiaren tipifikazioa, **0,25 puntu.**
- Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,15 puntu.**
- Tarte bereizgarria zehaztea, **0,35 puntu.**

b. 0,3 puntu.

- $P(X \geq 228)$ probabilitatea zehaztea, **0,3 puntu.**

c. 0,8 puntu.

- $P(X \leq 210)$ probabilitatea zehaztea, **0,35 puntu.**
- $P(X \leq 200)$ probabilitatea zehaztea, **0,35 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,1 puntu.**

d. 0,4 puntu.

- Laginaren batezbestekoaren banaketa, **0,2 puntu.**
- $P(\bar{X} \leq 207)$ probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

5. PROBLEMA 5.2 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,9 puntu.

- X banaketa binomiala zehaztea, **0,25 puntu.**
- X' banaketa normala zehaztea, **0,25 puntu.**
- $P(X > 1.500)$ -ren kalkulua:
 - Yates zuzenketa egitea, **0,2 puntu.**
 - Probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

b. 0,9 puntu.

- $P(X \geq 1.000)$ -ren kalkulua:
 - Yates zuzenketa egitea, **0,2 puntu.**
 - Probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**
- $P(X \leq 1.100)$ -ren kalkulua:
 - Yates zuzenketa egitea, **0,2 puntu.**
 - Probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,1 puntu.**

c. 0,7 puntu.

- Bakoitia ateratzeko probabilitatearen kalkulua, **0,3 puntu.**
- Lehenengo eta bigarren jaurtiketak askeak direla adieraztea, **0,2 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

EBAZPENAK

1. PROBLEMA

"PERFUMEEN EKOIZPEN ETA SALMENTAREN OPTIMIZAZIOA"

- a) Perfume mota bakoitzetik zenbat litro ekoitzi beharko lirateke ekoizpenaren salmentan diru-sarrera maximoa izan dadin?

	Perfumea	Alkohola	Prezioa	Aldagaiak
A	0,05 L	0,1 L	24 €/ L	x
B	0,1 L	0,15 L	40 €/ L	y
Eskuragarritasuna	70 L	120 L		

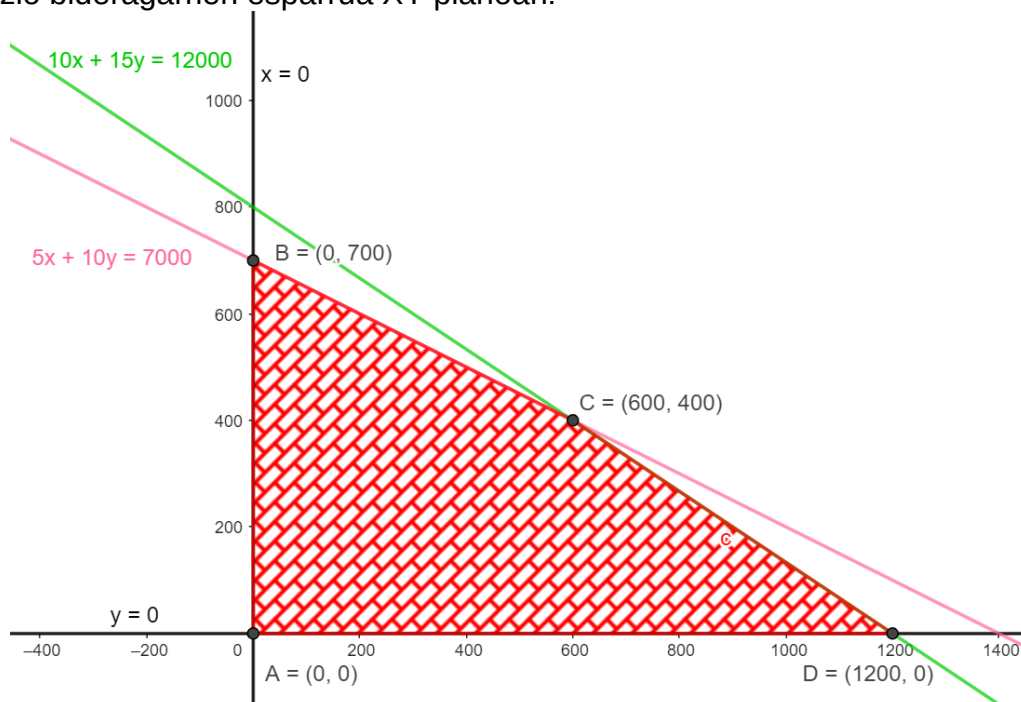
✚ Helburu-funtzioa hau da:

$$f(x, y) = 24x + 40y$$

✚ Murrizketak honako hauek dira:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0,05x + 0,1y \leq 70 \\ 0,1x + 0,15y \leq 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 10y \leq 7.000 \\ 10x + 15y \leq 12.000 \end{cases}$$

✚ Soluzio bideragarrien esparrua XY planoan:



✚ Erpinak hauek dira:

$$A(0,0), \quad B(0,700), \quad C(600,400), \quad D(1200,0)$$

✚ Erpin horietan helburu-funtzioak hartzen dituen balioak kalkulatuko ditugu:

$$f(A) = f(0,0) = 0$$

$$f(B) = f(0,700) = 28.000$$

$$f(C) = f(600,400) = 30.400$$

$$f(D) = f(1200,0) = 28.800$$

✚ Funtzioaren balio maximoa **C(600, 400)** puntuan lortzen da; ondorioz, **A motako 600 litro eta B motako 400 litro** egin behar dira diru-sarrera maximoa lortzeko.

b) Diru-sarrera maximoa:

$$f(x,y) = f(C) = f(600,400) = 30.400$$

Horrela, **diru-sarrera maximoa 30.400 €** da.

2. PROBLEMA

2.1 ATALA

“KUTXAZAINAK EMAN DUEN BILLETE KOPURUA KALKULATZEKO EKUAZIO LINEALETAKO SISTEMA”

a) Planteamendua egingo dugu:

Aldagaiak izango dira:

$$x = 10 \text{ €} - \text{ko billeteen kopurua}$$

$$y = 20 \text{ €} - \text{ko billeteen kopurua}$$

$$z = 50 \text{ €} - \text{ko billeteen kopurua}$$

- Bankutik 290 € atera ditugu $\Rightarrow 10x + 20y + 50z = 290$
- Kutxazainak 8 billete eman dizkigu $\Rightarrow x + y + z = 8$
- 10 €-ko billeteen kopurua 20 €-ko billeteen kopuruaren bikoitza da $\Rightarrow x = 2y$
- Beraz, eratzen den sistema hau da:

$$\begin{cases} 10x + 20y + 50z = 290 \\ x + y + z = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

b) Ekuazio linealetako sistema ebatziko dugu:

$$\begin{cases} 10x + 20y + 50z = 290 \\ x + y + z = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \begin{cases} 3y + z = 8 \\ 40y + 50z = 290 \end{cases} \Rightarrow z = 8 - 3y \Rightarrow$$

$$40y + 50(8 - 3y) = 290 \Rightarrow 40y + 400 - 150y = 290 \Rightarrow 110 = 110y \Rightarrow$$

$$y = 1$$

Beraz:

$$x = 2; y = 1; z = 5$$

2. PROBLEMA

2.2 ATALA

“EKUAZIO LINEALETAKO SISTEMA MATRIZEEN BIDEZ AZTERTU ETA EBAZTEA”

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

a) Ekuazio linealetako sistema ekuazio matrizial baten bidez adieraziko dugu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Koefiziente-matrizeak ba al du alderantzizkorik?

$$A \text{ matrizea erregularra da} \Leftrightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 6 = 0 \Rightarrow A \text{ matrizeak ez du alderantzizkorik.}$$

c) Ekuazio linealetako sistema ebatziko dugu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 3 \cdot F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 3 \cdot F_1$$

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + F_2$$

3. PROBLEMA

3.1 ATALA

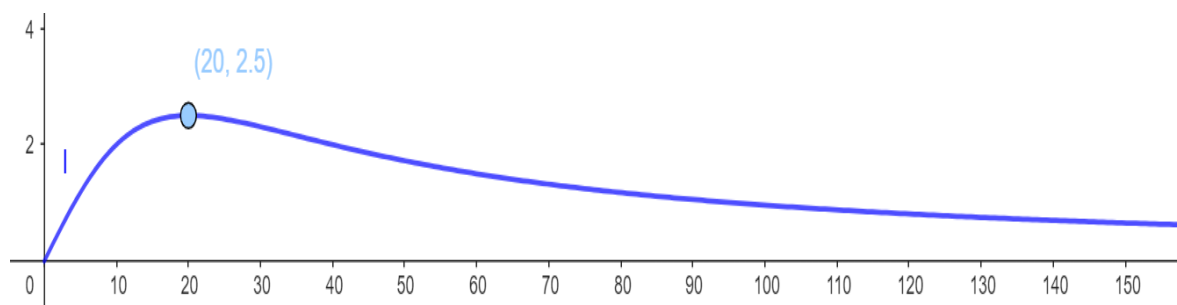
“JOKO-DENBORAREN ARABERA IRABAZIAK OPTIMIZATZEA”

Irabazien/galeren funtzioa $\equiv I(t)$

$$I(t) = \frac{100t}{t^2 + 400}$$

non t neurtzen den minututan eta $I(t)$ milaka eurotan.

a) Kalkulatuko dugu zenbat denbora jokatu behar den ahalik eta gehien irabazteko:



✚ Lehenengo deribatua kalkulatuko dugu:

$$I'(t) = \frac{100 \cdot (t^2 + 400) - 100t \cdot 2t}{(t^2 + 400)^2} = \frac{100 \cdot (400 - t^2)}{(t^2 + 400)^2}$$

✚ Lehenengo deribatua zer baliok baliogabetzen duen aztertuko dugu:

$$I'(t) = 0 \Rightarrow 100 \cdot (400 - t^2) = 0 \Rightarrow 400 - t^2 = 0 \Rightarrow t = \pm 20$$

$t = 20$ baino ez dugu kontuan hartuko t denbora baita, eta, ondorioz, positiboa.

✚ $I(t)$ funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak zehaztuko ditugu:

	(0, 20)	(20, ∞)
$I'(x)$ -ren zeinua	$I'(t) > 0$	$I'(t) < 0$
$I(t)$	↗	↘

✚ Funtzioa bere definizio-eremuan, $(0, \infty)$, jarraitua da, eta $(0, \infty)$ tartean gorakorra, eta, $(20, \infty)$ tartean beherakorra denez; orduan $t = 20$ denbora $I(t)$ funtzioak maximo erlatiboa duela, ondorioztatuko dugu.

Beraz, **irabaziak maximizatzen duen denbora $t = 20$ minutu da, eta denbora horretan lortutako irabazia 2.500 € da.**

b) Zenbat eta denbora gehiago eman jokatzen orduan eta diru gehiago irabazten da?

Ez; izan ere, a) atalean aztertu dugun bezala, funtzioa $(20, \infty)$ tartean beherakorra da, **eta**, beraz, irabaziak murriztu egiten dira 20. minututik aurrera.

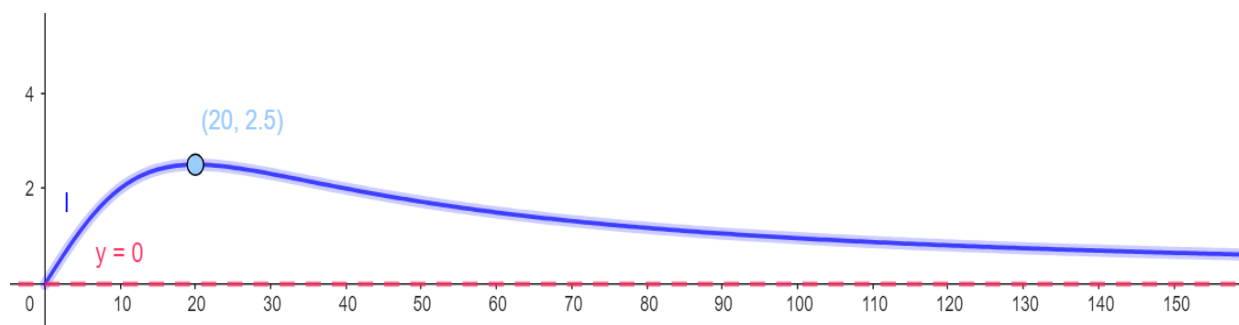
Ondorioztatuko dugu **ez dela gehiago irabazten denbora gehiago jokatuz.**

c) Gerta daiteke dirua galtzea denbora gehiegi emanez gero?

$I(t)$ funtzioak ez du inoiz balio negatiborik hartzen, zenbakitzailea eta izendatzailea ere positiboak baitira, $t > 0$ balioetarako.

Beraz, **ezin da dirua galdu**, baina irabaziak hutsalak bihur daitezke jokoa luzatzen baldin bada. Hau da, denbora optimotik harago jokatzeak irabaziak murrizten ditu progresiboki, baina ez da dirurik galtzen.

d) Zein da irabazien/galeren bilakaeraren joera? Funtzioaren ezaugarriren batekin lotzen duzu?



Minutuak pasatu ahala irabazien/galeren bilakaeraren joera aztertzeko, $I(t)$ funtzioaren limitea kalkulatu dugu, $t \rightarrow \infty$ –ra doanean.

Hau da:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{100t}{t^2 + 400} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{100}{t + \frac{400}{t}} = 0$$

Beraz, irabaziak/galerak **0 €-ko irabazien inguruan egonkortuko dira.**

$y = 0$ zuzena $I(t)$ funtzioaren asintota horizontal bat da, eta, denbora pasatu ahala, funtzioak joera hori du.

3. PROBLEMA

3.2 ATALA

**“FUNTZIO BATEN JARRAITUTASUNA AZTERTZEA. FUNTZIO BATEN BALIOAK ETA ABZISA-
ARDATZAREKIN OSATZEN DUEN EREMUA KALKULATZEA.”**

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{baldin eta } -2 \leq x < 0 & \text{bada} \\ -x + 2 & \text{baldin eta } 0 \leq x < 2 & \text{bada} \\ x^2 - 4x + 4 & \text{baldin eta } 2 \leq x \leq 4 & \text{bada} \end{cases}$$

a) Jarraitutasuna $(-2, 4)$ tartean.

- $f(x)$ jarraitua da $(-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 4)$ tarteen, polinomioak izateagatik.
- Jarraitutasuna $x = 0$ puntuan aztertuko dugu:

$$f(x) \text{ jarraitua } x = 0 \text{ puntuan} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

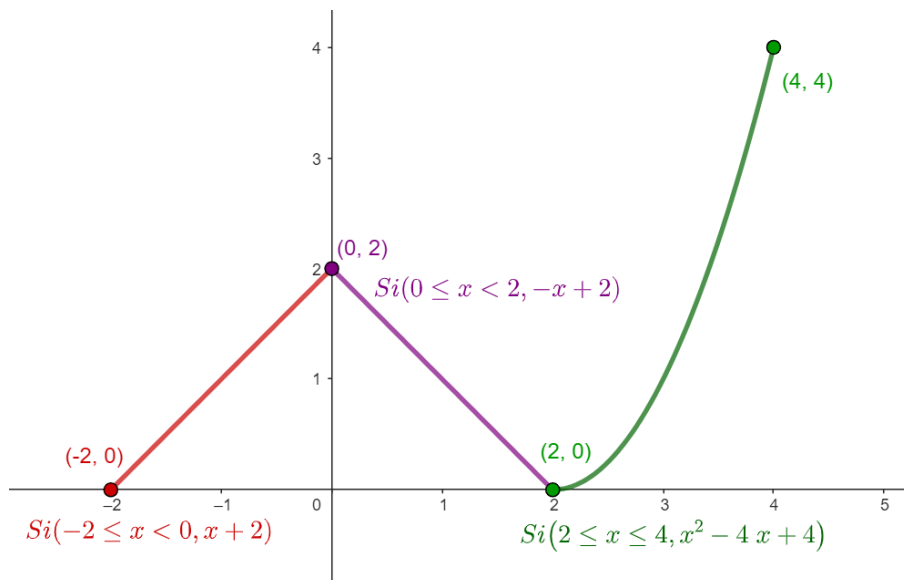
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 2) = 2$
- $f(0) = 2$
- Ondorioz, $f(x)$ jarraitua da $x = 0$ puntuan.
- Jarraitutasuna $x = 2$ puntuan jarraitutasuna aztertuko dugu:

$$f(x) \text{ jarraitua da } x = 2 \text{ puntuan} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x + 2) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4x + 4) = 0$
- $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0$
- Ondorioz, $f(x)$ jarraitua da $x = 2$ puntuan.

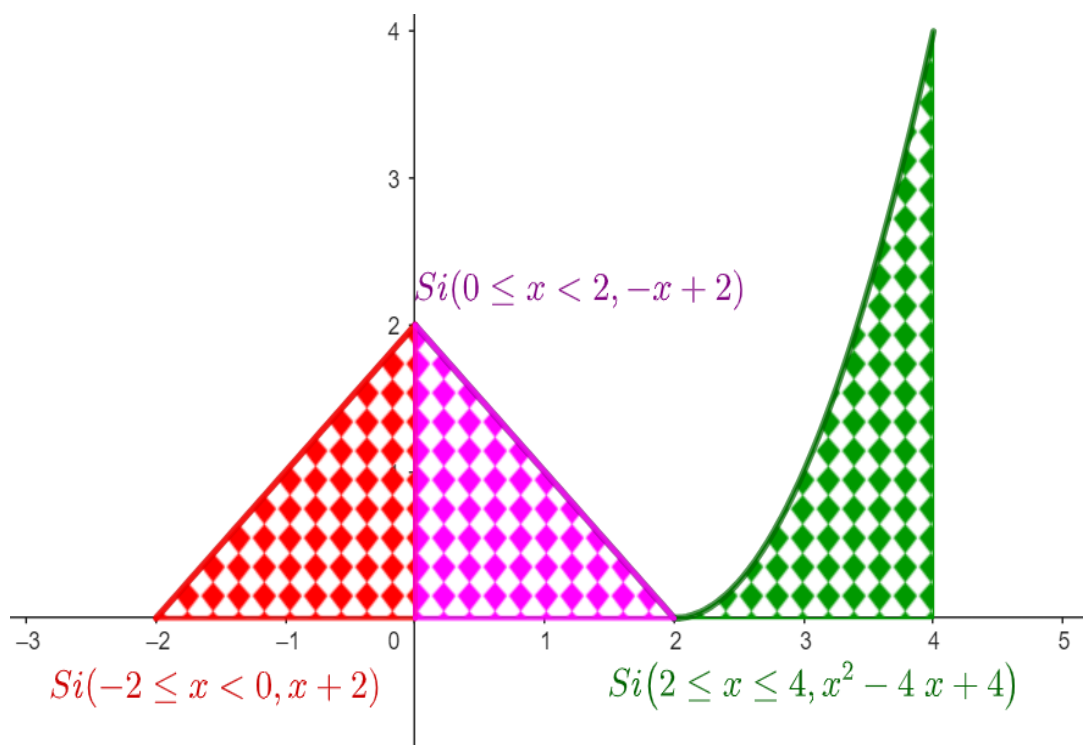
Beraz, $f(x)$ jarraitua da $(-2, 4)$ tartean.

b) Funtzioaren adierazpen grafikoa.



c) Funtzioak eta OX abzisa-ardatzak mugatutako eskualdearen azalera.

$A = A_1 + A_2 + A_3$




 $(-2, 0)$ tartean azalera $\equiv A_1$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_0^2 [(-x + 2) - 0] dx = \int_0^2 (-x + 2) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = \\
 &= (-2 + 4) - 0 = 2 u^2
 \end{aligned}$$


 $(0, 2)$ tartean azalera $\equiv A_2$

$$A_2 = A_1 = 2 u^2$$


 $(2, 4)$ tartean azalera $\equiv A_3$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \int_2^4 [(x^2 - 4x + 4) - 0] dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} + 4x \right]_2^4 = \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_2^4 = \left(\frac{64}{3} - 32 + 16 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 8 \right) = \\
 &= \frac{56}{3} - 16 = \frac{8}{3} u^2
 \end{aligned}$$

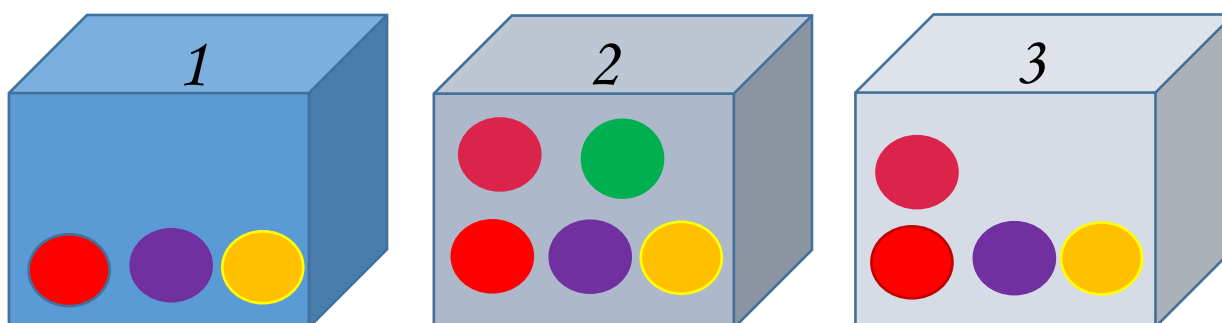
Beraz:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 2 + 2 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} u^2$$

4. PROBLEMA

4.1 ATALA

“BOTOI GORRI BAT ATERATZEKO ETA HAREN JATORRIA ZEHAZTEKO PROBABILITATEA.”



a) Botoia gorria izateko probabilitatea kalkulatu dugu.

Gertaerak honako hauek dira:

- $G \equiv \text{Botoi gorria ateratzea}$
- $K_1 \equiv \text{Lehenengo kutxakoa izatea}$
- $K_2 \equiv \text{Bigarren kutxakoa izatea}$
- $K_3 \equiv \text{Hirugarren kutxakoa izatea}$

Probabilitate osoaren formula erabiliko dugu:

$$\begin{aligned}
 P(G) &= P(K_1) P(G | K_1) + P(K_2) P(G | K_2) + P(K_3) P(G | K_3) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} = \frac{47}{180} = 0,2611 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$P(G) = \% 26,11$$

b) Atera dudan botoia gorria izan baldin bada, zein da lehenengo kutxatik atera izanaren probabilitatea?

A posteriori probabilitatearen formula erabiliko dugu:

$$P(K_1|G) = \frac{P(K_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{P(K_1) \cdot P(G | K_1)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{47}{180}} = \frac{20}{47} = 0,4255 \Rightarrow P(K_1|G) = \% 42,55$$

c) Hiru kutxetako botoiak poltsa batean elkartzen dira, eta, zoriz, lau botoi aterako ditugu itzulerarekin. Zein da hiru botoi gorri izateko probabilitatea?

$$\begin{aligned}
 P(3 \text{ botoi gorri eta beste bat gorri ez}) &= \\
 &= P(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4^c) + (G_1 \cap G_2 \cap G_3^c \cap G_4) + \\
 &\quad + (G_1 \cap G_2^c \cap G_3 \cap G_4) + (G_1^c \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4) = \\
 &= 4 \cdot P(G_1^c \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4) = 4 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 0,04687 \Rightarrow \\
 &\quad P(3 \text{ gorri eta beste bat ez}) = \% 4,69
 \end{aligned}$$

BESTE MODU BAT

$X \equiv$ botoi gorrien kopurua $\equiv B(n, p)$

- $n = 4$
- Gorria izateko probabilitatea kalkulatu dugu:

$$p = P(\text{gorria}) = \frac{3}{12} = 0,25 \Rightarrow q = 1 - p = 0,75$$

$$\Rightarrow X \equiv B(4, 0,25)$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^1 = 0,04687 \Rightarrow \% 4,69$$

4. PROBLEMA

4.2 ATALA

“PROBABILITATEEN KALKULUA 000TIK 999RAKO ZENBAKIEN ZOZKETAN”

a) Saritutako zenbakiak 5ez amaitzeko probabilitatea kalkulatu dugu:

- Zenbakiak 000tik 999ra doaz, eta, beraz, guztira 1.000 zenbaki posible daude.
- 5ez amaitzen diren zenbakiak honako hauek dira:

$\{x05, x15, x25, x35, x44, x55, x65, x75, x85, x95\}$

Beraz, 10 aukera daude, eta, aldi berean, x-k hamar balio har ditzake:

- $x = \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$
- $10 \cdot 10 = 100$

Beraz, 100 zenbaki bukatzen dira 5ez.

- Probabilitatea Laplaceren erregelarekin kalkulatu dugu:

$$P(5ez amaitu) = \frac{100}{1.000} = 0,1 \Rightarrow \% 10$$

b) Saritutako zenbakiak 55ez amaitzeko probabilitatea kalkulatu dugu:

- Zenbakia 55ez amaitzen bada, orduan, zenbakiak honako hauek dira:

$\{055, 155, 255, 355, 455, 555, 655, 755, 855, 955\}$

Eta zenbaki horiek 10 dira.

- Probabilitatea Laplaceren erregelarekin kalkulatu dugu:

$$P(55ez amaitu) = \frac{10}{1.000} = 0,01 \Rightarrow \% 1$$

c) Atzo saritutako zenbakia 5ez bukatzen zela jakinda, kalkulatu dugu gaur ere saritutako zenbakia 5ez bukatzeko probabilitatea:

Egun bakoitzeko esperimientua askea da; beraz, bukaera baten probabilitatea ez dute baldintzatuko beste egun batzuetako bukaerek.

Beraz, lehenengo atalean kalkulatu dugun probabilitatea bera izango da:

$$P(\text{gaur 5ez amaitu} | \text{atzo 5ez amaitu zen}) = P(5ez amaitu) = \\ = \frac{100}{1.000} = 0,1 \Rightarrow \% 10$$

d) Saritutako zenbakia palindromoa (kapikua) izateko probabilitatea kalkulatu dugu:

Zenbaki palindromoa ezkerretik eskuinera eta eskuinetik ezkerrera berdin irakurtzen den zenbakia da.

Beraz, 000tik 999ra zenbakitutako txarteletan, palindromoa izateak esan nahi du lehen digituak eta hirugarren digituak berdinak izan behar dutela.

Hau da, zenbaki palindromoak dituzten txartelak hauek dira:

$$\{ 0x0, 1x1, 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6, 7x7, 8x8, 9x9 \}$$

non $x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ den.

Orduan, zenbaki palindromoak dituzten $10 \cdot 10 = 100$ txartel ditugu.

Beraz:

$$P(\text{palindromoa}) = \frac{100}{1.000} = 0,1 \Rightarrow \% 10$$

e) Zenbakitutako txartelen artean, aurkituko dugu baldintza betetzen duen zenbakia duen txartela:

- Bilatzen dugun zenbakiari x deitzen diogu.
- Minimizatu behar dugun funtzioa honako hau da:

$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

- Kalkulatuko dugu lehenengo deribatua eta zer baliok baliogabetzen duen:

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x = \pm 5$$

- $x \geq 0 \Rightarrow x = 5$
- Lehenengo deribatuaren zeinua aztertuko dugu:

	(0, 5)	(5, 999)
$f'(x)$ -ren zeinua	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

- (0, 999) tartean funtzioa jarraitua da.

Beraz, funtzioak $x = 5$ puntuan minimoa erlatiboa du; hau da, **bilatutako zenbakia 5 da**,
 eta, beraz, txartela 005 zenbakia duena da.

5. PROBLEMA

5.1 ATALA

“BANAKETA NORMALA ULERTZEA, ERABILTZEA ETA PROBABILITATEAK KALKULATZEA.”

a) % 80rako tarte bereizgarria.

$$\text{bariantza} = 144 \Rightarrow \sigma = \sqrt{144} = 12$$

$$X \equiv \text{A.A. aplikaziora konektatuta egunero pasatutako denbora} \equiv \mathcal{N}(210, \sigma = 12)$$

% 80rako tarte bereizgarria $(210 - e, 210 + e)$ da non $P(210 - e \leq X \leq 210 + e) = 0,8$

$$P(210 - e \leq X \leq 210 + e) = 0,8 \Rightarrow P(X \leq 210 + e) - P(X \leq 210 - e) = 0,8$$

TIPIFIKAZIOA:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 210}{12} \Rightarrow X = 12Z + 210$$

$$P(X \leq 210 + e) = P(12Z + 210 \leq 210 + e) =$$

$$= P(12Z \leq e) = P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right)$$

$$P(X \leq 210 - e) = P(12Z + 210 \leq 210 - e) =$$

$$= P(12Z \leq -e) = P\left(Z \leq \frac{-e}{12}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right)\right] = 0,8 \Rightarrow -1 + 2P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) = 0,8 \Rightarrow$$

$$P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) = 0,9$$

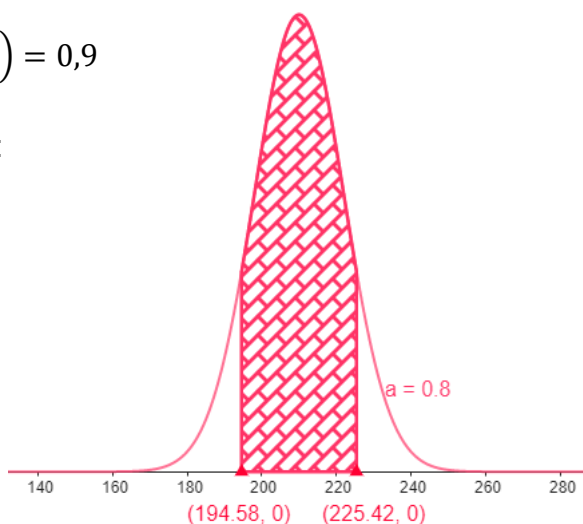
Orduan, banaketa normalaren taulari begiratuz:

$$\frac{e}{12} = 1,285 \Rightarrow e = 15,42$$

Beraz, % 80rako tarte bereizgarria hau da:

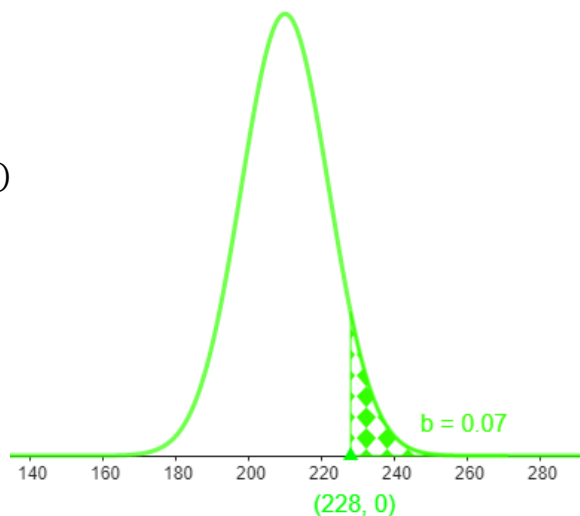
$$(210 - e, 210 + e) = (194,58, 225,42)$$

b) $P(X \geq 228)$



$$\begin{aligned}
 P(X \geq 228) &= P(12Z + 210 \geq 228) = \\
 &= P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) \\
 &= 1 - 0,9332 = 0,0668 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$P(X \geq 228) = \% \mathbf{6,68}$$

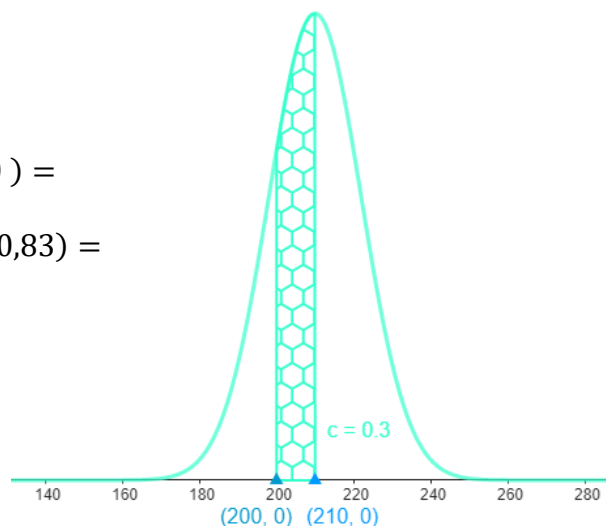


c) $P(200 \leq X \leq 210)$

$$P(200 \leq X \leq 210) = P(X \leq 210) - P(X \leq 200)$$

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 210) &= P(12Z + 210 \leq 210) = \\
 &= P(Z \leq 0) = 0,5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 200) &= P(12Z + 210 \leq 200) = \\
 &= P(Z \leq -0,83) = P(Z \geq 0,83) = \\
 &= 1 - P(Z \leq 0,83) = \\
 &= 1 - 0,7967 = 0,2033
 \end{aligned}$$



Beraz:

$$P(200 \leq X \leq 210) = 0,5 - 0,2033 = 0,2967 = \% \mathbf{29,67}$$

d) 30 tamainako lagin simple bat zoriz aukeratuta, zein da adimen artifizialeko aplikaziorako batez besteko konexio-denbora 207 minutu baino txikiagoa izateko probabilitatea?

- Adieraziko dugu zein den laginaren batezbestekoaren banaketa, $\bar{X}$:

$\bar{X} \equiv \mathcal{N}(210, 12)$

$\bar{X}$ laginaren batezbestekoaren banaketa hau da:

$$\bar{X} \equiv \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\bar{X} \equiv \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(210, \frac{12}{\sqrt{30}}\right) = \mathcal{N}(210, 2,19) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{X} \equiv \mathcal{N}(210, 2,19)$$

- $P(\bar{X} \leq 207)$ kalkulatu dugu:

$\bar{X}$ aldagaiaren tipifikazioa:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 210}{2,19} \Rightarrow \bar{X} = 2,19 Z + 210$$

$$P(\bar{X} \leq 207) = P(2,19 Z + 210 \leq 207) =$$

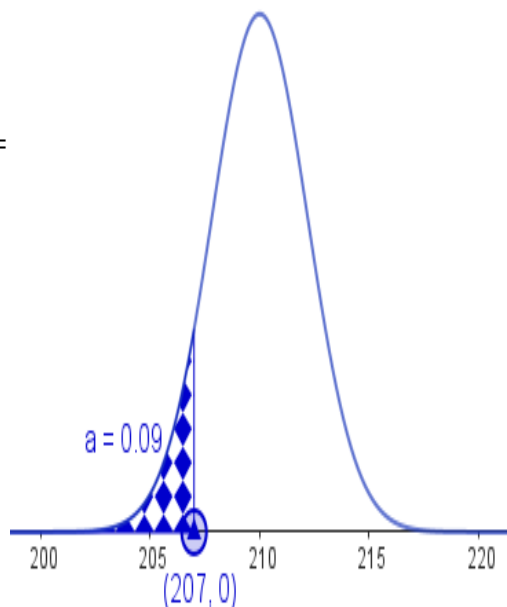
$$= P(Z \leq -1,37) = P(Z \geq 1,37) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,37) =$$

$$= 1 - 0,9147 = 0,0853$$

Beraz:

$$P(\bar{X} \leq 207) = 0,0853 = \% 8,53$$



5. PROBLEMA

5.2 ATALA

"DADO JAURTIKETA PROBABILITATEEN AZTERKETA: OREKATUAK ETA KARGATUAK"

✚ $X \equiv$ bostekoen kopurua banaketa binomial bati jarraitzen dion aldagaia da:

$$p = \frac{1}{6} = 0,1\hat{6} \Rightarrow q = (1 - p) = 0,8\hat{3}$$

✚ $X \equiv$ bostekoen kopurua $\equiv B(n, p) = B(6.000, 0,1\hat{6})$

✚ $X \equiv B(6.000, 0,167) \Rightarrow X' \sim N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 n \cdot p &= 6.000 \cdot 0,1\hat{6} = 1.000 > 5 \\
 n \cdot q &= 6.000 \cdot 0,8\hat{3} = 5.000 > 5
 \end{aligned}$$

$$X' \sim N(6.000 \cdot 0,1\hat{6}, \sqrt{6.000 \cdot 0,1\hat{6} \cdot 0,8\hat{3}}) = N(1.000, \sqrt{833, \hat{3}}) \Rightarrow$$

$$X' \sim N(1.000, 28,87)$$

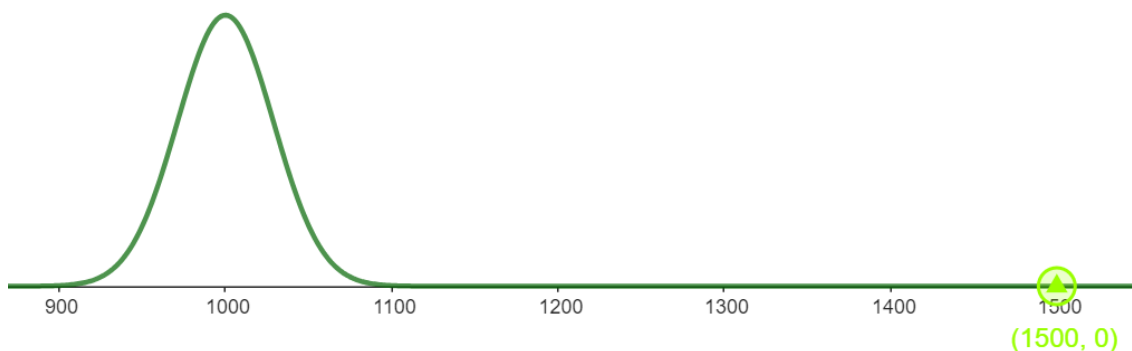
a) $P(X > 1.500)$ kalkulatu dugu:

$$P(X > 1.500) = P(X' > 1.500,5) = 1 - P(X' \leq 1.500,5) =$$

YATES ZUZENKETA

$$= 1 - P\left(\frac{X' - 1.000}{28,87} \leq \frac{1.500,5 - 1.000}{28,87}\right) = 1 - P(Z \leq 17,33) = 0 \Rightarrow$$

$$P(X > 1.500) = 0$$



b) $P(1.000 \leq X \leq 1.100)$ kalkulatu dugu:

$$\begin{aligned}
 P(1.000 \leq X \leq 1.100) &= P(X \leq 1.100) - P(X \leq 1.000) = \\
 &= P(X' < 1.100,5) - P(X' < 1.000,5)
 \end{aligned}$$

YATES ZUZENKETA

○ $P(X' < 1.100,5)$

$$\begin{aligned}
 P(X' < 1.100,5) &= P\left(\frac{X' - 1.000}{28,87} \leq \frac{1.100,5 - 1.000}{28,87}\right) = \\
 &= P(Z \leq 3,48) = 0,9997
 \end{aligned}$$

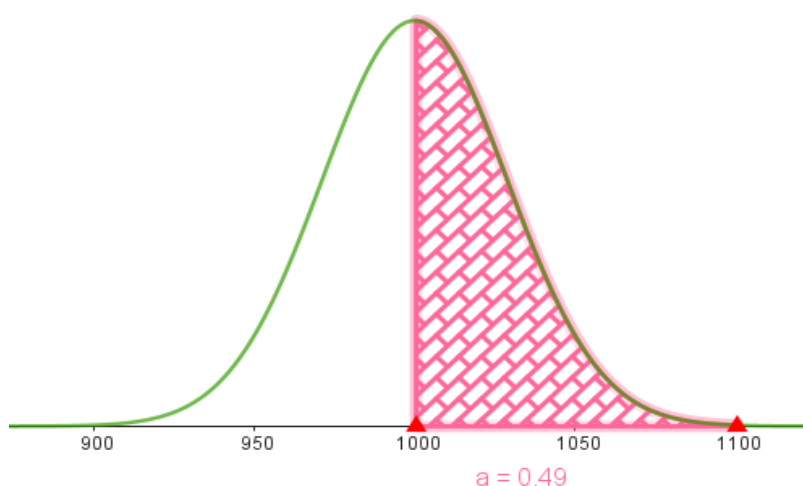
○ $P(X' < 1.000,5)$

$$P(X' < 1.000,5) = P\left(\frac{X' - 1.000}{28,87} \leq \frac{1.000,5 - 1.000}{28,87}\right) = P(Z \leq 0,017) = 0,5060$$

Beraz:

$$P(1.000 \leq X \leq 1.100) = P(X' < 1.100,5) - P(X' < 1.000,5) = 0,9997 - 0,5060 = 0,4937$$

$$\Rightarrow P(1.000 \leq X \leq 1.100) = 0,4937$$



- c) Kargatutako dadoa bi aldiz jaurtitzen bada, kalkulatu dugu zein den bi jaurtiketetan zenbaki bakoitia lortzeko probabilitatea:

- Hau izango da:

$$P(\text{bikoitia}) = p \Rightarrow P(\text{bakotia}) = 3p$$

- Probabilitate guztien batura 1 denez:

$$P(\text{bikoitia}) + P(\text{bakotia}) = 1 \Rightarrow p + 3p = 1 \Rightarrow 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

- Beraz:

$$P(\text{bikoitia}) = 3p = \frac{3}{4}$$

- Lehenengo jaurtiketa eta bigarren jaurtiketa gertaerak askeak dira:

$$Ba_1 \equiv \text{lehenengo jaurtiketan bakoitia izatea}$$

$$Ba_2 \equiv \text{bigarren jaurtiketan bakoitia izatea}$$

Beraz:

$$P(Ba_2 \mid Ba_1) = P(Ba_2)$$

- Eskatutako probabilitatea kalkulatu dugu:

$$P(Ba_1 \cap Ba_2) = P(Ba_1) \cdot P(Ba_2 \mid Ba_1) = P(Ba_1) \cdot P(Ba_2) =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \Rightarrow P(Ba_1 \cap Ba_2) = \frac{9}{16}$$