

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

- Azterketa honek LAU problema ditu. HIRUGARREN eta LAUGARREN problemetan, bi aukeretatik bati bakarrik erantzun behar zaio. Biei erantzunez gero, azterketa-orrietan lehenengo agertzen dena soilik zuzenduko da.
- Erantzunek boligrafo urdin edo beltzez idatzita egon behar dute (beharbada, grafikoak izan ezik). Ezingo da ez arkatza ez ezabagarri den boligraforik erabili.
- Azterketa 0 eta 10 puntu arteko kalifikazioarekin baloratuko da.
- Problema batek hainbat atal dituenean, azterketaren enuntziatuan agertzen da atal bakoitzari dagokion puntuazioa.
- Ebazteko erabili beharreko metodoa zehazten ez den galderetan, edozein ebazpen-modu zuzen onartuko da.
- Azterketa-orrietan, problema bakoitza ebazteko beharrezkoak diren eragiketa eta kalkuluz guztiek agertu beharko dute. Erantzun guztiek behar bezala justifikatuta egon beharko dute; izan ere, azalpenik gabeko emaitza bakarrik agertzen bada, problemak zero puntu izango ditu.
- Problema baten ebazpenean zehar neurri-unitateen erabileran homogeneousotasunik ez badago, 0,5 puntu kenduko dira.

PROBLEMA BAKOITZAREN KALIFIKAZIO-IRIZPIDEAK

1. PROBLEMA (2 puntu)

(a) **0,75 puntu.**

- Aldagaiak definitzea: **0,25 puntu.**
- Helburu-funtzioak erpinetan duen balioa kalkulatzeko: **0,25 puntu.**
- Murrizketak zehaztea: **0,25 puntu.**

(b) Soluzio bideragarrien eremua irudikatzea: **0,75 puntu.**

(c) **0,5 puntu.**

- Helburu-funtzioa erpinetan ebaluatzea: **0,25 puntu.**
- Balio maximoa zehaztea: **0,25 puntu.**

2. PROBLEMA (3 puntu)

(a) **1 puntu.**

- Problemako datuak matematikoki adieraztea: **0,25 puntu.**
- Probabilitate hori probabilitate osoaren teorema erabiliz, zuhaitz-diagrama baten bidez, kontingentzia-taula baten bidez (edo baliokidea den edozein metodo baliadun bidez) planteatzea: **0,25 puntu.**
- Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko: **0,5 puntu.**

(b) **1 puntu.**

- Eskatutako probabilitate baldintzatua identifikatzea: **0,25 puntu.**
- Probabilitate hori Bayesen teorema erabiliz, zuhaitz-diagrama baten bidez, kontingentzia-taula baten bidez (edo baliokidea den edozein metodo baliadun bidez) planteatzea: **0,25 puntu.**
- Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko: **0,5 puntu.**

(c) **1 puntu.**

- Konparaziorako beharrezkoa den probabilitate baldintzatua kalkulatzeko: **0,5 puntu.**
- Galderari behar bezala arrazoituta erantzutea: **0,5 puntu.**

3. PROBLEMA (3 puntu)

3A AUKERA

(a) **1 puntu.**

- Tarte gorakorrek eta beherakorrek kalkulatzea: **0,5 puntu.**
- Mutur erlatiboak zehaztea: **0,5 puntu.**

(b) **1 puntu.**

- Ahurtasuna eta ganbeltasuna aztertzea: **0,5 puntu.**
- Inflexio-puntua kalkulatzea: **0,5 puntu.**

(c) **1 puntu.**

- Ukitze-puntua kalkulatzea: **0,5 puntu.**
- Zuzen ukitzailea zehaztea: **0,5 puntu.**

3B AUKERA

(a) Diru-sarreraren funtzioa adieraztea: **0,5 puntu.**

(b) Irabaziaren funtzioa adieraztea: **0,5 puntu.**

(c) Eskatutako x -ren balioak kalkulatzea: **0,5 puntu.**

(d) **0,5 puntu.**

- Unitate kopurua zehaztea: **0,25 puntu.**
- Irabazia kalkulatzea: **0,25 puntu.**

(e) Integrala kalkulatzea: **1 puntu.**

4. PROBLEMA (2 puntu)

4A AUKERA

(a) **0,5 puntu.**

- A^t kalkulatzeko: **0,25 puntu.**
- $\det A$ kalkulatzeko: **0,25 puntu.**

(b) **0,5 puntu.**

- Kalkulatzeko a -ren zein balioetarako existitzen den A^{-1} : **0,25 puntu.**
- $a \neq 2$ balioetarako A^{-1} kalkulatzeko: **0,25 puntu.**

(c) **0,5 puntu.**

- $a \neq 2$ balioetarako ekuazioa ebaztea: **0,25 puntu.**
- $a = 2$ balioetarako soluziorik ez dagoela frogatzea: **0,25 puntu.**

(d) C kalkulatzeko: **0,5 puntu.**

4B AUKERA

(a) **0,5 puntu**

- Sistema matrize-forman idaztea: **0,25 puntu.**
- Eskatutako determinantea kalkulatzeko: **0,25 puntu.**

(b) Eskatutako b -ren balioak kalkulatzeko: **0,25 puntu.**

(c) **0,75 puntu.**

- $b \neq 1$ eta $b \neq 2$ kasuak aztertzea: **0,25 puntu.**
- $b = 1$ kasua aztertzea: **0,25 puntu.**
- $b = 2$ kasua aztertzea: **0,25 puntu.**

(d) Eskatutako sistema ebaztea: **0,5 puntu.**

ERANTZUNAK

1. PROBLEMA

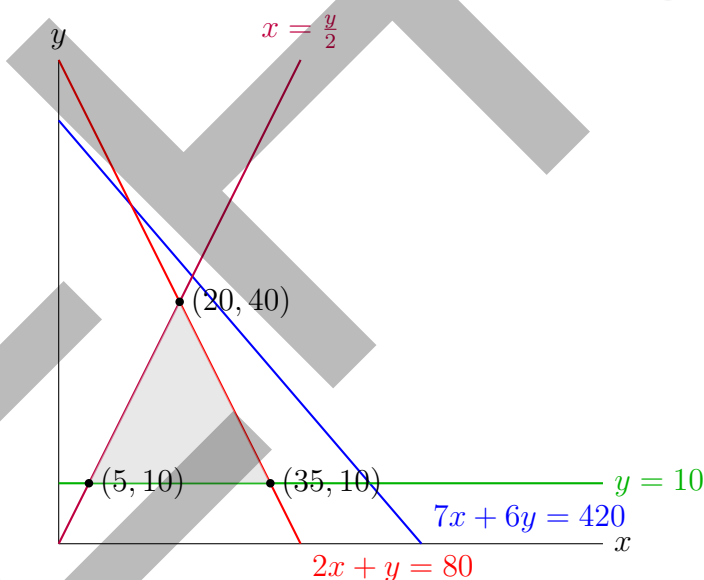
(a) x eta y aldagaiek, hurrenez hurren, A eta B motako gozokien kopurua adierazten dute.

Helburu-funtzioa honako hau da: $f(x, y) = 5x + 4y$.

Murrizketak hauek dira:

$$\begin{cases} 70x + 60y \leq 4200 \Leftrightarrow 7x + 6y \leq 420 \\ 20x + 10y \leq 800 \Leftrightarrow 2x + y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq \frac{y}{2} \end{cases}$$

(b) Eremu bideragarria honako hau da:



Eremu bideragarriaren erpinak hauek dira: $(5, 10)$, $(35, 10)$ eta $(20, 40)$.

(c) Helburu-funtzioa erpin bakoitzean ebaluatuz, honako balio hauek lortzen dira: $f(5, 10) = 65$, $f(35, 10) = 215$ eta $f(20, 40) = 260$.

Beraz, diru-sarrera maximoa lortzeko, A motako 20 gozoki eta B motako 40 gozoki egin behar dira, eta gehieneko diru-sarrera 260 eurokoa izango da.

2. PROBLEMA Honako gertaera hauek definitzen dira: R = “aurrez aurreko modalitatean ikastea”, V = “modalitate birtualean ikastea” eta A = “jakintzagaia gainditzea”.

(a) Problemaren datuak: $P(R) = 0,6$, $P(A|V) = 0,2$ y $P(A|R) = 0,35$.

$$P(A) = P(A|R)P(R) + P(A|V)P(V) = 0,35 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot (1 - 0,6) = 0,29.$$

(b) $P(R|A) = \frac{P(A|R)P(R)}{P(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,6}{0,29} = \frac{21}{29} = 0,7241$.

(c) $P(V|A) = \frac{P(A|V)P(V)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,29} = \frac{8}{29} = 0,2759$. Beste modu batera: $P(V|A) = 1 - P(R|A) = 0,2759$.

$P(R|A) > P(V|A)$ denez, probabilitate handiagoa dago jakintzagaia gainditu duen ikasleak aurrez aurreko modalitatean ikasia izateko.

3. PROBLEMA

(3A AUKERA)

(a) Lehen deribatua honako hau da: $f'(x) = 3x^2 - 3$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Beraz, $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ edo $x > 1$. Hortaz, $f(x)$ gorakorra da $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ tartetan.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > -1$ eta $x < 1$. Hortaz, $f(x)$ beherakorra da $x \in (-1, 1)$ tartean.

Bigarren deribatua honako hau da: $f''(x) = 6x$.

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow (-1, 3)$ muturra maximo erlatiboa da.

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow (1, -1)$ muturra minimo erlatiboa da.

(b) $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Hortaz, $f(x)$ ahurra da $x \in (0, \infty)$ tartean.

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$. Hortaz, $f(x)$ ganbila da $x \in (-\infty, 0)$ tartean.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Gainera, hirugarren deribatua $f'''(x) = 6 \neq 0$. Ondorioz, $(0, 1)$ inflexio-puntu bakarra da.

(c) $f(1) = -1$ eta $f'(1) = 0$ direnez, ukitzaile zuzenaren ekuazioa honako hau da: $y - (-1) = 0(x - 1)$, hau da, $y = -1$.

(3B AUKERA)

(a) $I(x) = p(x)x = 100x - 2x^2$.

(b) $B(x) = I(x) - C(x) = -3x^2 + 90x - 600$.

(c) $B(x) = -3x^2 + 90x - 600 = -3(x - 10)(x - 20)$. $B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (10, 20)$.

(d) Irabaziaren deribatua honako hau da: $B'(x) = -6x + 90$. $B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$. Bigarren deribatua $B''(x) = -6$ da, eta negatiboa denez, gehieneko balioa lortzen da. Beraz, enpresak 15 unitate ekoitzi behar ditu. Gainera, $B(15) = 75$ denez, gehieneko irabazia 75000 eurokoa da.

(e) $\int_{10}^{20} \left(C(x) + \frac{1}{p(x)} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 5x^2 + 600x - \frac{1}{2} \ln(100 - 2x) \right) \Big|_{10}^{20} = \frac{29500}{3} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{3} \right)$.

4. PROBLEMA
(4A AUKERA)

(a) $A^t = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = a - 2$.

(b) A matrizearen alderantzizkoa existitzen da baldin eta soilik baldin $\det A \neq 0$ bada; hau da, $a \neq 2$ bada.

$a \neq 2$ bada, $A^{-1} = \frac{1}{a-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix}$.

(c) $a \neq 2$ denean, $X = A^{-1}(I - B) = \frac{1}{a-2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & -a \end{pmatrix}$.

$a = 2$ denean, $AX = I - B$ ekuazioa honako hau da: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Har

bedi $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Orduan, $2x_{11} + x_{21} = 0$ eta $2x_{11} + x_{21} = -1$ lortzen dira, eta hori ezinezkoa da. Beraz, $a = 2$ denean, sistemak ez du soluziorik.

(d) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(4B AUKERA)

(a) Sistema era matrizialean:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ b+3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Koefizienteen matrizeari A deituko diogu: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$. Determinantearen balioa:

$$\det A = b^2 - 3b + 2.$$

(b) A alderantzgarria da $\det A \neq 0$, hau da, $b \neq 1$ eta $b \neq 2$ direnean.

(c) $b \neq 1$ eta $b \neq 2$ direnean, sistema bateragarria eta zehaztua da, eta soluzio bakarra du.

$b = 1$ denean, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eta A -ren heina 2 da. Matrize hedatua $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ eta horren heina 3 da. Beraz, sistema bateraezina da eta ez du soluziorik.

$b = 2$ denean, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ eta A -ren heina 2 da. Matrize hedatua $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ eta horren heina 3 da. Beraz, sistema bateraezina da eta ez du soluziorik.

(d) $b = 0$ denean, sistema honako hau da

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + z = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}.$$

Eta soluzioa: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{7}{2}$ eta $z = 2$ da.