

LEHENENGO ARIKETA.

300 K-ko tenperaturan dauden nitrogeno molekulen abiaduraren lehenengo osagaiak, X -ren bidez adieraziko dugunak, $N(0, 298)$ banaketari jarraitzen dio. Izan bedi Z zorizko aldagaia, $N(0, 1)$ banaketari jarraitzen diona.

(a) Honako hau dugu:

$$\begin{aligned} P(|X| < 300) &= P(-300 < X < 300) = P\left(-\frac{300}{298} < Z < \frac{300}{298}\right) = P(-1,01 < Z < 1,01) \\ &= P(Z < 1,01) - P(Z < -1,01) = P(Z < 1,01) - (1 - P(Z < 1,01)) \\ &= 2P(Z < 1,01) - 1 = 2 \cdot 0,8438 - 1 = 0,6876. \end{aligned}$$

(b) Honako hau dugu:

$$\begin{aligned} P(-600 < X < -300) &= P\left(-\frac{600}{298} < Z < -\frac{300}{298}\right) = P(-2,01 < Z < -1,01) \\ &= P(Z < -1,01) - P(Z < -2,01) \\ &= 1 - P(Z < 1,01) - (1 - P(Z < 2,01)) \\ &= P(Z < 2,01) - P(Z < 1,01) = 0,9778 - 0,8438 = 0,134. \end{aligned}$$

(c) Demagun hauek ditugula: m_N nitrogeno molekula baten masa, $\sigma_N = k_B T / m_N$, m_A argon molekula baten masa eta $\sigma_A = k_B T / m_A$. Jakina denez $m_N < m_A$ dela, $\sigma_N > \sigma_A$ da. Baldin X^N nitrogeno molekulen abiaduraren lehen osagaia bada eta X^A argon molekulen abiaduraren lehen osagaia bada, orduan $\frac{300}{\sigma_A} > \frac{300}{\sigma_N}$ da, eta bere barruan tarte bat duen tartearen probabilitatea barruan duenaren probabilitatea baino handiagoa da; beraz,

$$P(|X^A| < 300) = P\left(|Z| < \frac{300}{\sigma_A}\right) > P\left(|Z| < \frac{300}{\sigma_N}\right) = P(|X^N| < 300).$$

BIGARREN ARIKETA.

Izan bedi A sistemaren koefizienteen matrizea,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & a & a-1 \end{pmatrix}.$$

(a) Honako hau dugu:

$$\det A = a(a-1) + a(a-2) - a(a-1) - a = a(a-3).$$

$a \neq 0$ denez, sistemak soluzio bat baino gehiago izateko aukera bakarra da $a = 3$ izatea. Kasu horretan,

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array} \right).$$

Koefizienteen matrizearen heina eta matrize zabalduaren heina 2 da; beraz, sistema bateragarri indeterminatua da, eta infinitu soluzio ditu.

(b) Honako sistema baliokide hau dugu:

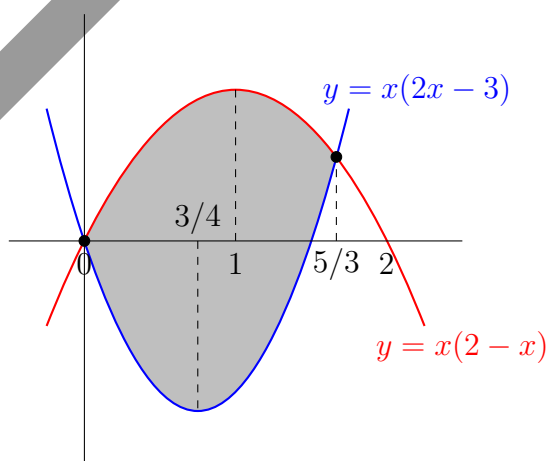
$$\begin{cases} x + 3y = 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

Soluzioak $x = t$, $y = \frac{1-t}{3}$, $z = 2$ dira, non t edozein zenbaki erreal den.

HIRUGARREN ARIKETA.

(a) $y = x(2x-3)$ ekuazioko parabolak $x = 0$ eta $x = 3/2$ denean ebakitzen du OX ardatza, eta $(3/4, -9/8)$ puntuan dauka erpina. $y = x(2-x)$ ekuazioko parabolak $x = 0$ eta $x = 2$ denean ebakitzen du OX ardatza, eta $(1, 1)$ puntuan dauka erpina. Gainera, parabolek elkar ebakitzen dute baldin

$$x(2x-3) = x(2-x) \iff x = 0, \quad x = 5/3.$$



(b) Bi parabolaren arteko azalera honako integralaren bidez kalkulatu da:

$$\int_0^{5/3} (x(2-x) - x(2x-3)) dx = \int_0^{5/3} (5x - 3x^2) dx = \left(\frac{5x^2}{2} - x^3 \right) \Big|_0^{5/3} = \frac{125}{54}.$$

Beraz, eremuaren azalera $A = \frac{125}{54} u^2$ da, non u luzeraren unitatea den.

LAUGARREN ARIKETA.

(4A)

(a) r zuzenaren norabide-bektorea $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$ da, eta $P(0, 1, 0)$ zuzenaren puntu bat da. π planoaren bektore normala $\vec{n} = (-1, 2, 1)$ da. Bi bektore horiek perpendikularak dira haien biderkadura eskalarra $\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0$ delako. A parametroaren arabera, baliteke planoak zuzena barne izatea, edo zuzena eta planoak paraleloak izatea. Planoaren ekuazioan zuzenaren $P(0, 1, 0)$ puntua ordezkatzeko, eta honako hau lortzen dugu: $2 + A = 0$. Beraz, $A = -2$ bada, planoak zuzena barnean du, eta, $A \neq -2$ bada, zuzena eta planoak paraleloak dira.

Atal hau ebazteko beste modu bat honako hau da: zuzenaren puntuak $(t, t+1, -t)$ motakoak dira, $t \in \mathbb{R}$ izanik. Puntu hori planoaren ekuazioan ordezkatzeko, $A + 2 = 0$ lortzen da $t \in \mathbb{R}$ guztietarako. Beraz, $A = -2$ bada, zuzenaren puntu guztiak planoan daude, eta, $A \neq -2$ bada, zuzenaren punturik ez dago planoan, hots, zuzena planoarekiko paraleloa da.

(b) $A = -2$ bada, zuzena planoaren barnean dago. Ondorioz, zuzenaren eta planoaren arteko distantzia 0 da. $A \neq -2$ bada, $\text{dist}(r, \pi) = \frac{|A+2|}{\sqrt{6}} u$, u luzeraren unitatea izanik.

(4B)

(a) π planoak A eta B puntuak lotzen dituen bektorearekiko perpendikularra da, hau da, $\vec{AB} = (-2, -1, 1)$ bektorearekiko. Hartzen dugu, adibidez, $\vec{n} = (2, 1, -1)$ eta planoaren ekuazioa $2x + y - z + d = 0$ motakoa da. Gainera, A eta B puntuen erdipuntuak, $P = (0, 1/2, 5/2)$, planoan egon behar du. Ordezkatuz, $d = 2$ da, eta planoaren ekuazioa $2x + y - z + 2 = 0$.

Beste aukera bat da eskatzea A -tik π -rako distantzia eta B -tik π -rako distantzia berdinak izatea:

$$d(A, \pi) = d(B, \pi) \iff \frac{|2 + 1 - 2 + d|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2 + 0 - 3 + d|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} \iff |d + 1| = |d - 5|.$$

Halabeharrez, $d = 2$

(b) A -tik π -rako distantzia $d(A, \pi) = \frac{|2 + 1 - 2 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} u = \frac{3}{\sqrt{6}} u = \sqrt{\frac{3}{2}} u$ da, u luzeraren unitatea izanik. $d(A, \pi) = \frac{1}{2}d(A, B) = \frac{\sqrt{6}}{2}$ dela ere kontuan izan daiteke.

BOSGARREN ARIKETA.

(5A) Hormigoizko muinoaren oinarria OX ardatzean dagoela eta ardatz-simetria OY ardatza dela hartzen dugu. Problema muinoa deskribatzen duen parabolaren zuzen ukitzailea den eta $(0, 15)$ puntutik pasatzen den zuzenaren OX ardatzarekiko ebaki-puntua aurkitzean datza.

Erpina $(0, 12)$ puntuan duen eta $(-3, 0)$ eta $(3, 0)$ puntuetatik pasatzen den parabolaren ekuazioa $y = 12 - \frac{4}{3}x^2 = f(x)$ da.

$(a, f(a))$ puntutik pasatzen den parabolaren zuzen ukitzailearen ekuazioa, berriz, hau:

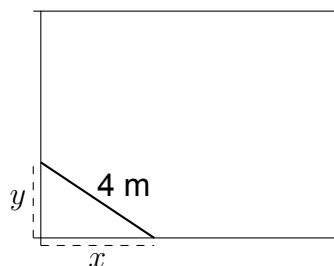
$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Zuzen horrek $(0, 15)$ puntutik pasatu behar du; hau da, $f'(x) = -\frac{8}{3}x$ eta $a > 0$ direla kontuan izanik,

$$f(a) - af'(a) = 12 - \frac{4}{3}a^2 - a\left(-\frac{8}{3}a\right) = 12 + \frac{4}{3}a^2 = 15 \implies a = \frac{3}{2}.$$

Bilatzen den zuzen ukitzailea $y = 15 - 4x$ da, eta OX ardatza ebakitzen du $x = 15/4$ denean. Puntu horretatik muinoaren oinarriaren muturra den $x = 3$ punturako distantzia $d = 3/4 = 0,75$ m da.

(5B) Gunea mugatzeko erabili behar den barra baino luzeagoak diren hormak dituen gela errektangeluar bat dugu; beraz, barra gelaren izkina batean jarri behar da, eta gune triangeluar bat mugatuko du:



Izan bedi x gelaren horma horizontalean kokatutako barraren muturretik mugatutako gunean eratuko den gelaren izkinara dagoen distantzia, eta izan bedi y barraren beste muturretik

izkina horretarako distantzia. Mugatutako gunearen azalera $A = \frac{xy}{2}$ da. x eta y 4 m-ko hipotenusa duen triangelu angeluzuzen baten katetoak direnez, $x^2 + y^2 = 16$ da. Honako funtzio honen maximoa aurkitu nahi dugu:

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2}, \quad x \in [0, 4].$$

Honako hau dugu:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{16-x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} \right) = \frac{8-x^2}{\sqrt{16-x^2}} = 0 \implies x = \pm 2\sqrt{2}.$$

x distantzia bat denez, positiboa izan behar du, $x = 2\sqrt{2}$. Azalera $x = 2\sqrt{2}$ denean maximoa dela egiaztatzeko, funtzioaren bigarren deribatua erabil daiteke:

$$f''(x) = \frac{-2x\sqrt{16-x^2} - (8-x^2) \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}}{16-x^2} \implies f''(2\sqrt{2}) < 0$$

eta, ondorioz, f -k maximo bat du $x = 2\sqrt{2}$ denean. f -k puntu kritiko positibo gehiagorik ez duenez, azalera maximoa lortzen da barraren muturra, horma horizontalean, izkinatik $x = 2\sqrt{2}$ m-ra kokatzen bada, eta, horma bertikalean, izkinatik $y = 2\sqrt{2}$ m-ra.

$h(x) = (2f(x))^2$ funtzioa ere har daiteke, f eta h funtzioen muturrak x -ren balio berdinetan topatzen direlako. Modu horretan,

$$h'(x) = 32x - 4x^3 = 4x(8-x^2) = 0 \implies x = 0 \text{ edo } x = \pm 2\sqrt{2}.$$

x distantzia bat denez, positiboa izan behar du, $x = 2\sqrt{2}$. Azkenik,

$$h''(x) = 32 - 12x^2 \implies h''(2\sqrt{2}) < 0$$

da, eta, beraz, h -k maximo bat du $x = 2\sqrt{2}$ denean.

ZUZENTZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probari 0 eta 10 punturen arteko balorazioa emango zaio.
2. Probako ariketa guztiek balio bera dute: gehienez 2 puntu.
3. Ariketa baten ebazpenean teknika berezirik ez bada eskatzen, soluzio zuzena ematen duen edozein garapen baliozkoa izango da.
4. Ariketa zuzen badago (adierazitako teknikaren arabera, hala badagokio), osorik ontzat emango da. Bakarrik aplikatuko dira kalifikatzeko irizpideetan urrats bakoitzerako adierazitako puntuazioak ariketa osoki zuzena ez bada.
5. Planteamendu zuzena baloratuko da, bai orokorra, bai zati bakoitzarena, halakorik izanez gero.
6. Planteamenduaren deskribapen hutsa, ebazpena modu eraginkorrean gauzatu gabe, ez da nahikoa ariketaren balorazio osoa lortzeko.
7. Ondorio arrazoitua espresuki eskatzen den ariketetan, formula baten aplikazio hutsa ez da nahikoa izango haien balorazio osoa lortzeko.
8. Atal batean egindako akatsak, adibidez, parametro jakin baten balioa kalkulatzean egingdakoak, ez dira kontuan hartuko horren eraginpean gerta daitezkeen geroko garapenak kalifikatzean, baldin eta konplexutasun baliokidea badute.
9. Ez dira kontuan hartuko zenbakizko akatsak, kalkulukoak, etab., kontzeptuzko akatsak ez badira.
10. Balorazio positiboa emango zaie problema eta soluzioa ulertzeko lagungarriak izan daitezkeen ideiei, grafikoei, aurkezpenei, eskemei, etab.
11. Proba txukun aurkeztuta egotea aintzat hartuko da.
12. Negatiboki baloratuko dira planteamendu okerrak, kontzeptuak nahastea eta kalkuluetan errore asko egitea.
13. Errore bakanak negatiboki baloratuko dira hausnarketa kritikoaren edo sen arruntaren gabezia adierazten dutenean.
14. Negatiboki baloratuko dira zehaztasun matematiko eza azalpenetan eta sinbolo matematikoen erabilera desagokia, ariketa bakoitzean 0,2 puntura arteko penalizazioarekin.
15. Erantzunek boligrafo urdinez edo beltzez idatzita egon behar dute, ezin da arkatzik, ezaba daitekeen boligraforik edo beste kolore bateko boligraforik erabili.

Ariketa bakoitza KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

LEHENENGO ARIKETA

- (a)
 - Probabilitate-banaketa zuzen tipifikatzea (0,25 puntu).
 - Kalkulatu beharreko probabilitatea $P(Z < \alpha)$ formaren probabilitateen funtzio gisa berridaztea, Z aldagai tipifikatua izanik eta $\alpha > 0$ (0,25 puntu).
 - Bilatutako probabilitatea aurkitzea, banaketa normalaren taula erabiliz (0,25 puntu).
- (b)
 - Probabilitate-banaketa zuzen tipifikatzea (0,25 puntu).
 - Kalkulatu beharreko probabilitatea $P(Z < \alpha)$ formaren probabilitateen funtzio gisa berridaztea, Z aldagai tipifikatua izanik eta $\alpha > 0$ (0,25 puntu).
 - Bilatutako probabilitatea aurkitzea, banaketa normalaren taula erabiliz (0,25 puntu).
- (c) Galderari zuzen eta modu arrazoituan erantzutea (0,5 puntu).

BIGARREN ARIKETA

- (a)
 - Koefizienteen matrizearen determinantea kalkulatzeko (0,5 puntu).
 - $a = 3$ denean sistema bateragarri indeterminatua dela egiaztatzea (0,5 puntu).
- (b) Sistema zuzen ebaztea $a = 3$ den kasurako (1 puntu).

HIRUGARREN ARIKETA

- (a)
 - Parabolen erpinak eta OX ardatzarekiko ebaki-puntuak zuzen kalkulatzeko (0,5 puntu).
 - Parabolen arteko ebaki-puntuak kalkulatzeko (0,25 puntu).
 - Eremua zuzen marraztea (0,25 puntu).
- (b)
 - Eremuaren azalera ematen duen integrala zuzen idaztea (0,25 puntu).
 - Integrakizunaren jatorrizkoa zuzen kalkulatzeko eta Barrowen erregela zuzen aplikatzeko (0,5 puntu).
 - Soluzioa zatiki baten bidez ematea, hamartarrekin hurbildu gabe (0,25 puntu).

LAUGARREN ARIKETA

4A

- (a)
 - Zuzenaren norabide-bektorea eta planoaren bektore normala kalkulatzeko (0,5 puntu).
 - Zuzenaren norabide-bektorea eta planoaren bektore normala perpendikularrak direla egiaztatzea (0,5 puntu).
 - Zuzenaren eta planoaren posizio erlatiboa ondorioztatzea A parametroaren arabera (0,5 puntu).
- (b) Zuzenetik planorako distantzia kalkulatzeko (0,5 puntu).

4B

- (a)
 - π planoaren bektore normala aurkitzea (0,5 puntu).
 - π planoaren ekuazioa ematea (1 puntu).
- (b) A puntutik π planorako distantzia kalkulatzeko (0,5 puntu).

BOSGARREN ARIKETA

5A

- Muinoa deskribatzen duen parabolaren ekuazioa aurkitzea (0,5 puntu).
- Parabolaren zuzen ukitzaile orokor baten ekuazioa aurkitzea (0,5 puntu).
- Ukitze-puntuaren abszisa aurkitzea (0,5 puntu).
- Eskatutako distantzia aurkitzea (0,5 puntu).

5B

- Mugatutako gunearen azaleraren adierazpena aurkitzea (0,25 puntu).
- Triangeluaren aldearen arteko erlazioa aurkitzea (0,25 puntu).
- Maximizatu behar den funtzioa aurkitzea (0,25 puntu).
- Deribatua zer puntutan den zero aurkitzea (0,5 puntu).
- Funtzioak deribatua zero den puntuan maximo bat duela ondorioztatzea (0,5 puntu).
- Barra non kokatu behar den azaltzea (0,25 puntu).